Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
27. APRIL, 2018

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

3. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
  PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Vorlesungs-Materialien:
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VARTC/
- Kurs auf der Online-Lernplatform Lon Capa:
  http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/
- Die Vorlesungstermine am 15.06. und 29.06.2018 müssen leider auf einen anderen Termin verschoben werden bzw. eine Vertretung wird organisiert.
- Plan für die heutige Vorlesung:
  Praktische Übungsstunde, Lon-Cappa Übungsaufgaben, Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen eines Probekörpers mit Maple lösen

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik

Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik

Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs

Berechnung eines Neutronensterns

Berechnung eines Weißen Zwergs

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Christoffelsymbols Γ^0_{01}, wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=15 , r=4.6

-0.128380691543992

Korrekt!
Ihre Nachweis-Nr. ist 163-3507 Bisherige Antworten

Die folgende Metrik beschreibt die raumzeitliche Struktur eines nichtrotierendes schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie den Wert des Riemann Tensors R_{0101}, wobei die Masse M des schwarzen Loch und der radiale Abstand r den folgenden Werten entspricht:

M=40 , r=4.9

Antwort einreichen Versuche 0/20

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie das Christoffelsymbols Γ^0_{11} und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $\Gamma^0_{11} = \frac{k\,r}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = \frac{\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = -\frac{a(t)}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = \frac{2\,a(t)\,\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$
- $\Gamma^0_{11} = \frac{a(t)\,\frac{da(t)}{dt}}{1-k\,r^2}$

Antwort einreichen Versuche 0/2

```
with(plots):
with(plottools):
```

Definition der Robertson Walker Metrik

```
> coord := [t, r, theta, phi]:
  g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
  g_compts[1,1] := 1:
  g_compts[2,2] := -a(t)^2/(1-k*r^2):
  g_compts[3,3] := -a(t)^2*r^2:
  g_compts[4,4] := -a(t)^2*r^2*sin(theta)^2:
  g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := table\left(\left[index\_char = [-1, -1], compts = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2\,r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2\,r^2\,\sin(\theta)^2 \end{bmatrix}\right]\right) \qquad (1.1)$$

Kontravariante Raumzeit-Metrik:

```
> ginv := invert( g, 'detg' );
```

$$ginv := table\left(\left[index\_char = [1, 1], compts = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+k\,r^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\,a(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sin(\theta)^2\,r^2\,a(t)^2} \end{bmatrix}\right]\right) \qquad (1.2)$$

Raumzeit-Metrik mit gemischten Komponenten:

```
> raise(ginv,g,1);
```

$$table\left(\left[index\_char = [1, -1], compts = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\right) \qquad (1.3)$$

Erste partielle Ableitung der Metrik:

```
> D1g := d1metric ( g, coord );
```

$$D1g := table\Big(\Big[index\_char = [-1, -1, -1], compts = ARRAY\Big(cf1, [1..4, 1..4, 1..4], \Big[(1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = 0, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = 0, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, \qquad (1.4)$$

$$3) = 0, (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = 0, (2, 1, 1) = 0, (2, 1, 2) = 0, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0, (2, 2, 1) = \frac{2\,a(t)\left(\frac{d}{dt}\,a(t)\right)}{\ldots}, (2, 2, 2) = -\frac{2\,a(t)^2\,k\,r}{\ldots}, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0, (2, 3,$$

*Maple 12 - /media/hanauske/79e09806-79c8-4fad-ad62-dabe9db9d8d8/VARTC/Maple/Vorlesung8a.mw - [Server 1]

Chistoffel Symbole (kontravariante Form):

```
> Cf1 := Christoffel1 ( D1g );
```

$$Cf1 := table\Big(\Big[index\_char = [-1, -1, -1],\ compts = ARRAY\Big(cf1, [1..4, 1..4, 1..4], \Big[(1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = 0, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = \frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)}{-1+k r^2}, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = -a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = -a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (2, 1, 1) = 0, (2, 1, 2) = \frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)}{-1+k r^2}, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0, (2, 2, 1) = -\frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)}{-1+k r^2}, (2, 2, 2) = -\frac{a(t)^2 k r}{\left(-1+k r^2\right)^2}, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0, (2, 3, 1) = 0, (2, 3, 2) = 0, (2, 3, 3) = -a(t)^2 r, (2, 3, 4) = 0, (2, 4, 1) = 0, (2, 4, 2) = 0, (2, 4, 3) = 0, (2, 4, 4) = -a(t)^2 r \sin(\theta)^2, (3, 1, 1) = 0, (3, 1, 2) = 0, (3, 1, 3) = -a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (3, 1, 4) = 0, (3, 2, 1) = 0, (3, 2, 2) = 0, (3, 2, 3) = -a(t)^2 r, (3, 2, 4) = 0, (3, 3, 1) = a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (3, 3, 2) = a(t)^2 r, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = -a(t)^2 r^2 \sin(\theta)\cos(\theta), (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = -a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = -a(t)^2 r \sin(\theta)^2, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) = 0, (4, 3, 4) = -a(t)^2 r^2 \sin(\theta)\cos(\theta), (4, 4, 1) = a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (4, 4, 2) = a(t)^2 r \sin(\theta)^2, (4, 4, 3) = a(t)^2 r^2 \sin(\theta)\cos(\theta), (4, 4, 4) = 0\Big]\Big)\Big]\Big) \tag{1.5}$$

Chistoffel Symbole (erster Index kontravariant, zweiter und dritter kontravariant):

```
> Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 );
```

$$Cf2 := table\Big(\Big[index\_char = [1, -1, -1],\ compts = ARRAY\Big(cf2, [1..4, 1..4, 1..4], \Big[(1, 1, 1) = 0, (1, 1, 2) = 0, (1, 1, 3) = 0, (1, 1, 4) = 0, (1, 2, 1) = 0, (1, 2, 2) = -\frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)}{-1+k r^2}, (1, 2, 3) = 0, (1, 2, 4) = 0, (1, 3, 1) = 0, (1, 3, 2) = 0, (1, 3, 3) = a(t) r^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (1, 3, 4) = 0, (1, 4, 1) = 0, (1, 4, 2) = 0, (1, 4, 3) = 0, (1, 4, 4) = a(t) r^2 \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{dt}a(t)\right), (2, 1, 1) = 0, (2, 1, 2) = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}, (2, 1, 3) = 0, (2, 1, 4) = 0, (2, 2, 1) = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}, (2, 2, 2) = -\frac{k r}{-1+k r^2}, (2, 2, 3) = 0, (2, 2, 4) = 0, (2, 3, 1) = 0, (2, 3, 2) = 0, (2, 3, 3) = \left(-1+k r^2\right) r, (2, 3, 4) = 0, (2, 4, 1) = 0, (2, 4, 2) = 0, (2, 4, 3) = 0, (2, 4, 4) = \left(-1+k r^2\right) r \sin(\theta)^2, (3, 1, 1) = 0, (3, 1, 2) = 0, (3, 1, 3) = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}, (3, 1, 4) = 0, (3, 2, 1) = 0, (3, 2, 2) = 0, (3, 2, 3) = \frac{1}{r}, (3, 2, 4) = 0, (3, 3, 1) = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}, (3, 3, 2) = \frac{1}{r}, (3, 3, 3) = 0, (3, 3, 4) = 0, (3, 4, 1) = 0, (3, 4, 2) = 0, (3, 4, 3) = 0, (3, 4, 4) = -\sin(\theta)\cos(\theta), (4, 1, 1) = 0, (4, 1, 2) = 0, (4, 1, 3) = 0, (4, 1, 4) = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}, (4, 2, 1) = 0, (4, 2, 2) = 0, (4, 2, 3) = 0, (4, 2, 4) = \frac{1}{r}, (4, 3, 1) = 0, (4, 3, 2) = 0, (4, 3, 3) = 0, (4, 3, 4) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4, 4, 1) = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}, (4, 4, 2) = \frac{1}{r}, (4, 4, 3) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, (4, 4, 4) = 0\Big]\Big)\Big]\Big) \tag{1.6}$$

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(1,1)$-Komponente des Einsteintensors $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,R\,g_{\mu\nu}$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{3\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{\left(a(t)\right)^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{4\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = -\frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + 2\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^2}$

- $G_{11} = G_{rr} = \frac{2\,a(t)\,\frac{d^2a(t)}{dt^2} + \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 + k}{1-k\,r^4}$

Angabe einzelner Komponenten eines Tensors:

```
> get_compts(Cf2)[1,2,2];
```

$$-\frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)}{-1+k\,r^2} \tag{1.7}$$

Riemann Tensor:

```
> D2g := d2metric ( D1g, coord ):
  RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 );
```

$$RMN := table\Big(\Big[index\_char = [-1, -1, -1, -1], compts = ARRAY\Big(cov\_riemann, [1..4, 1..4, 1..4, 1..4], \Big[(1, 1, 1, 1) = 0, (1, 1, 1, 2) = 0, (1, 1, 1, 3) = 0, (1, 1, 1, 4) = 0, (1, 1, 2, 1) = 0, (1, 1, 2, 2) = 0, (1, 1, 2, 3) = 0, (1, 1, 2, \tag{1.8}$$

$$4) = 0, (1, 1, 3, 1) = 0, (1, 1, 3, 2) = 0, (1, 1, 3, 3) = 0, (1, 1, 3, 4) = 0, (1, 1, 4, 1) = 0, (1, 1, 4, 2) = 0, (1, 1, 4, 3) = 0, (1, 1, 4, 4) = 0, (1, 2, 1, 1) = 0, (1, 2, 1, 2) = -\frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right)}{-1+k\,r^2}, (1, 2, 1, 3) = 0, (1, 2, 1, 4)$$

$$= 0, (1, 2, 2, 1) = \frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right)}{-1+k\,r^2}, (1, 2, 2, 2) = 0, (1, 2, 2, 3) = 0, (1, 2, 2, 4) = 0, (1, 2, 3, 1) = 0, (1, 2, 3, 2) = 0, (1, 2, 3, 3) = 0, (1, 2, 3, 4) = 0, (1, 2, 4, 1) = 0, (1, 2, 4, 2) = 0, (1, 2, 4, 3) = 0, (1, 2, 4, 4) = 0,$$

$$(1, 3, 1, 1) = 0, (1, 3, 1, 2) = 0, (1, 3, 1, 3) = a(t)\,r^2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right), (1, 3, 1, 4) = 0, (1, 3, 2, 1) = 0, (1, 3, 2, 2) = 0, (1, 3, 2, 3) = 0, (1, 3, 2, 4) = 0, (1, 3, 3, 1) = -a(t)\,r^2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right), (1, 3, 3, 2) = 0, (1, 3, 3, 3)$$

$$= 0, (1, 3, 3, 4) = 0, (1, 3, 4, 1) = 0, (1, 3, 4, 2) = 0, (1, 3, 4, 3) = 0, (1, 3, 4, 4) = 0, (1, 4, 1, 1) = 0, (1, 4, 1, 2) = 0, (1, 4, 1, 3) = 0, (1, 4, 1, 4) = a(t)\,r^2\sin(\theta)^2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right), (1, 4, 2, 1) = 0, (1, 4, 2, 2) = 0, (1, 4, 2,$$

$$3) = 0, (1, 4, 2, 4) = 0, (1, 4, 3, 1) = 0, (1, 4, 3, 2) = 0, (1, 4, 3, 3) = 0, (1, 4, 3, 4) = 0, (1, 4, 4, 1) = -a(t)\,r^2\sin(\theta)^2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right), (1, 4, 4, 2) = 0, (1, 4, 4, 3) = 0, (1, 4, 4, 4) = 0, (2, 1, 1, 1) = 0, (2, 1, 1, 2)$$

$$= \frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right)}{-1+k\,r^2}, (2, 1, 1, 3) = 0, (2, 1, 1, 4) = 0, (2, 1, 2, 1) = -\frac{a(t)\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)\right)}{-1+k\,r^2}, (2, 1, 2, 2) = 0, (2, 1, 2, 3) = 0, (2, 1, 2, 4) = 0, (2, 1, 3, 1) = 0, (2, 1, 3, 2) = 0, (2, 1, 3, 3) = 0, (2, 1, 3, 4) = 0, (2, 1, 4, 1)$$

$$= 0, (2, 1, 4, 2) = 0, (2, 1, 4, 3) = 0, (2, 1, 4, 4) = 0, (2, 2, 1, 1) = 0, (2, 2, 1, 2) = 0, (2, 2, 1, 3) = 0, (2, 2, 1, 4) = 0, (2, 2, 2, 1) = 0, (2, 2, 2, 2) = 0, (2, 2, 2, 3) = 0, (2, 2, 2, 4) = 0, (2, 2, 3, 1) = 0, (2, 2, 3, 2) = 0, (2, 2, 3,$$

$$3) = 0, (2, 2, 3, 4) = 0, (2, 2, 4, 1) = 0, (2, 2, 4, 2) = 0, (2, 2, 4, 3) = 0, (2, 2, 4, 4) = 0, (2, 3, 1, 1) = 0, (2, 3, 1, 2) = 0, (2, 3, 1, 3) = 0, (2, 3, 1, 4) = 0, (2, 3, 2, 1) = 0, (2, 3, 2, 2) = 0, (2, 3, 2, 3)$$

$$= \frac{r^2\,a(t)^2\left(\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + k\right)}{\ldots}, (2, 3, 2, 4) = 0, (2, 3, 3, 1) = 0, (2, 3, 3, 2) = -\frac{r^2\,a(t)^2\left(\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + k\right)}{\ldots}, (2, 3, 3, 3) = 0, (2, 3, 3, 4) = 0, (2, 3, 4, 1) = 0, (2, 3, 4, 2) = 0, (2, 3, 4, 3) = 0, (2, 3, 4, 4) = 0, (2, 4, 1, 1) = 0,$$

*Maple 12 - /media/hanauske/79e09806-79c8-4fad-ad62-dabe9db9d8d8/VARTC/Maple/Vorlesung8a.mw - [Server 1]

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help

Text Math Drawing Plot Animation Hide

Maple Input | Monospaced | 12

Favorites
Handwriting
Expression
Units (SI)
Units (FPS)
Common Symbols
Matrix
Components
Greek
Arrows
Relational
Relational Round
Negated
Large Operators
Operators
Open Face
Fraktur
Script
Miscellaneous

4) = 0])])

Angabe einzelner Komponenten eines Tensors:

```
> get_compts(RMN)[3,2,2,3];
```

$$-\frac{r^2\, a(t)^2 \left(\left(\frac{d}{dt}\, a(t)\right)^2 + k\right)}{-1 + k\, r^2} \tag{1.9}$$

Ricci Tensor:

```
> RICCI := Ricci( ginv, RMN );
```

$$RICCI := table\left(\left[index\_char = [-1, -1],\ compts\right.\right. \tag{1.10}$$

$$= \left[\left[\frac{3\left(\frac{d^2}{dt^2}\, a(t)\right)}{a(t)}, 0, 0, 0\right],\right.$$

$$\left[0, \frac{a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, a(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt}\, a(t)\right)^2 + 2\, k}{-1 + k\, r^2}, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, -a(t)\, r^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}\, a(t)\right) - 2\left(\frac{d}{dt}\, a(t)\right)^2 r^2 - 2\, k\, r^2, 0\right],$$

$$\left.\left.\left.\left[0, 0, 0, r^2\left(-a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, a(t)\right) + a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, a(t)\right)\cos(\theta)^2 - 2\left(\frac{d}{dt}\, a(t)\right)^2 + 2\left(\frac{d}{dt}\, a(t)\right)^2\cos(\theta)^2 - 2\, k + 2\, k\cos(\theta)^2\right)\right]\right]\right]\right)$$

```
> get_compts(RICCI)[1,1];
```

$$\frac{3\left(\frac{d^2}{dt^2}\, a(t)\right)}{a(t)} \tag{1.11}$$

Ricci Skalar:

Ready | Memory: 4.49M | Time: 0.15s | Text Mode

*Maple 12 - /media/hanauske/79e098 | 2 - Dolphin | LON-CAPA Teil I: Vorlesung2 - Mozilla | Konsole | 19:58 27.04. Ortszeit

*Maple 12 - /media/hanauske/79e09806-79c8-4fad-ad62-dabe9db9d8d8/VARTC/Maple/Vorlesung8a.mw - [Server 1]

Ricci Skalar:

```
> RS := Ricciscalar( ginv, RICCI );
```

$$RS := table\left(\left[index\_char = [\,],\ compts = \frac{6\left(a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + k\right)}{a(t)^2}\right]\right) \qquad (1.12)$$

Überprüfung:

```
> RICCIOU:=raise(ginv,RICCI,1);
  contract(RICCIOU, [1, 2]);
```

$$RICCIOU := table\left(\left[index\_char = [1, -1],\ compts = \begin{bmatrix} \frac{3\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + 2k}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + 2k}{a(t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + 2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + 2k}{a(t)^2} \end{bmatrix}\right]\right)$$

$$table\left(\left[index\_char = [\,],\ compts = \frac{6\left(a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + k\right)}{a(t)^2}\right]\right) \qquad (1.13)$$

Einsteintensor:

```
> Estn := Einstein(g, RICCI, RS);
```

$$Estn := table\left(\left[index\_char = [-1, -1],\ compts\right.\right. \qquad (1.14)$$

*Maple 12 - /media/hanauske/79e09806-79c8-4fad-ad62-dabe9db9d8d8/VARTC/Maple/Vorlesung8a.mw - [Server 1]

```
> Estn := Einstein(g, RICCI, RS);
```

$$Estn := table\left(\left[index\_char = [-1, -1],\ compts = \left[\left[-\frac{3\left(\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + k\right)}{a(t)^2}, 0, 0, 0\right], \left[0, -\frac{2\,a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + k}{-1 + k\,r^2}, 0, 0\right], \left[0, 0, 2\,a(t)\,r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 r^2 + k\,r^2, 0\right], \left[0, 0, 0, -r^2\left(-2\,a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right) + 2\,a(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)\cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2\cos(\theta)^2 - k + k\cos(\theta)^2\right)\right]\right]\right]\right) \tag{1.14}$$

Überprüfung:

```
> lin_com(1,RICCI,- 1/2*get_compts(RS),g);
```

$$table\left(\left[index\_char = [-1, -1],\ compts \right.\right. \tag{1.15}$$

Die folgende Metrik beschreibt die homogene, isotrope zeitliche Entwicklung des Universums (Robertson-Walker Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-k\,r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Funktion $a(t)$ bezeichnet den Skalenfaktor des Universums zur Zeit t und der Parameter k kennzeichnet den Krümmungsparameter des Universums. Die griechischen, raumzeitlichen Indices μ, ν laufen von 0..3 und entsprechen den folgenden sphärischen Koordinaten: $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, r, \theta, \phi)$. Berechnen Sie die $(0,0)$-Komponente des folgenden zusammengesetzten Tensors $Q^\mu{}_\nu = R^{\alpha\beta\gamma\mu} R_{\alpha\beta\gamma\nu} - \frac{1}{4}\, R^{\alpha\beta\gamma\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\lambda}\, g^\mu{}_\nu$ und geben Sie an welcher der unten stehende Ausdrücke richtig ist:

- $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3\left((a(t))^4 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - 2\,k\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{(a(t))^4}$$

- $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3\left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 2\,k\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{(a(t))^4}$$

- $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{2\left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 4\,k\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{(a(t))^4}$$

- $$Q^0{}_0 = Q^t{}_t = \frac{3\left((a(t))^2 \left(\frac{d^2 a(t)}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt}\right)^4 - 2\,k\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 - k^2\right)}{1 - k\,r^2}$$

Berechnung des infinitesimalen Weglängenelements ds²:

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):
  ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1])):
  ds2:=collect( simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]);
```

$$ds2 := dt^2 + \frac{dr^2\, a(t)^2}{-1+k\,r^2} + \frac{\left(a(t)^2\, r^2 - a(t)^2\, r^4\, k\right) dtheta^2}{-1+k\,r^2} + \frac{\left(a(t)^2\, r^4\, k\cos(\theta)^2 + a(t)^2\, r^2 - a(t)^2\, r^4\, k - a(t)^2\, r^2 \cos(\theta)^2\right) dphi^2}{-1+k\,r^2} \quad (1.16)$$

Quadratischer Beitrag in der alternativen ART-Theorie von Prof. Struckmeier (FIAS Frankfurt)

```
> RMNinv:= raise(ginv,RMN,1,2,3,4):
  Eins:=raise(ginv,g,1):
  EqQuad:=lin_com(1,prod(RMNinv,RMN,[1,1],[2,2],[3,3]),- 1/4,prod(Eins,prod(RMNinv,RMN,[1,1],[2,2],[3,3],[4,4])));
```

$$EqQuad := table\left(\left[index\_char = [1,-1],\ compts = \left[\left[\frac{3\left(\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^4 - 2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 k - k^2\right)}{a(t)^4}, 0, 0, 0\right],\right.\right.\right. \quad (1.17)$$

$$\left[0, -\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^4 - 2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 k - k^2}{a(t)^4}, 0, 0\right],$$

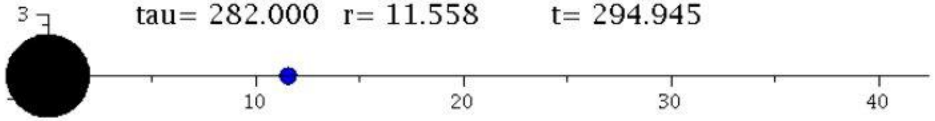
$$\left[0, 0, -\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^4 - 2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 k - k^2}{a(t)^4}, 0\right],$$

$$\left.\left.\left.\left[0, 0, 0, -\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}a(t)\right)^2 a(t)^2 - \left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^4 - 2\left(\frac{d}{dt}a(t)\right)^2 k - k^2}{a(t)^4}\right]\right]\right]\right)$$

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = -\Gamma^0_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}$$
$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\Gamma^1_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}$$
$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\Gamma^2_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}$$
$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\Gamma^3_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} \quad ,$$



wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung eines radial in ein schwarzes Loch einfallenden Probekörpers. Verwenden Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Eigenzeit τ=0 sei der Probekörper bei r=50.5 , θ=0 und ϕ=0; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}$=0, $\frac{d\theta}{d\tau}$=0, $\frac{d\phi}{d\tau}$=0 und die Masse des schwarzen Lochs betrage M=1. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei τ = 300 $\approx$ 1 [ms] befindet und geben Sie den Radius r(300) in [km] an.

Antwort einreichen | Versuche 0/20

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

2. Vorlesung

Einführung

Bewegung eines Probekörpers (Masse verschwindend klein gegenüber der Masse des schwarzen Lochs) um ein schwarzes Loch ist ein astrophysikalisch sehr relevantes Problem. Es gilt als so gut wie bestätigt, dass im Zentrum unserer Galaxie ein superschwehres schwarzes Loch existiert und man verfolgt seit Jahrzenten (siehe z.B. R.Genzel et,al.) die Bewegung einzelner sogenannter S-Sterne um dieses Zentrum.Neben diesen aktuellen Erkenntnissen, gilt die Perihel-Drehung des Merkur als ein, durch die allgemeine Relativitätstheorie verursachter, Effekt. Obwohl die Bewegung der Planenten unseres Sonnensystems um unser Zentralgestirn (die Sonne) ja sicherlich keine Bewegung um ein schwarzes Loch darstellt, können die Gleichungen der Planetenbewegungen in guter Approximation als solche beschrieben werden (siehe Birkov-Theorem).

Die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Betrachten wir zwei unterschiedliche Raumzeitpunkte A und B und beschreiben die Bewegung eines Probekörpers von A nach B mittels einer parametrisierten Raumzeitkurve $x^\mu(\lambda)$; λ bezeichnet man als den affinen Parameter. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse = 0) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stehts entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

Mittels der Euler-Lagrange Gleichungen ($L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$) gelangt man dann zur Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad ,$$

wobei die $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

Radial in ein schwarzes Loch einfallender Probekörper

```
>    restart:
  with( tensor ):
   with(plots):
 with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
>                coord := [t, r, theta, phi]:
        g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
```

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$
\begin{aligned}
eqns := \Bigg\{ & \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2\,M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)}{r\,(-r+2\,M)} = 0,\ \frac{d^2}{d\lambda^2}\phi(\lambda) \\
& + \frac{2\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\phi(\lambda)\right)}{r} + \frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\lambda}\theta(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\phi(\lambda)\right)}{\sin(\theta)} = 0,\ \frac{d^2}{d\lambda^2}\theta(\lambda) \\
& + \frac{2\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\theta(\lambda)\right)}{r} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\lambda}\phi(\lambda)\right)^2 = 0,\ \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\
& - \frac{(-r+2\,M)\,M\left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right)^2}{r^3} + \frac{M\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2}{r\,(-r+2\,M)} + (-r+2\,M)\left(\frac{d}{d\lambda}\theta(\lambda)\right)^2 + (\\
& -r+2\,M)\sin(\theta)^2\left(\frac{d}{d\lambda}\phi(\lambda)\right)^2 = 0 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

wobei die $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

Radial in ein schwarzes Loch einfallender Probekörper

```
>    restart:
 with( tensor ):
  with(plots):
 with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

```
>                coord := [t, r, theta, phi]:
        g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
 g_compts[1,1] := 1-2*M/r: g_compts[2,2] := -1/g_compts[1,1]:
 g_compts[3,3] := -r^2:    g_compts[4,4] := -r^2*sin(theta)^2:
            g := create( [-1,-1], eval(g_compts));
```

$$g := table\left(\left[index\_char = [-1, -1], compts = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}\right]\right) \quad (2.1.1)$$

Berechnung der kontravarianten Metrik und der Christoffel Symbole:

```
>  ginv := invert( g, 'detg' ):
  D1g := d1metric( g, coord ):
  D2g := d2metric( D1g, coord ):
   Cf1 := Christoffel1( D1g ):
 Cf2:= Christoffel2( ginv, Cf1 ):
```

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ: Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2t}{d\lambda^2} &= -\Gamma^0_{\nu\rho}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,\frac{dx^\rho}{d\lambda}\\
\frac{d^2r}{d\lambda^2} &= -\Gamma^1_{\nu\rho}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,\frac{dx^\rho}{d\lambda}\\
\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma^2_{\nu\rho}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,\frac{dx^\rho}{d\lambda}\\
\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma^3_{\nu\rho}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,\frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

```
> eqns:=geodesic_eqns( coord, lambda, Cf2 );
```

$$\begin{aligned}
eqns := \Bigg\{ & \frac{d^2}{d\lambda^2}\,t(\lambda) - \frac{2\,M\left(\frac{d}{d\lambda}\,t(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\,r(\lambda)\right)}{r\,(-r+2\,M)} = 0,\ \frac{d^2}{d\lambda^2}\,\phi(\lambda)\\
&+ \frac{2\left(\frac{d}{d\lambda}\,r(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\,\phi(\lambda)\right)}{r} + \frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\lambda}\,\theta(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\,\phi(\lambda)\right)}{\sin(\theta)} = 0,\ \frac{d^2}{d\lambda^2}\,\theta(\lambda)\\
&+ \frac{2\left(\frac{d}{d\lambda}\,r(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda}\,\theta(\lambda)\right)}{r} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\lambda}\,\phi(\lambda)\right)^2 = 0,\ \frac{d^2}{d\lambda^2}\,r(\lambda)\\
&- \frac{(-r+2\,M)\,M\left(\frac{d}{d\lambda}\,t(\lambda)\right)^2}{r^3} + \frac{M\left(\frac{d}{d\lambda}\,r(\lambda)\right)^2}{r\,(-r+2\,M)} + (-r+2\,M)\left(\frac{d}{d\lambda}\,\theta(\lambda)\right)^2 + (\\
&-r+2\,M)\sin(\theta)^2\left(\frac{d}{d\lambda}\,\phi(\lambda)\right)^2 = 0 \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Wir lassen nur radiale Bewegung zu und setzen die Masse des schwarzen Lochs auf M=1:

```
> eq1:=subs({diff(phi(lambda),lambda)=0,diff(theta(lambda),lambda)=0,M=1},eqns[1]):
  eq2:=subs({diff(phi(lambda),lambda)=0,diff(theta(lambda),lambda)=0,M=1},eqns[2]):
  eq3:=subs({diff(phi(lambda),lambda)=0,diff(theta(lambda),lambda)=0,M=1},eqns[3]):
  eq4:=subs({diff(phi(lambda),lambda)=0,diff(theta(lambda),lambda)=0,M=1},eqns[4]):
                        eq1:=simplify(subs({r=r(lambda)},eq1)):
                        eq4:=simplify(subs({r=r(lambda)},eq4)):
```

$$eq1 := \frac{\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda)\right) r(\lambda)^2 - 2\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda)\right) r(\lambda) + 2\left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right)\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)}{r(\lambda)\,(r(\lambda)-2)} = 0$$

$$eq4 := \frac{1}{r(\lambda)^3\,(r(\lambda)-2)}\Bigg(\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^4 - 2\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda)\right) r(\lambda)^3 + \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2 - 4\left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right)^2 r(\lambda) + 4\left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right)^2 - \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)^2 r(\lambda)^2\Bigg) = 0 \qquad (2.1.3)$$

Anfangswerte:

Zur Zeit t=0 sei der fallende Körper bei einem Radius von r=10=5*(Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0. Wir beschreiben den Fall aus der Sichtweise eines im unendlichen ruhenden Beobachters. Bemerkung: Der Anfangswert dt0 ergibt sich hierbei aus der Bedingung des infinitesimalen Weglängenelements $\frac{ds^2}{d\lambda^2} = u^\mu u_\mu = 1$, wobei hierbei der affine Parameter λ als Eigenzeit τ interpretiert wird und u^μ die 4er-Geschwindigkeit des Körpers darstellt.

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dr=d\theta=d\phi=0 \text{ bei } t=0} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}}$$

```
>          r0:=10:
            t0:=0:
           dr0:=0:
 dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)):
```

Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```
> Loes:=dsolve({eq1,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=0,D(t)(0)=dt0},{r(lambda),t(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

Zum Vergleich lösen wir auch die Bewegungsgleichung nach Newton:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2}$$

Grafische Veranschaulichung der Lösung (rote Kurve ist die nach Newton berechnete):

```
> lend:=33.7:
lendn:=35.12:
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter lambda"):
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda"):
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius"):
Plot_newton:=odeplot(Loes_newton,[r(lambda),lambda],0..lendn,numpoints=100,color=red,thickness=2):
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,display(Plot3,Plot_newton)]));
```