

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*VORLESUNGSREIHE
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
27. APRIL, 2023*

MATTHIAS HANAUSKE

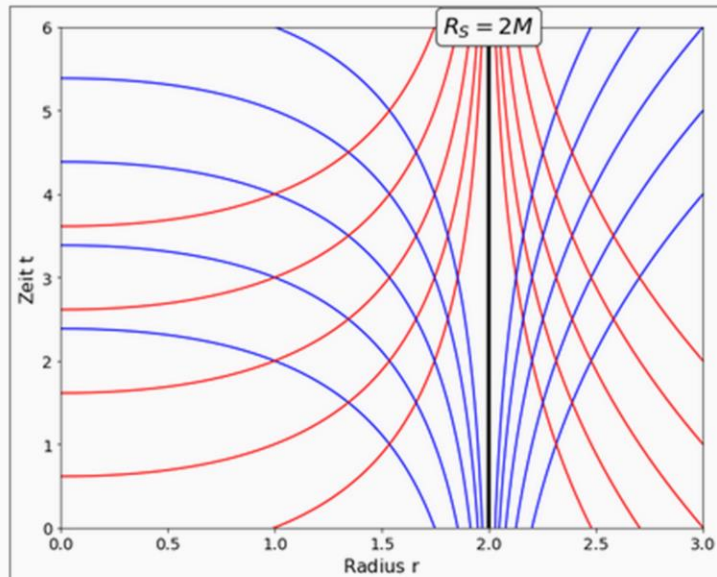
*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

3. Vorlesung

Vorlesung 2

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen, nicht rotierenden und nicht geladenen schwarzen Loches der Masse M , wobei die gesamte Masse des schwarzen Loches in einem singulären Punkt im Zentrum vereint ist. Der Ricci Tensor verschwindet identisch ($R_{\mu\nu} \equiv 0$), da man eine leere Raumzeit betrachtet. Die skalare Invariante des vollständig kontrahierten Quadrates des Riemannschen Krümmungstensors $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, der sogenannte Kretschmann-Skalar K , wird im Ursprung singulär ($K = \frac{48 M^2}{r^6}$) und die Schwarzschild-Metrik besitzt daher eine echte Singularität bei $r = 0$. Neben dieser echten Singularität besitzt die Schwarzschild-Metrik eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Im ersten Jupyter Notebook werden wir die wesentlichen Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik mittels eingebetteter Diagramme und anhand von Raumzeit-Diagrammen visualisieren. Im zweiten Jupyter Notebook werden wir den radialen Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Loch numerisch berechnen.

Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik



Die Struktur der Raumzeit der Schwarzschild-Metrik kann man auf unterschiedliche Weisen visualisieren. Wir betrachten uns zunächst die sogenannten eingebetteten Diagramme der räumlichen Hypersphäre Σ_t der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Diese eingebetteten Diagramme besitzen eine Trichter-Form und zeigen eine Koordinatensingularität bei dem sogenannten Schwarzschild-Radius $R_S = 2M$. Zusätzlich zu diesen Diagrammen werden in dem Jupyter Notebook ([Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik](#)) die Raumzeit-Diagramme der Schwarzschild-Metrik in Schwarzschild-Koordinaten und Eddington-Finkelstein Koordinaten betrachtet. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Raumzeit-Diagramm der Schwarzschild-Metrik ($M = 1$) und beschreibt somit das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches aus dem

Betrachtungspunkt eines im Unendlichen ruhenden Beobachters (Schwarzschild Koordinaten). Die roten Kurven

Vorlesung 2

In der zweiten Vorlesung werden wir die wohl bekannteste analytische Lösung der Einsteingleichung betrachten - die sogenannte *Schwarzschild-Lösung*. Bereits einige Monate nach der Publikation von Einsteins Artikel zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Jahre 1915, erarbeitete Karl Schwarzschild in zwei Arbeiten mögliche analytische Lösungen der neuen Theorie der Raumzeitkrümmung. In der ersten dieser Arbeiten ("über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", siehe Schwarzschild, K., Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. Reimer, Berlin 1916, S. 189–196) betrachtete Herr Schwarzschild die Einsteingleichung für den freien, leeren Raum ($T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow R_{\mu\nu} = 0$), wobei er annahm, dass sich die gesamte Materie/Energie in einem singulären Punkt im Ursprung befindet (Massenpunkt der Masse M). Die so von ihm gefundene Lösung der resultierenden Feldgleichungen ist heutzutage unter dem Namen *Schwarzschild-Metrik* bekannt und lautet:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, wobei wir ein sphärisch symmetrisches Koordinatensystem benutzt wurde ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Diese Lösung ist von besonderer Bedeutung für astrophysikalische Betrachtungen, denn sie beschreibt einerseits die Metrik eines nicht-rotierenden schwarzen Loches und andererseits, aufgrund des Birkhoff-Theorem, die Metrik außerhalb eines einzelnen isolierten, nichtrotierenden Sterns.

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2021)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 04.04.2021

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Teil I: Radialer Fall eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht. Zunächst wird das Python Modul "EinsteinPy" eingebunden, welches auf dem Modul SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht.

Definition der Koordinaten und der kovarianten Raumzeit-Metrik der Schwarzschildmetrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Auf der OLAT Seite des Kurses
finden Sie die Jupyter Notebooks
zum Ansehen
und zum herunterladen

Jupyter Notebook

Radialer Fall eines Probekörpers
in ein nicht-rotierendes
Schwarzes Loch

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Allgemeine Relativität...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit der
- Literaturverzeichnis
- Einschreibung
- Kursinhalt
- Vorlesungsaufzeichnung
- Aufgaben
- Programme
 - Einführung in Jupyter Notebooks
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit Py
 - Eigenschaften der Schwarzschild-M
 - Radialer Fall eines Probekörpers in
 - Jupyter Notebooks
- Mitteilungen
- Forum

Gruppen

- Mitglieder
- Kurs-Gruppe Allgemeine Relativitätsthe

Sommersemester 2021
Allgemeine Relati
Verantwortliche/r: Matthias H
Allgemeine Relativitätstheo

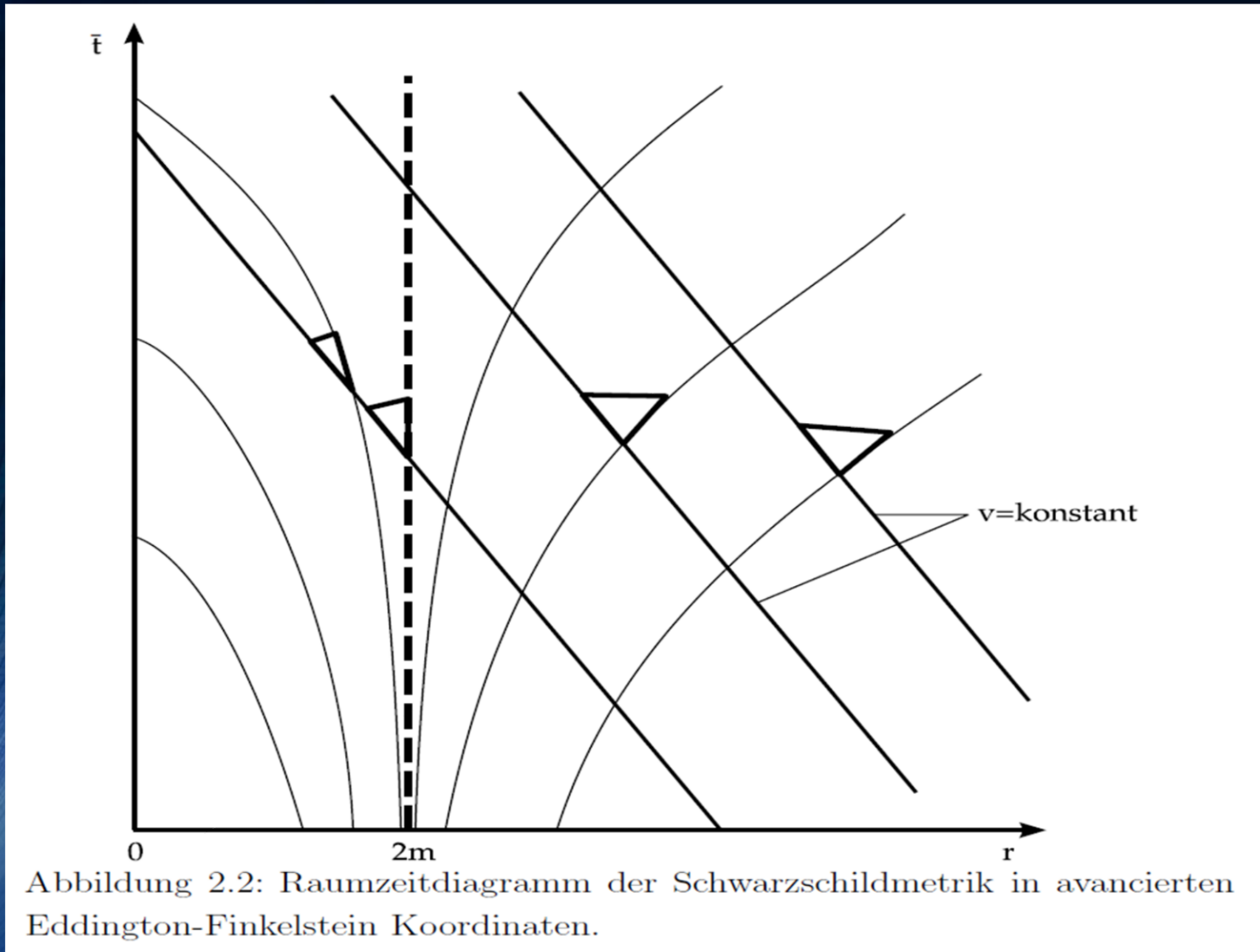
In dieser Vorlesung werden
Kurses erlernen die Studien
Berechnungen der tensorie
Notebooks (eine Open-Sou
Lösungen berechnet und vi
Programms. Nach einer kur
und die Ergebnisse werden
erstellt. Im dritten Teil des K
visualisiert. Inhaltlich wird h
Probleme behandelt. Möglic
einem Schwarzen Loch ode
liegt sowohl auf der Allgem
Weitere Informationen anze

Literaturverzeichnis

- Internetseite der Vorlesung
- "General relativity : An introduction for physicis
- "Gravity : An introduction to Einstein's gen

Raumzeit-Diagramm eines schwarzen Loches

Sichtweise eines in das schwarze Loch fallenden Beobachters



Der Tod und die Theorie der schwarzen Löcher

Die theoretischen Eigenschaften von schwarzen Löchern werden manchmal mit dem Tod verglichen. Die sterbende Person/Seele übertritt die Grenze des irdischen Lebens (Ereignishorizont) und nach diesem Überscheitern gibt es keine Möglichkeit mehr Informationen in den äußeren, irdischen Bereich zu übermitteln. Für den äußeren Beobachter (die Mitmenschen, die seinen Tod erleben) friert das Bild seines klinisch toten Körpers ein und als lebender Mensch hat man keine Möglichkeit Informationen aus dem Jenseits (innerer Bereich des schwarzen Lochs) zu empfangen - dies ist nur möglich, wenn man selbst stirbt und die Grenze des Ereignishorizontes übertritt.

Vorlesung 3

In dieser Vorlesung werden wir die Geodätengleichung und die Klassifikation möglicher Bahnen von Probekörpern in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit mittels eines definierten effektiven Potentials in einem Jupyter Notebook behandeln. Zusätzlich werden wir eine kurze Einführung in die Programmiersprache C++ und das numerische Lösen von Differentialgleichungen gegeben.

Das in dieser Vorlesung inhaltlich behandelte Thema (die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch) ist ein astrophysikalisch sehr relevantes Problem. Schon Jahre bevor die ersten Bilder eines schwarzen Lochs entstanden, galt es schon als so gut wie bestätigt, dass im Zentrum unserer Galaxie ein superschweres schwarzes Loch existiert und Reinhard Genzel (Physik-Nobelpreisträger 2020) verfolgte schon seit Jahrzehnten die Bewegung einzelner, sogenannter S-Sterne um dieses schwarze Loch. Neben diesen aktuellen Erkenntnissen, gilt die Perihel-Drehung des Merkur als ein, durch die allgemeine Relativitätstheorie verursachter Effekt. Obwohl die Bewegung der Planeten unseres Sonnensystems um unser Zentralgestirn (die Sonne) ja sicherlich keine Bewegung um ein schwarzes Loch darstellt, können die Gleichungen der Planetenbewegungen in guter Approximation als solche beschrieben werden (siehe Birkhoff-Theorem).

Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch und die Klassifikation möglicher Bahnen mittels eines definierten effektiven Potentials

Die Klassifikation möglicher Bahnen von Probekörpern in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit kann mittels eines definierten effektiven Potentials illustriert werden. Dieses Potential ($V(r, M, l)$) hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls l und der Masse des schwarzen Lochs M ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (1: Drehimpuls pro Masse m und e : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potentials erfolgt mittels der radialen, 2. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1-3 (siehe Literaturangaben im rechten obersten Panel) das effektive Potential wie folgt:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

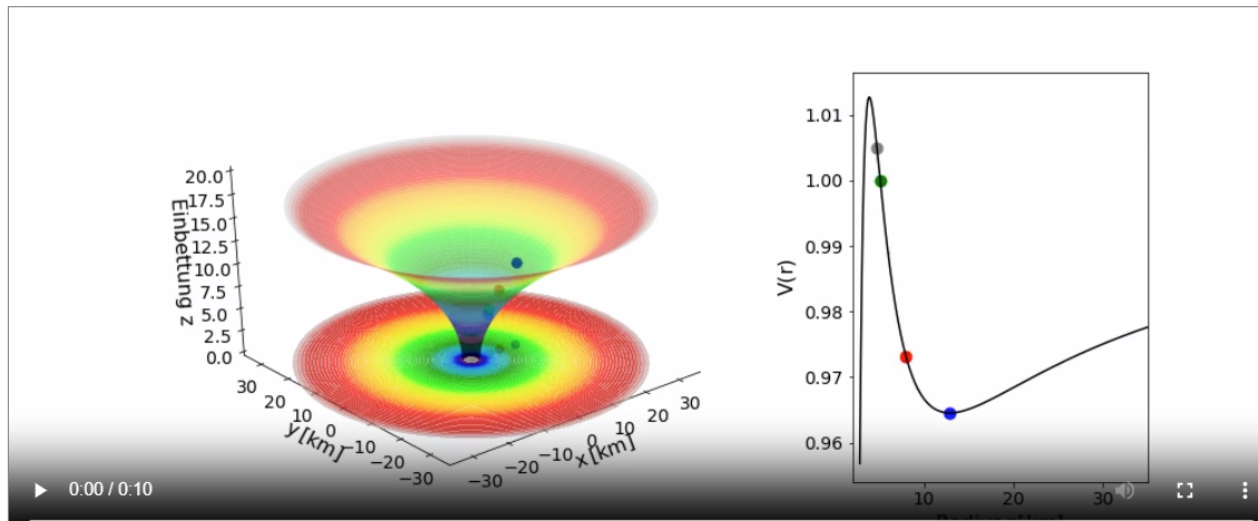
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r}$$

In der Literaturangabe 4 (siehe Literaturangaben im rechten obersten Panel) wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = e^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)}$$

Die unten abgebildete Animation zeigt das effektive Potential als Funktion des Radius (in der Nomenklatur des 4. Buches) und die Trajektorien der Probekörper für unterschiedliche Anfangswerte in einem eingebetteten Raumzeit-Diagramm der Schwarzschild-Metrik.



Vorlesung 3

Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht. Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = 0$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ des Probekörpers).

In der dritten Vorlesung werden wir die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit näher betrachten, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$).

Die Geodätengleichung stellt ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen dar

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} &= \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in [General relativity: An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby](#)), dass sich die erste und vierte Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = e = \text{const}$$

$$4. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0$$

$$\rightarrow r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const}$$

, wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen e (Teilchenenergie pro Masse) und l

Nobel Preis 2020

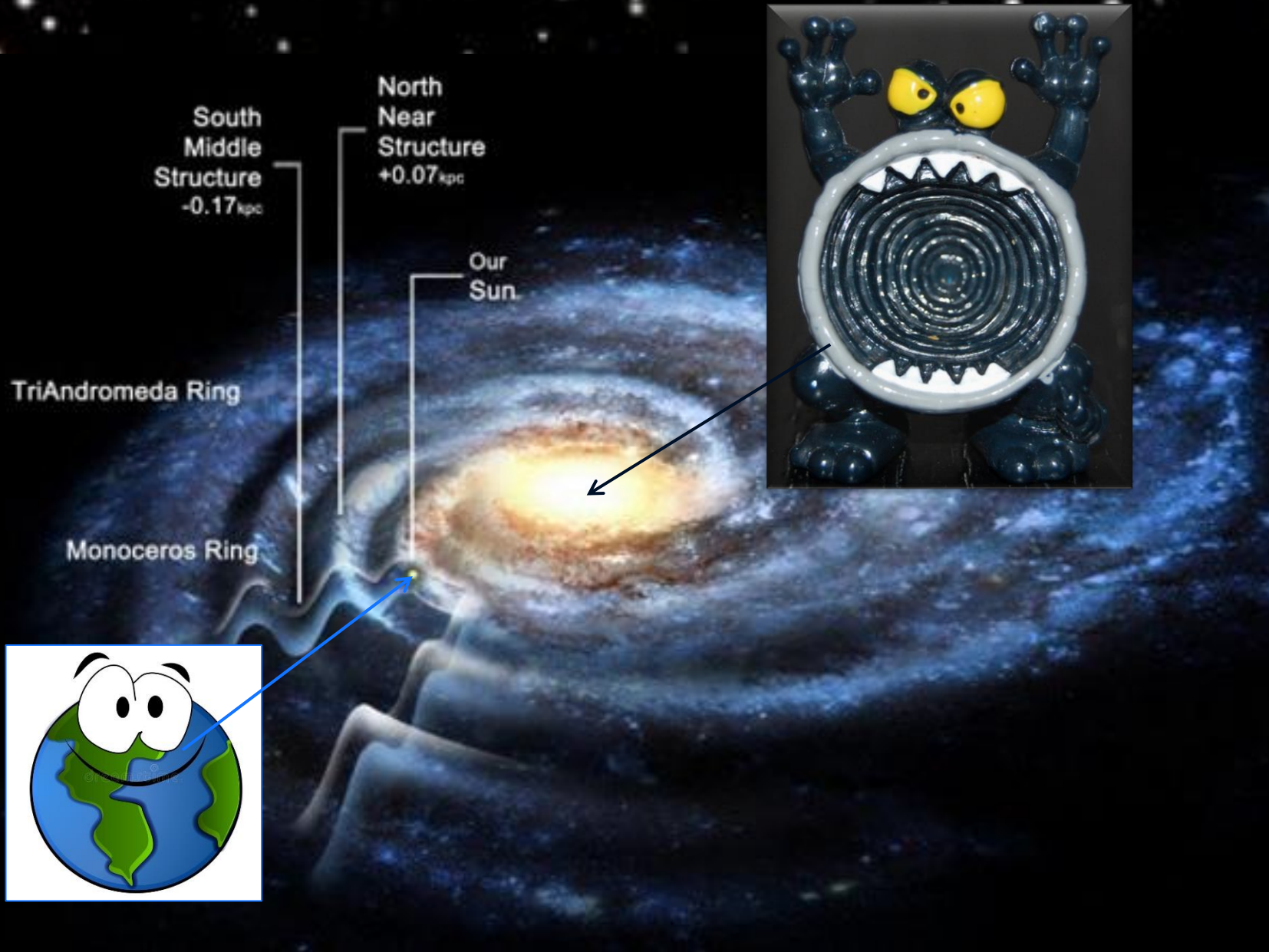
IN PHYSICS 2020

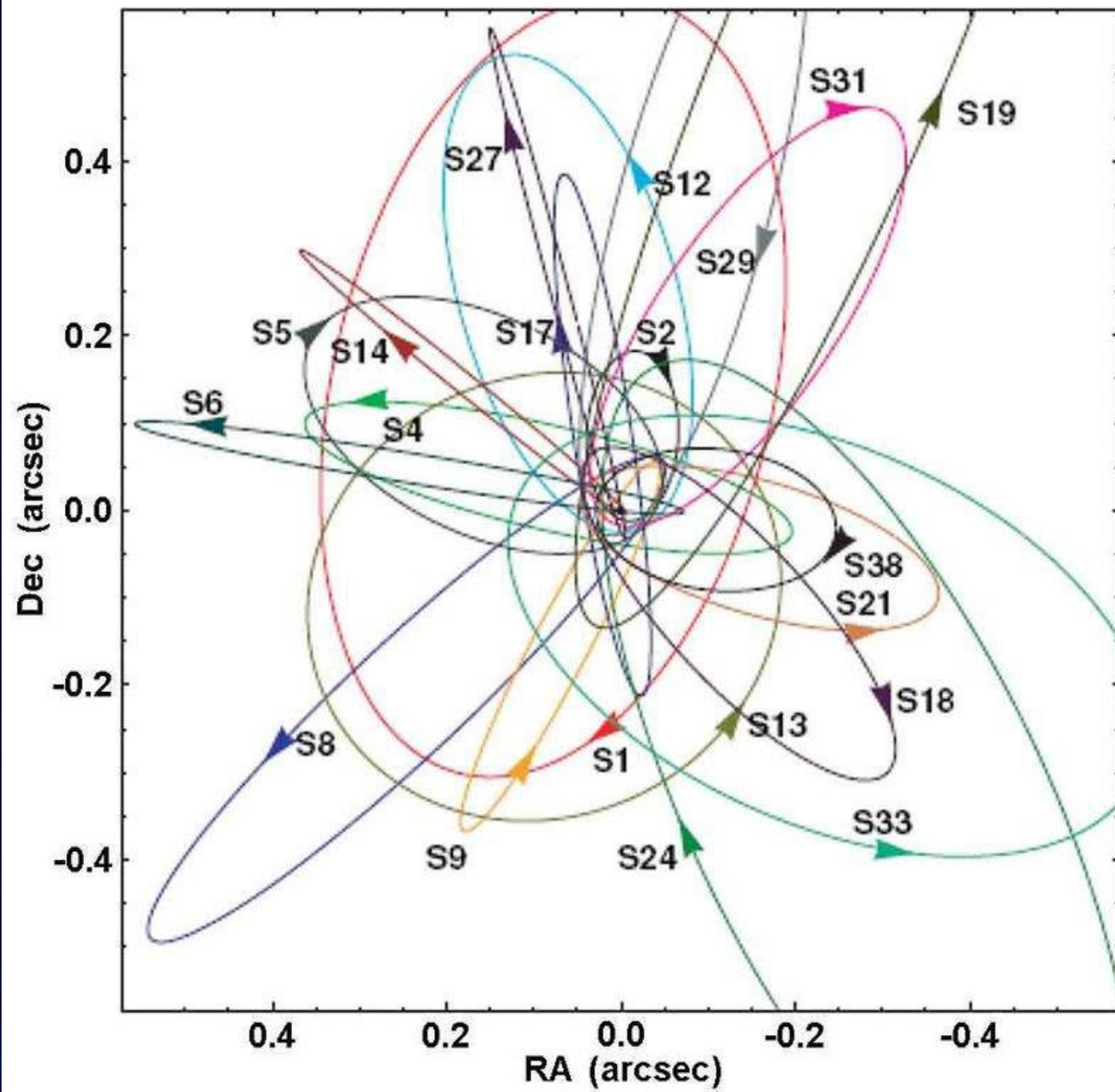
Illustrations: Niklas Elmehed



Für die Entdeckung, dass die Bildung von Schwarzen Löchern eine robuste Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie ist (R. Penrose) und die Entdeckung eines supermassiven kompakten Objekts im Zentrum unserer Galaxie (R. Genzel und).

Das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie





Die Geodätengleichung

Wie bewegt sich ein Probekörper in vorgegebener raumzeitlicher Struktur?

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ

$L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ des Probekörpers).

Die Geodätengleichung

Wir betrachten im Folgenden die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$).

Die Geodätengleichung

Ein System gekoppelter nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Die Geodätengleichung stellt ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen dar

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad ,\end{aligned}$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ), t , r , θ und ϕ die Koordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

Anfangsbedingungen

Zum Lösen des Systems von Differentialgleichungen müssen die Anfangsbedingungen des Probekörpers festgelegt werden

z.B. wo befindet sich der Probekörper zur Eigenzeit $\lambda=0$: $r(0)=10$

Die Anfangsbedingung für $t'(0)$ erhält man z.B. mittels der folgenden Bedingungen aus dem infinitesimalen Weglängenelement ds :

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=d\phi=0 \\ \text{bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

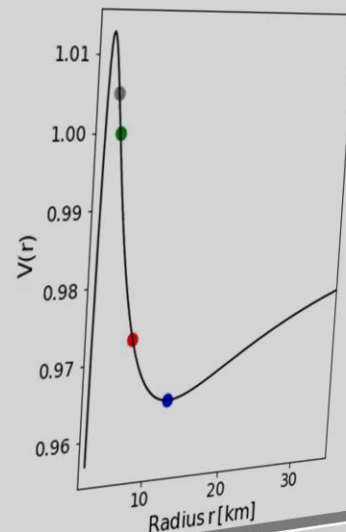
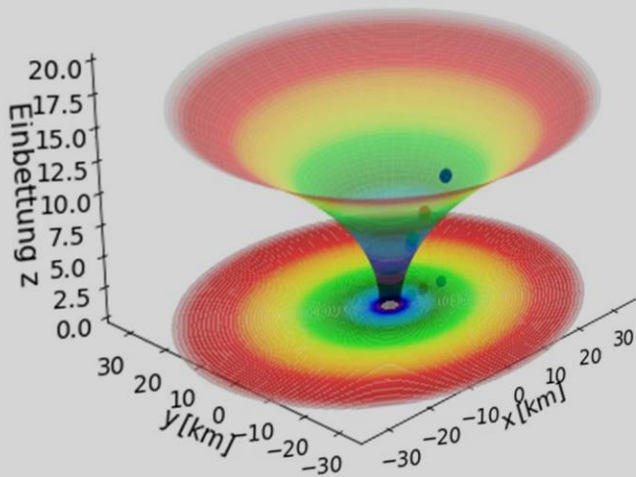
Keine Anfangsgeschwindigkeit

Anfangsgeschwindigkeit in der äquatorialen Ebene:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=0, \\ \theta=\pi/2 \text{ bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Jupyter Notebook

Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen um ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch



Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Teil II: Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$d \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt

$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum Herunterladen

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Startseite | Lehren & Lernen | Kursangebote | Allgemeine Relativität...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Literaturverzeichnis
 - Einschreibung
 - Kursinhalt
 - Vorlesungsaufzeichnung
 - Aufgaben
 - Programme
 - Einführung in Jupyter Notebook:
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik
 - Radialer Fall eines Probekörpers
 - Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen
 - Jupyter Notebooks**
 - Mitteilungen
 - Forum
 - Gruppen

Während der Bewegung erhaltene Größen

Energie und Drehimpuls des Probekörpers

Literatur:

1. *General relativity : An introduction for physicists* von M. P. Hobson, G. P. Efstathiou und A. N. Lasenby
2. *Gravity : An introduction to Einstein's general relativity* von James B. Hartle
3. *Allgemeine Relativitätstheorie* von Torsten Fließbach
4. *Relativistic hydrodynamics* von Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in [General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby](#)), dass sich die erste und vierte Gleichung des Systems der Differentialgleichungen der Geodätengleichung in die folgenden Gleichungen umschreiben läßt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \right] = 0$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = e = \text{const}$$

$$2. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$\rightarrow r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\tau} = l = \text{const} \quad ,$$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen e (Teilchenenergie pro Masse, $e = \frac{E}{m}$) und l (Drehimpuls pro Masse m , $l = \frac{L}{m}$) sich aus der

Definition des Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu = m g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = m \left(g_{tt} \frac{dt}{d\tau}, g_{rr} \frac{dr}{d\tau}, g_{\theta\theta} \frac{d\theta}{d\tau}, g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \right)$ ergeben (Voraussetzung: diagonale Form der Metrik). Für die Schwarzschildmetrik erhält man:

$$p_t = p_0 = m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m e$$

$$p_\phi = p_3 = m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l$$

1. *General relativity : An introduction for physicists* von M. P. Hobson, G. P. Efstathiou und A. N. Lasenby
2. *Gravity : An introduction to Einstein's general relativity* von James B. Hartle
3. *Allgemeine Relativitätstheorie* von Torsten Fließbach
4. *Relativistic hydrodynamics* von Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti

Das effektive Potential $V(r, M, l)$

Die Klassifikation möglicher Bahnen von Probekörpern in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit kann mittels eines definierten effektiven Potentials illustriert werden. Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls pro Masse m ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und e : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potential erfolgt mittels der radialen, 2. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1-3 (siehe Angaben oben) das effektive Potential wie folgt:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} .$$

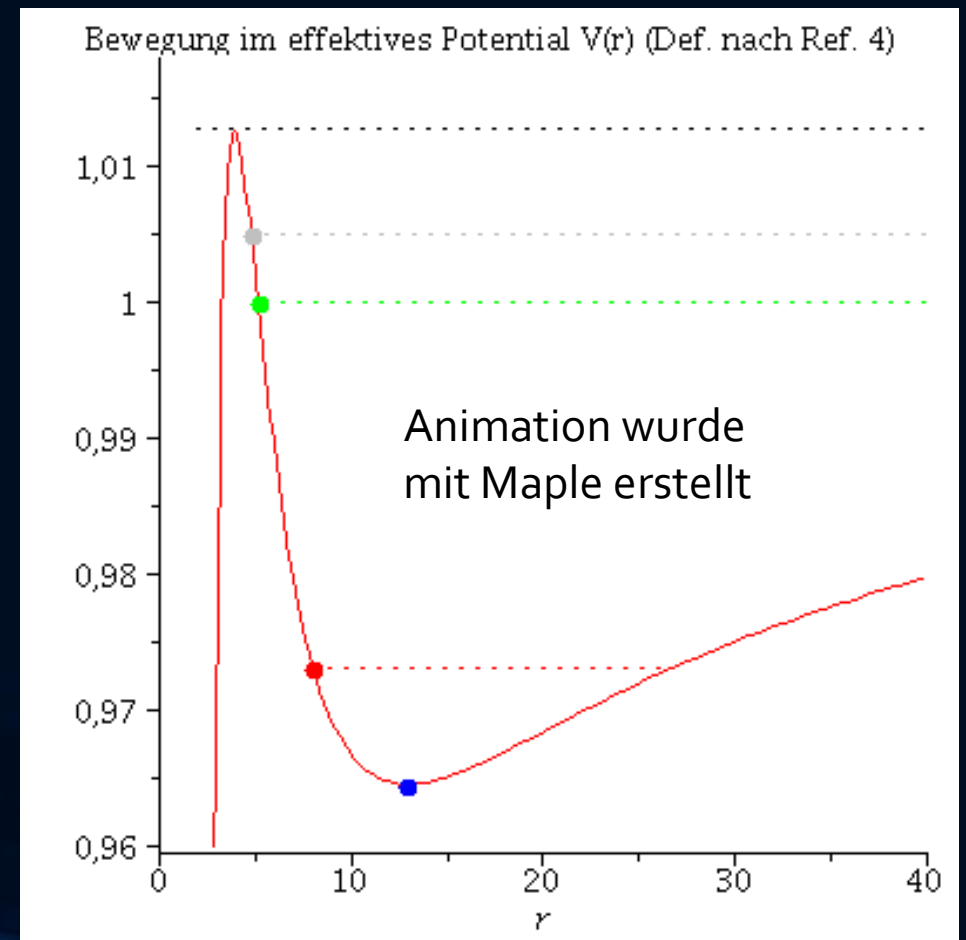
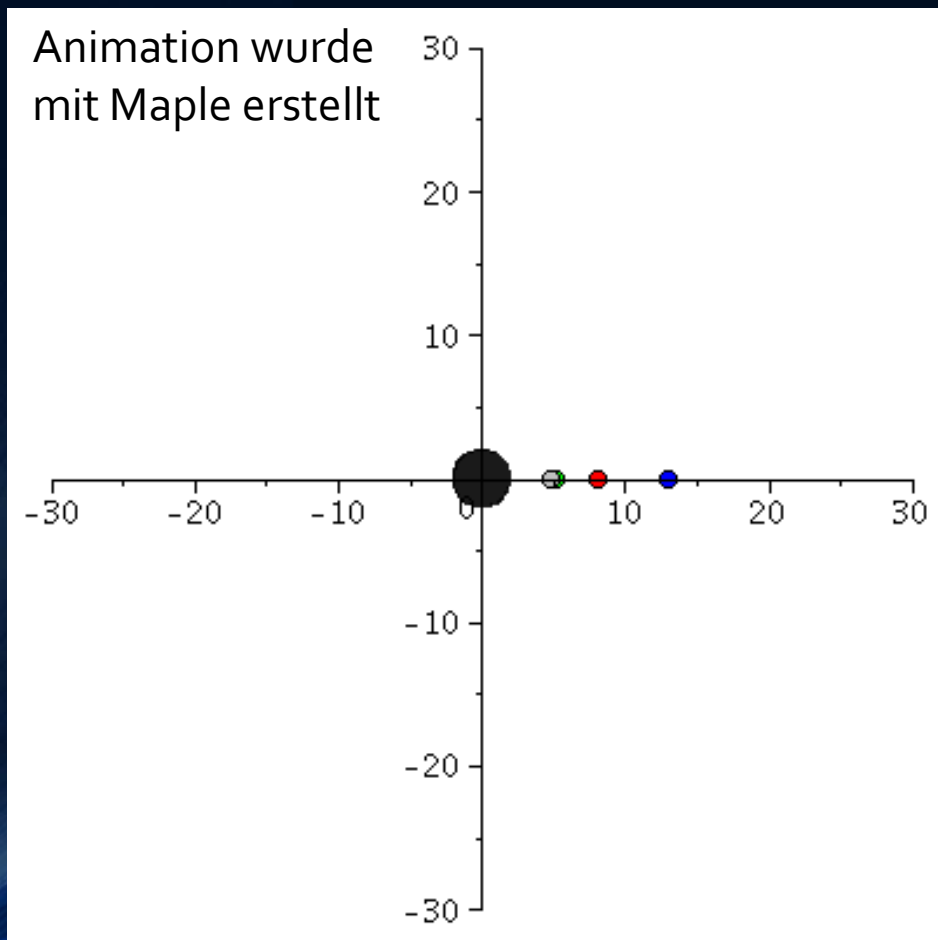
In der Literaturangabe 4 wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = e^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} .$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

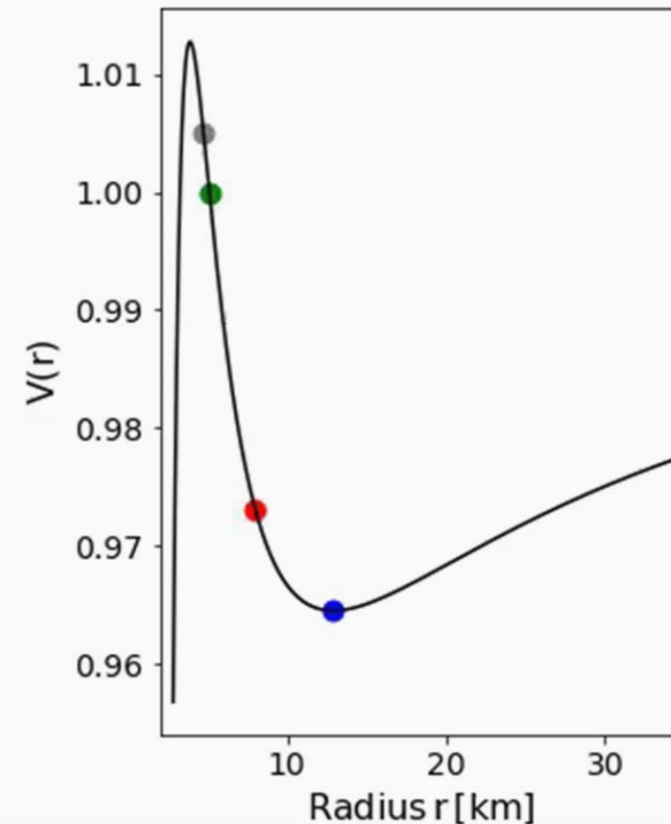
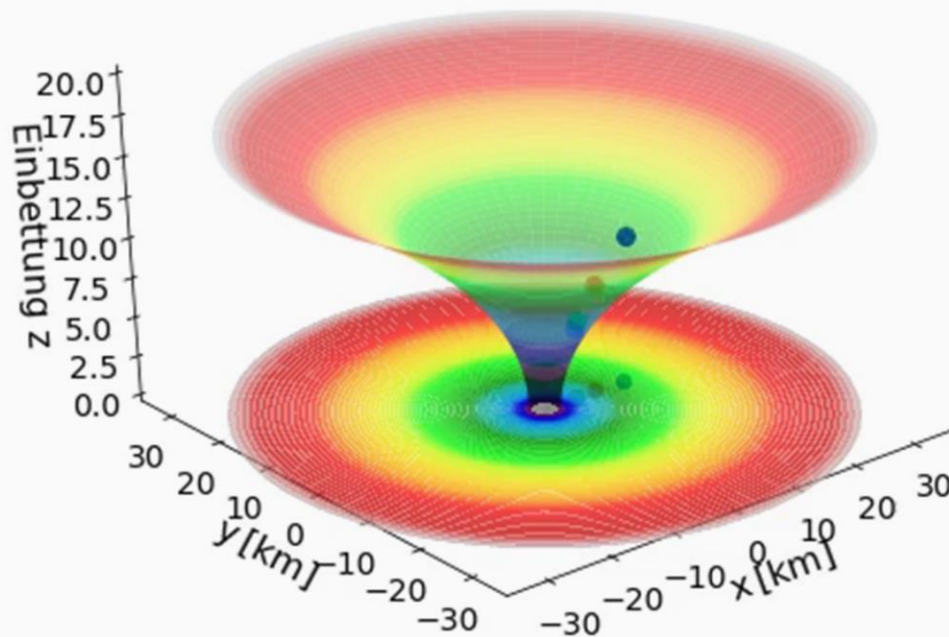
Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich

Animation wurde im Python Jupyter Notebook
„Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen
um ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch“ erstellt



C++: Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen und Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Einführung in die
Programmierung

C++

Python

für Studierende
der Physik

Im vorigen Unterpunkt hatten wir die Geodätengleichung (bzw. das im rechten Panel dieser Vorlesung dargestellte System von gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung) mittels der im Python Modul 'scipy' definierter Funktion "odeint(DGLsys, initialval, tauval)" numerisch gelöst. In diesem neuen Unterpunkt werden wir die Grundlagen der Programmiersprache C++ wiederholen und das numerische Lösen von Differentialgleichungen kurz erläutern (das Material basiert auf der Vorlesungsreihe Einführung in die Programmierung für Studierende der Physik (SS 2022)). In der nächsten Vorlesung werden wir dann die Geodätengleichung mittels eines C++ Programmes lösen. Das numerische Lösen von Differentialgleichungen ist ein mathematisch anspruchsvolles Thema und kann in dieser Vorlesung nicht im Detail erläutert werden. Die Geodätengleichung ist ein System von vier gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welches man in ein System von acht gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben kann. In diesem Unterpunkt beschreiben wir die Vorgehensweise, wie man solche Differentialgleichungen höherer Ordnung numerisch mittels eines C++ Programmes löst. In diesem Unterpunkt werden wir uns zunächst mit Systemen von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung befassen und dann das numerische Lösen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorstellen (näheres siehe Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen und Differentialgleichungen zweiter Ordnung).

Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst das numerische Lösen eines Systems von m -gekoppelten Differentialgleichungen (DGLs) erster Ordnung der Form

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dot{y}_2(t) &= \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dot{y}_3(t) &= \dots = \\ &\dots = \dots \\ \dot{y}_m(t) &= \frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad ,\end{aligned}$$

wobei die zeitliche Entwicklung der Vektorfunktion $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$ in den Grenzen $a \leq t \leq b$ gesucht wird. Die m -Funktionen $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$, $i \in [1, 2, \dots, m]$ bestimmen das System der DGLs und somit das Verhalten der gesuchten Funktion $\vec{y}(t)$. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Funktionen $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$ auf einer Teilmenge $\mathcal{D} (\mathbb{R}^{m+1} \supseteq \mathcal{D})$ kontinuierlich definiert sind und das so definierte Anfangswertproblem "well-posed" ist und eine eindeutige Lösung $\vec{y}(t)$ existiert. Bei gegebener Anfangskonfiguration

$$y_1(a) = \alpha_1, y_2(a) = \alpha_2, \dots, y_m(a) = \alpha_m$$

ist es dann numerisch möglich das System von gekoppelten DGLs zu lösen.

Einloggen

Benutzerkennung:

Passwort:

.....

Domäne:

ufm

Einloggen

The LearningOnline Network with CAPA



Benutzerkennung und Passwort haben Sie per E-Mail erhalten

Lon Capa Übungsaufgaben

- [Login-Hilfe](#)
- [Passwort vergessen?](#)
- [Helpdesk kontaktieren](#)
- [Kurs-/Community-Übersicht](#)

Domäne: ufm
Server: ufml1 (library)
Serverlast: 0.0 Prozent
 2.11.2-2017061214

[Home](#)
[Research](#)
[Contact](#)

[Programmieren mit OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Vorlesung SS 2020

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

(General Theory of Relativity on the Computer)

Die mathematisch anspruchsvollen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in Form von Differentialgleichungen analysiert. Im ersten Teil des Kurses erlernen die Studierenden die Verwendung von Computer-Algebra-Systemen (Maple und Mathematica). Die oft komplizierten und zeitaufwendigen Berechnungen der ART können mit Hilfe dieser Programme erleichtert werden. Diverse Anwendungen der Einstein-

 [Kursübersicht](#)

Besuchen Sie die [Kurs-/Community-Übersicht](#), um alle LON-CAPA-Kurse und -Communities der Institution "Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main" zu betrachten. Falls ein Kurs in der folgenden Liste Ihrer derzeitigen Kurse **nicht** angezeigt wird, können Sie sich in der Kursübersicht in diesen Kurs selbst eintragen, sofern die Selbsteintragung für diesen Kurs aktiviert ist.

Wählen Sie den gewünschten Kurs aus

	Benutzerrolle	Bereich	Anfang	Ende
Auswählen	Student/in	Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer (SS 2020) Kursüberblick	Do., 23. April 2020, 10:53:23 Uhr (CEST)	Mi., 20. Okt. 2021, 10:53:23 Uhr (CEST)

Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Aufgaben im Kurs allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

Aufgaben im Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple

[Berechnung von Christoffelsymbolen der Schwarzschild-Metrik](#)

[Berechnung des Riemann Tensors der Schwarzschild-Metrik](#)

[Probekörper fällt radial in ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Geodätische Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch](#)

[Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs](#)

[Berechnung eines Neutronensterns](#)

[Berechnung eines Weißen Zwergs](#)

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

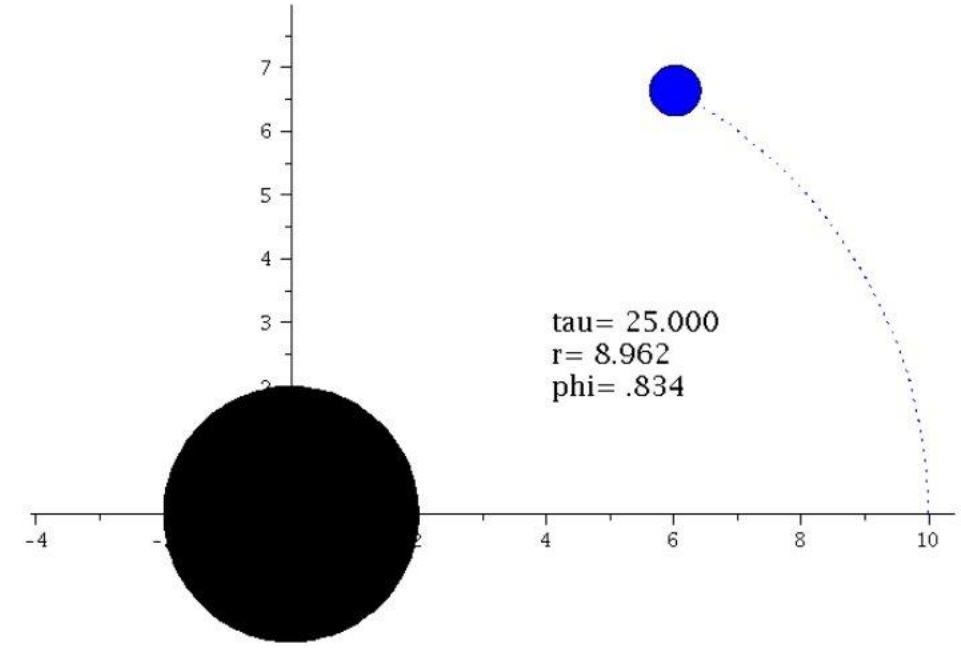
$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} ,$$

wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung numerisch und wählen Sie dabei die folgenden Anfangsbedingungen. Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=15.4$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0.031$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau=50$ befindet und geben Sie den Radius r und die polare Koordinate ϕ an.



$r =$, $\phi =$

Submit Answer Tries 0/20

[Main Menu](#) | [Contents](#) | [Grades](#)

[←](#) [→](#) Course Contents » ... » Aufgaben » **Geodätische Bewegung und das effektive Potential**

[Notes](#) [Evaluate](#) [Feedback](#) [Print](#) [Info](#)

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben. Die Art und Weise wie sich der Probekörper um das schwarze Loch bewegen wird mithilfe der radialen Komponente der Geodätengleichung und der Definition eines effektiven Potentials charakterisiert werden:

Maximum des Potentials bei r =

Minimum des Potentials bei r =

Tries 0/20

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

wobei:
$$V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r}$$

Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l: Drehimpuls pro Masse m und E: Energie pro Masse) charakterisiert. Die Masse des schwarzen Loches sei M=1 und der Drehimpuls des Probekörper sei l=4.72. Geben Sie an bei welchem Abstand r sich das Maximum und das Minimum des Potentials befindet. Was bedeutet das Minimum des Potentials?

[Post Discussion](#) [Send Feedback](#)

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

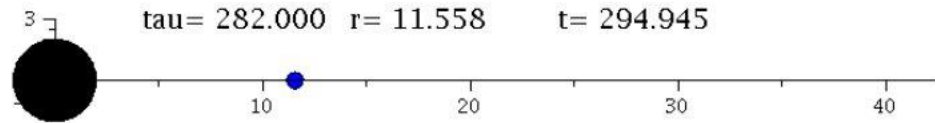
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$



wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung eines radial in ein schwarzes Loch einfallenden Probekörpers. Verwenden Sie die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=50.5$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau = 300 \approx 1$ [ms] befindet und geben Sie den Radius $r(300)$ in [km] an.