

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
04. MAI, 2017*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

4. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Vorlesungs-Materialien:
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/>
- Kurs auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Die Vorlesungstermine am 15.06. und 29.06.2018 müssen leider auf einen anderen Termin verschoben werden bzw. eine Vertretung wird organisiert.
- Freiwillige Übungstermine:
PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 14.00 bis 15.00 Uhr

Allgemeines zur Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung:

Kurze Wiederholung der letzten Vorlesung, Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen eines Probekörpers mit Maple lösen, Klassifizierung der möglichen unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials, Animationen und Schleifen in Maple

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \right. \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\ & \left. -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen

Zum Lösen des Systems von Differentialgleichungen müssen die Anfangsbedingungen des Probekörpers festgelegt werden

z.B. wo befindet sich der Probekörper zur Eigenzeit $\lambda=0$: $r(0)=10$

Die Anfangsbedingung für $t'(0)$ erhält man z.B. mittels der folgenden Bedingungen aus dem infinitesimalen Weglängenelement ds :

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{\text{dr=d}\theta=\text{d}\phi=0 \text{ bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Keine Anfangsgeschwindigkeit

Anfangsgeschwindigkeit in der äquatorialen Ebene:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{\text{dr=d}\theta=0, \theta=\pi/2 \text{ bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Während der Bewegung erhaltene Größen

Zwei Gleichungen der Geodätengleichung lassen sich wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const} \\ 2. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad , \end{aligned}$$

Die während der Bewegung erhaltenen Größen der Energie (E) und des Drehimpulses (l) lassen sich mittels des Viererimpulses definieren:

Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben ($\lambda = \tau$):

$$\begin{aligned} p_0 &= m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E \\ p_3 &= m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l \end{aligned}$$

Das effektive Potential

Mittels der radialen Gleichung läßt sich das effektive Potential definieren:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

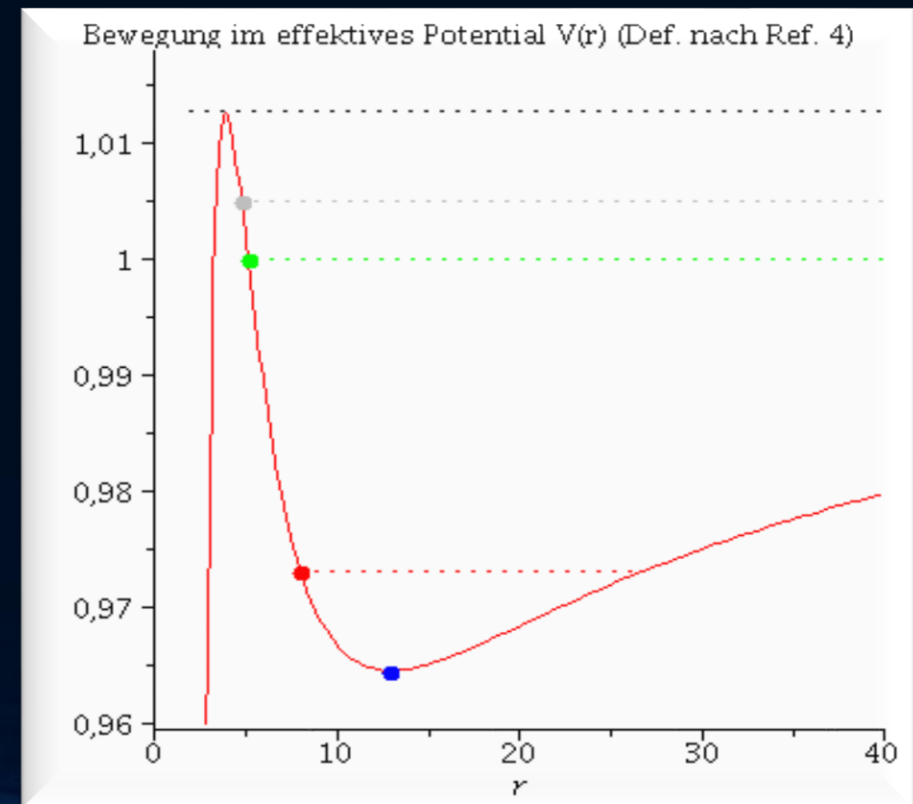
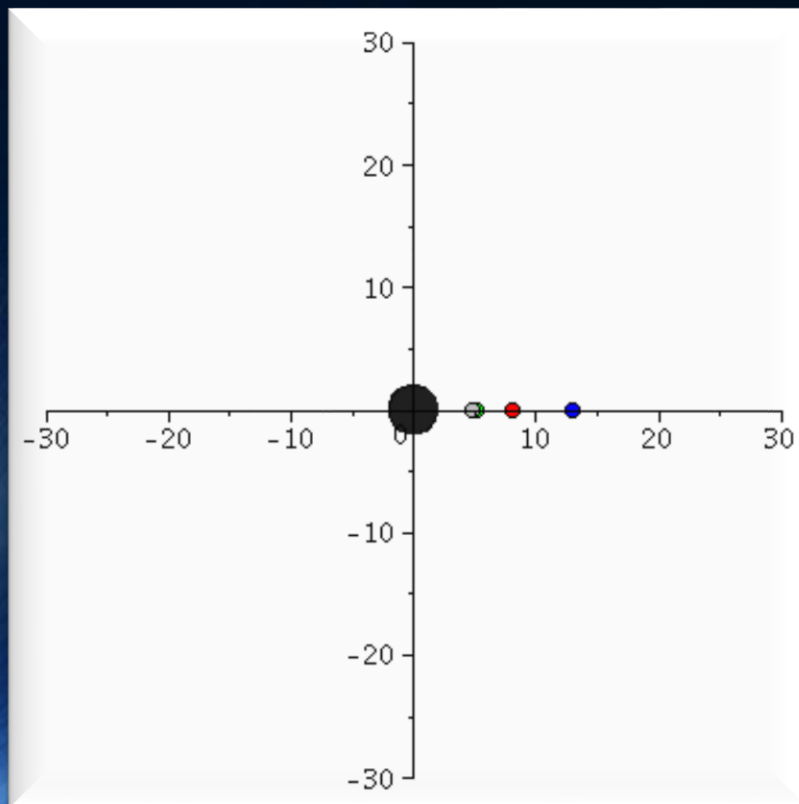
Alternative Definition (siehe Buch von Prof. Rezzolla):

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

3. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der zweiten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden eine Klassifizierung der Umlaufbahnen eines Probekörpers um ein schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse = 0) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Die Geodätengleichung und das effektive Potential $V(r)$

In der Version 1 des Maple-Worksheets des Teils I.2) der Vorlesung hatten wir erwähnt, dass sich die Geodätengleichung durch folgendes Variationsprinzip herleiten lässt,

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen ($L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$) ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad ,$$

wobei die $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit) darstellen.

```
> restart;  
with(tensor);  
with(plots);  
with(plottools);
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines schwarzen Lochs der Masse M in Schwarzschildkoordinaten:

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters lambda. Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen:

> eqns:=geodesic_eqns(coord, lambda, Cf2);

$$\begin{aligned}
 eqns := & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\lambda^2} t(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \\
 & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\
 & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\
 & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\
 & -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{2.1.2}
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in "General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby"), dass sich die erste und zweite Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

1. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const}$
2. Gleichung: $\frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \rightarrow r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} ,$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen E (Teilchenenergie pro Masse) und l (Drehimpuls pro Masse m) sich aus der Definition des Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben (Beachte: Die im folgenden benutzten einzelnen Rechenschritte gelten speziell nur für die Schwarzschildmetrik

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in "General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby"), dass sich die erste und zweite Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const}$$

$$2. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad ,$$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen E (Teilchenenergie pro Masse) und l (Drehimpuls pro Masse m) sich aus der Definition des Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben (Beachte: Die im folgenden benutzten einzelnen Rechenschritte gelten speziell nur für die Schwarzschildmetrik und desweiteren ist $\lambda = \tau$):

$$p_0 = m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E$$

$$p_3 = m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l$$

Wir lassen nur ebene Bewegungen zu ($\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$) und setzen $M=1$:

```
> setM:=1:
eq1:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[1]):
eq2:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[2]):
eq3:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[3]):
eq4:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[4]):
eq1:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq1);
eq2:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq2);
eq3:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq3);
eq4:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq4);
```

$$\begin{aligned}
 eq1 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(\lambda) (-r(\lambda) + 2)} = 0 \\
 eq2 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r(\lambda)} = 0 \\
 eq3 &:= 0 = 0 \\
 eq4 &:= \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) - \frac{(-r(\lambda) + 2) \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r(\lambda)^3} + \frac{\left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(\lambda) (-r(\lambda) + 2)} + (-r(\lambda) + 2) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

In Abhängigkeit von den Anfangswerten können unterschiedliche Bahnen der Bewegung entstehen. Wir wählen zunächst als Beispiel die Anfangswerte einer geschlossenen Bahn:

Zur Zeit t=0 sei der fallende Körper bei einem Radius von r=10=5*(Schwarzschildradius), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei in radialer Richtung dr=0 und in phi-Richtung dphi=0.036. Wir beschreiben die Bewegung aus der Sichtweise eines im Unendlichen ruhenden Beobachters.

```

>
r0:=10:
t0:=0:
phi0:=0:
theta0:=Pi/2:
dr0:=0:
dphi0:=0.041:
dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)*sqrt(1+r0^2*dphi0^2)):
dtheta0:=0:
    
```

In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle

In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle
3. Allgemeine Relativitätstheorie by Torsten Fließbach
4. Relativistic hydrodynamics by Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti

Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls pro Masse m ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und E : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potential erfolgt mittels der radialen, 4. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1.-3. das effektive Potential wie folgt:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

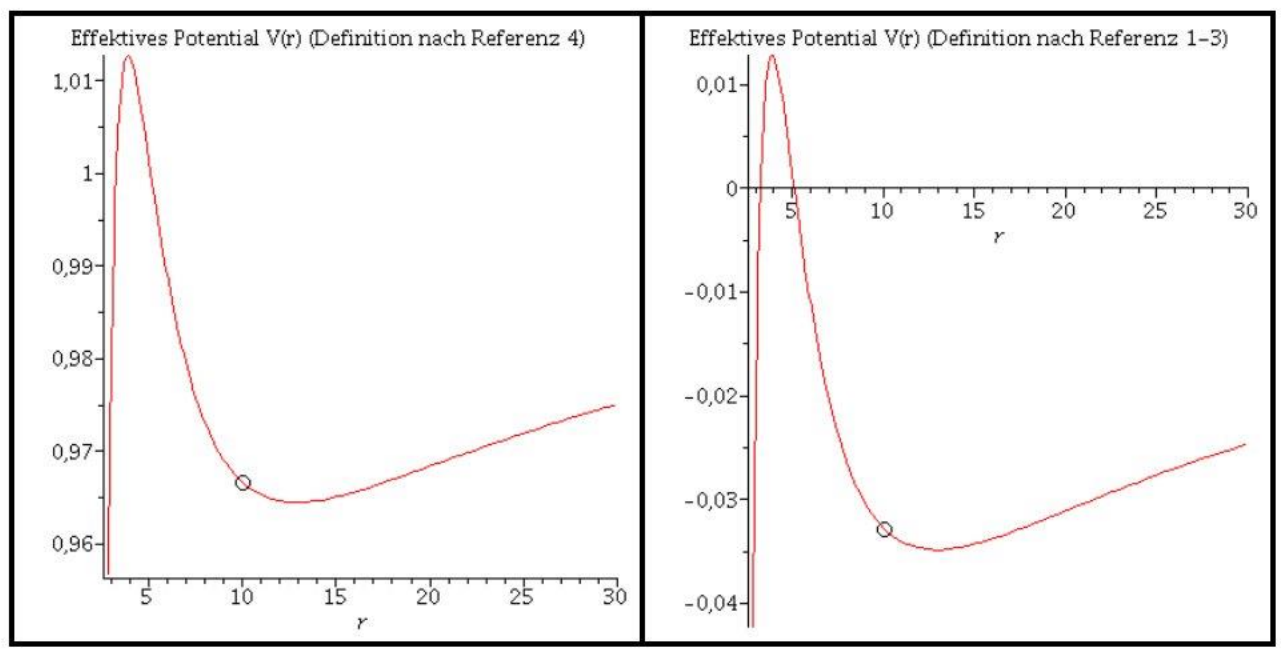
In der Literaturangabe 4 wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

Die folgende Abbildung zeigt (in der Nomenklatur des 4. Buches (Diagramm links) bzw. des 1. bis 3. Buches (Diagramm rechts)) das effektive Potential als Funktion des Radius bei den obigen gewählten Anfangswerten:

`setl:=r0^2*dphi0;`

$$setl := 4.100$$
$$setE := 0.9666850568$$
$$V_{effFB} := (r, M, l) \rightarrow -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2} - \frac{M l^2}{r^3}$$
$$V_{effRez} := (r, M, l) \rightarrow \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \sqrt{1 + \frac{l^2}{r^2}}$$



Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

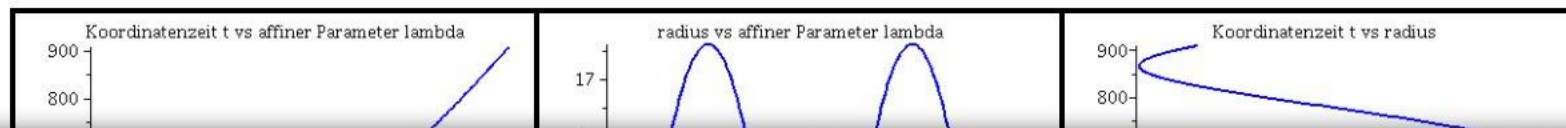
Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```
> Loes:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure);
```

$$\begin{aligned} \text{Loes} := & \left[\lambda = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \phi(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \right. \\ & \frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, r(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \\ & \frac{d}{d\lambda} r(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, t(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc}, \\ & \left. \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) = \text{proc}(\text{lambda}) \dots \text{end proc} \right] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

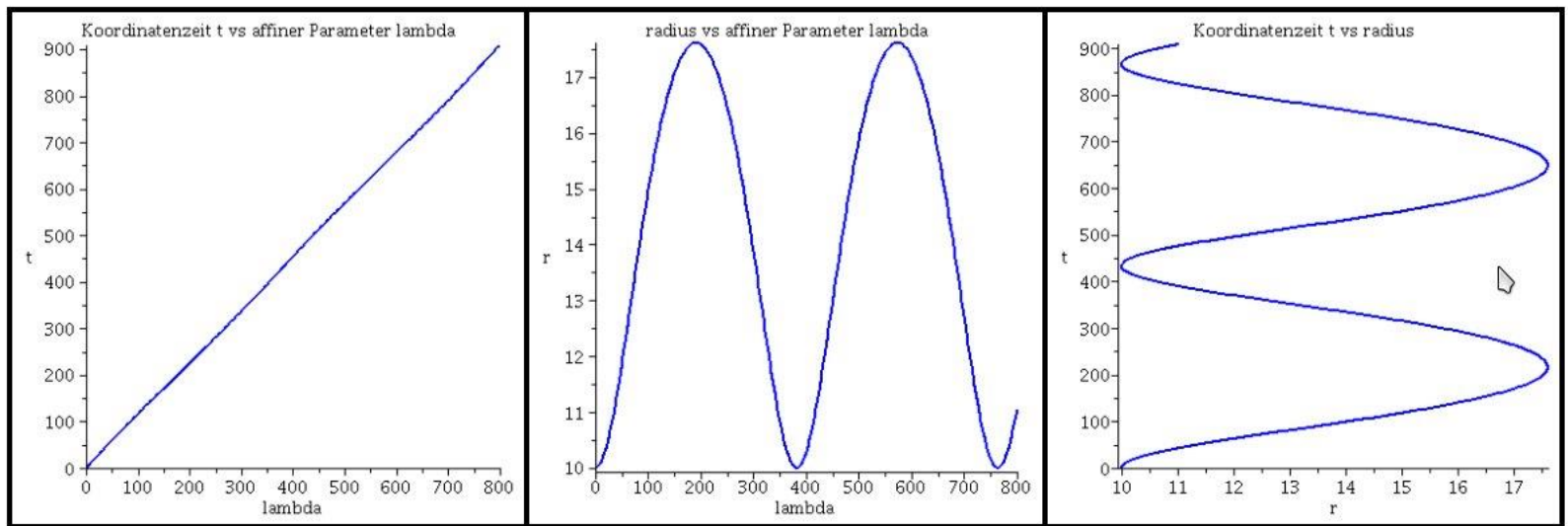
Grafische Veranschaulichung der Lösung:

```
> lend:=800:  
   lendn:=35.12:  
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter  
lambda");  
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda");  
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius");  
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,Plot3]));
```



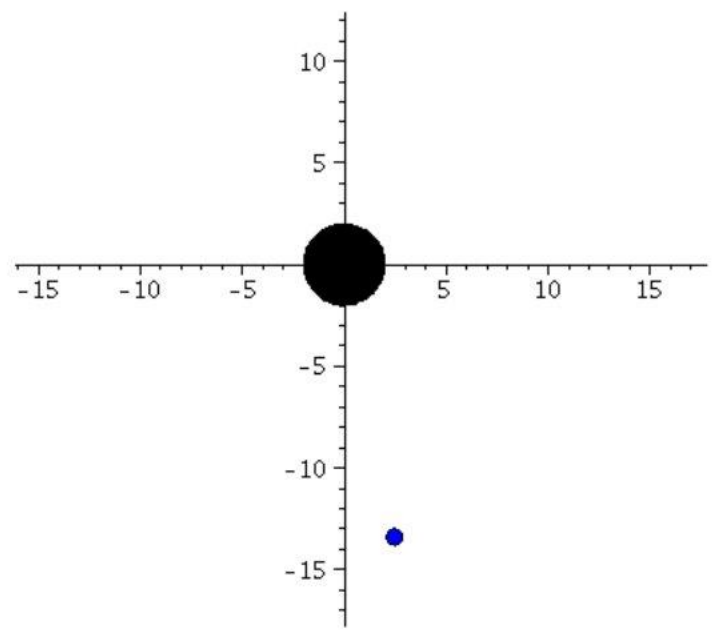
Grafische Veranschaulichung der Lösung:

```
> lend:=800:  
lendn:=35.12:  
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter  
lambda"):  
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda"):  
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius"):  
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,Plot3]));
```



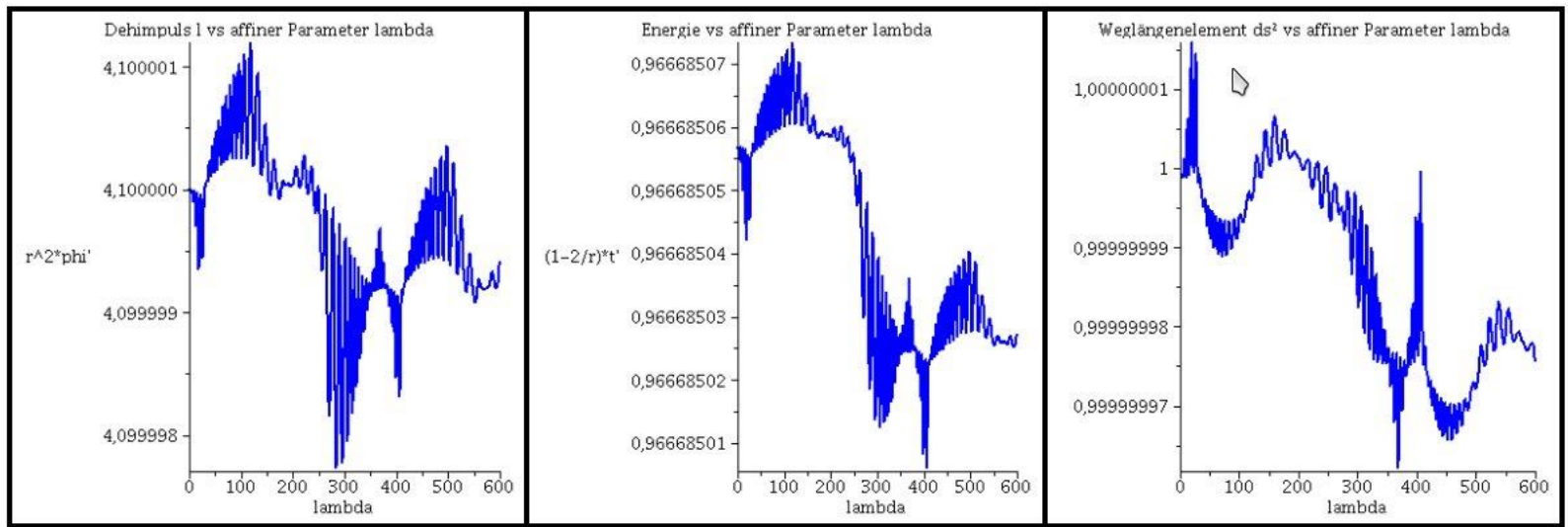
```
>
frames:=300:
lend:=600:
BH:=display(disk([0,0],2,color=black)):
for i from 0 by 1 to frames do
Koerper[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)[2])),rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.4,color=blue)):
Ani[i]:=display({Koerper[i],BH});
od:

> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained);
```

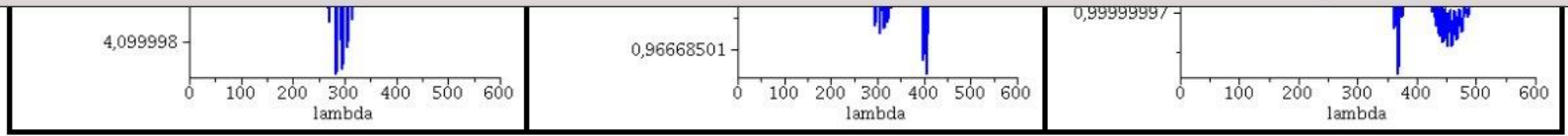


Während der Bewegung erhaltenen Größen (l: Drehimpuls pro Masse m, E: Energie pro Masse und Weglängenelement ds^2):

```
> Plot4:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)^2*diff(phi(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Dehimpuls l vs affiner Parameter lambda");  
Plot5:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*diff(t(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Energie vs affiner Parameter lambda");  
Plot6:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*(diff(t(lambda), lambda))^2 - 1/(1-2/r(lambda))*(diff(r(lambda), lambda))^2 - r(lambda)^2*(diff(phi(lambda), lambda))^2],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Weglängenelement ds^2 vs affiner Parameter lambda");  
display(Matrix(1,3,[Plot4,Plot5,Plot6]));
```

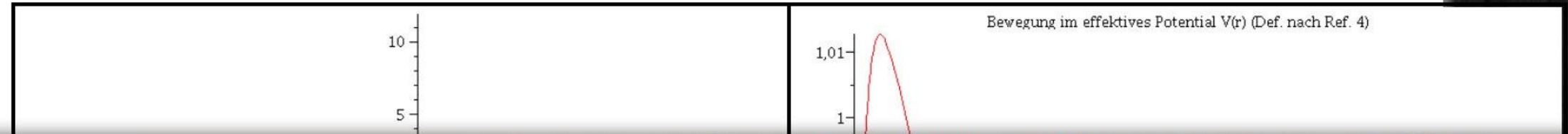


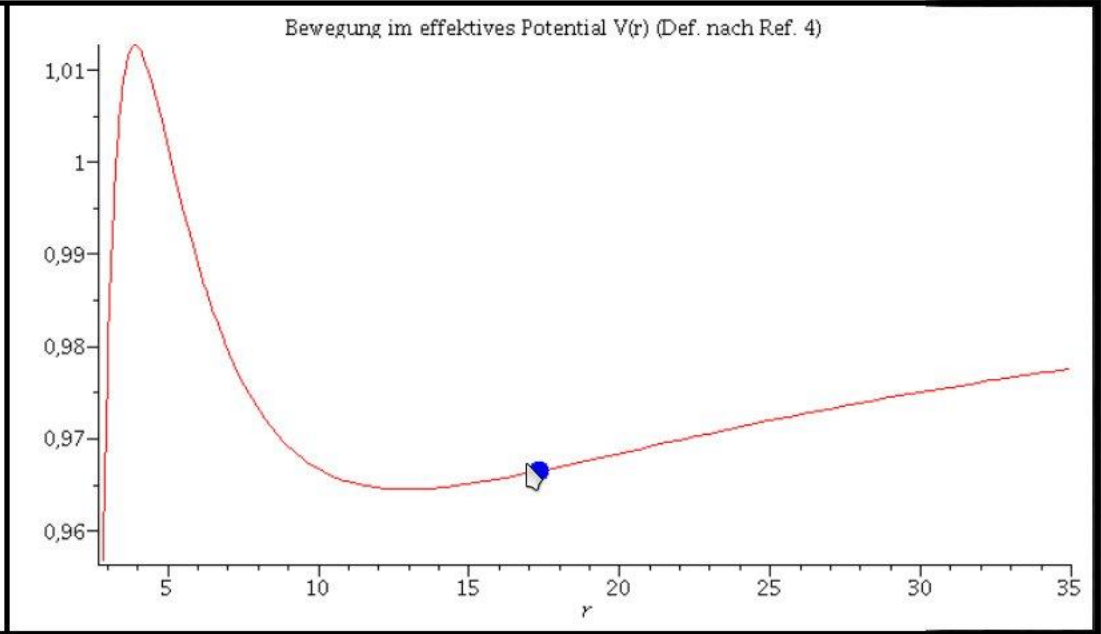
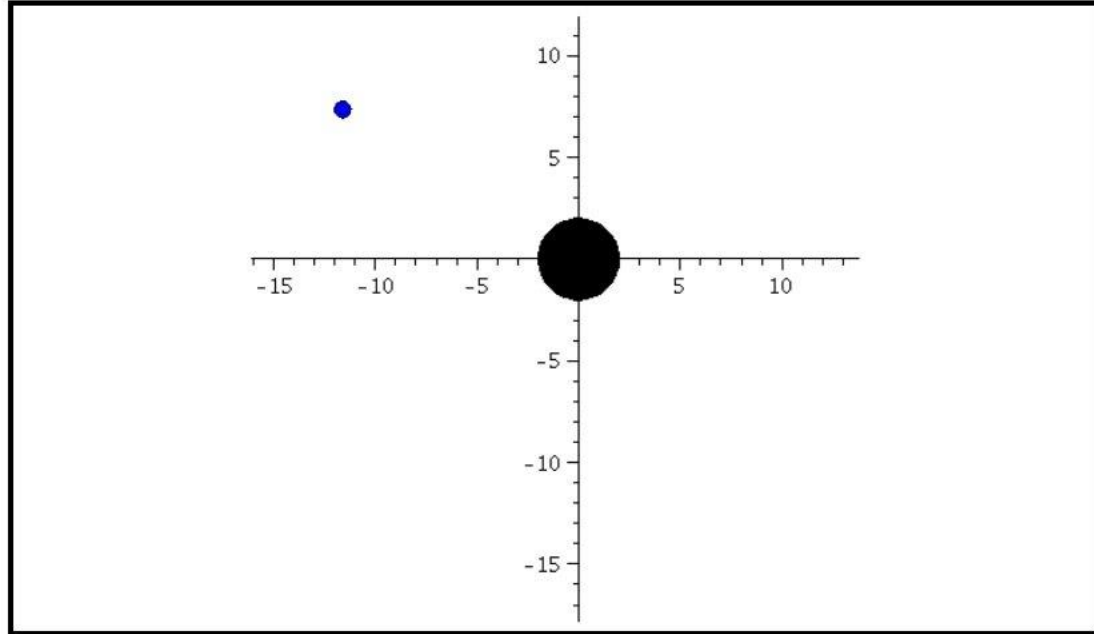
Animation der Bewegung im effektiven Potential:



Animation der Bewegung im effektiven Potential:

```
> frames:=300:  
  lend:=600:  
  Pot:=plot(VeffRez(r,1,setl),r=2.85..35):  
    for i from 0 by 1 to frames do  
      Koerper[i]:=pointplot({[rhs(Loes(i*lend/frames)[4]), setE]}, symbol=solidcircle,symbolsize=20,color=blue):  
      Ani1[i]:=display({Pot,Koerper[i]});  
    od:  
  
> display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true):  
  
> Animat1:=display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained):  
  Animat2:=display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true,title="Bewegung im effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 4)":  
    display(Array([Animat1,Animat2])));
```





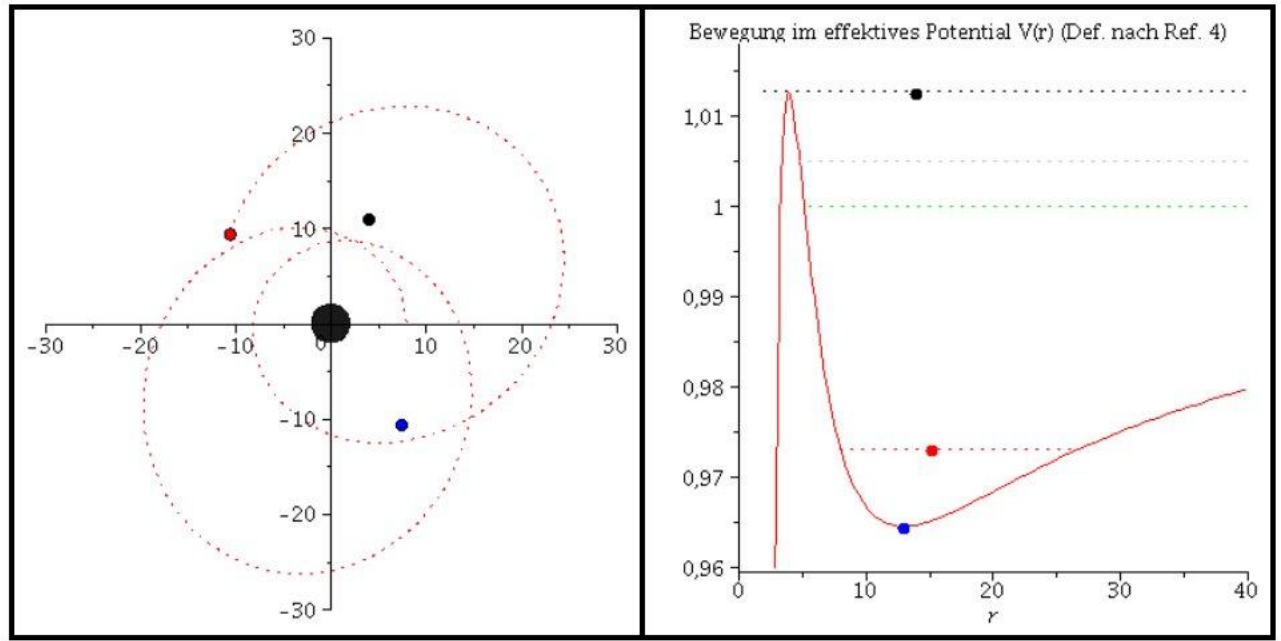
>

Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen

Im folgenden werden die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch klassifiziert. Neben den gebundenen kreisförmigen (A: blau) und elliptischen (B: rot) Bahnen, den parabolischen (C: grün) und hyperbolischen (D: grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz) möglich. Wir setzen $M=1$ und $l=4.1$.

>

t0:=0:
phi0:=0:
theta0:=Pi/2:
dtheta0:=0:



>

Die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch (gebunden kreisförmige (A: blau) und elliptische (B: rot) Bahn, parabolische (C: grün) und hyperbolische (D: grau) Bahnverläufe bzw. eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz)) sind in der obigen Abbildung dargestellt. Bei der elliptische, roten Bahn erkennt man hierbei gut den allgemeinrelativistem Effekt der Periheldrehung, d.h. der nächste Punkt (der Perihel) und der am weitesten entfernte Punkt (der Aphel) vom Zentrum des schwarzen Lochs betrachtet, ändert seine Position und rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn in ϕ -Richtung.

>

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines

Allgemeine Relativitätstheorie einfach dargestellt

In autumn 2016, the series of video portraits of Hessian scientists was launched by the "Hessisches Kompetenzzentrum für Hochleistungsrechnen". The video portrait by Prof. Dr. Luciano Rezzolla can be found on the following link:

https://www.hpc-hessen.de/fileadmin/hpc/red/video/hkhlr_ffm_rezzolla-1.mp4

Public lectures have been a matter for the Polytechnic Society in Frankfurt for almost 200 years. In the lecture series "Discovering the Future" Prof. Dr. H. Stöcker spoke about Neutronenstern Kollisionen. The presentation can be found on the following link:

<https://www.youtube.com/embed/gSPfTTTR3Io>

Upcomming events: Allgemeine Relativitätstheorie einfach dargestellt

14. Mai 2018, 19.30 Uhr: Vortrag in der Denkbar
www.denkbar-frankfurt.de

Allgemeine Relativitätstheorie *Einsteins schönster Geniestreich auf dem Prüfstand*

Als Albert Einstein im Jahre 1915 die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) an der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften vorstellte, glaubten noch wenige Physiker an seine neue, revolutionäre Theorie. Die ART besagt, dass die Ursache der Gravitationskraft in einer Verformung der raumzeitlichen Struktur begründet ist und heutzutage bezeichnen viele Physiker Einsteins mathematisch elegant formulierte Idee als "die schönste Gleichung der Physik". Während einer Sonnenfinsternis im Jahre 1919 gelang es die Ablenkung von Licht in der gekrümmten Raumzeit der Sonnenumgebung zu beobachten und Einstein wurde schlagartig berühmt. Weitere Vorhersagen der ART konnten in den folgenden Jahrzehnten überprüft und bestätigt werden, wobei eine der grundlegenden Folgerungen der ART, die Existenz von Raumzeit-Wellen (Gravitationswellen), lange Zeit nicht direkt nachgewiesen werden konnte. Schließlich, im Jahre 2015 konnte die erste Raumzeit-Welle mittels zweier hochempfindlicher Gravitationswellendetektoren nachgewiesen werden und im Jahre 2017 wurde diese Sensation mit dem Nobelpreis für Physik geehrt. Die grundlegenden Konzepte und Folgerungen der ART sollen in diesem Vortrag in allgemeinverständlicher, unterhaltsamer Weise illustriert werden. So werden z.B. die einzelnen Phasen einer Gravitationswellen erzeugende Neutronensterne-Kollision anhand eines Sammelsuriums einzelner Gesellschaftstänze veranschaulicht und die Eigenschaften von schwarzen Löchern mittels des Reichstagsgebäudes illustriert.

08. Juni 2018: Night of Science 2018
Tanz der Neutronensterne

Physik der sozio-ökonomischer Systeme mit dem Computer von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)

Vorlesung auch wieder im nächsten Semester



Physik sozio-ökonomischer Systeme mit dem Computer (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)
Vorlesung WS 2017/2018, Fr. 15-17.00 Uhr, PC-Pool 01.120

Zusätzlich zur Vorlesung werden ab dem 27.10.2017 freiwillige Übungstermine eingerichtet, die jeweils freitags, eine Stunde vor der Vorlesung im PC-Pool 01.120 stattfinden (Fr. 14-15.00 Uhr).

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in das interdisziplinäre Forschungsfeld der *Physik sozio-ökonomischer Systeme*. In sozio-ökonomischen Systemen, wie z.B. bei Finanzmärkten, sozialen Netzwerken, Verkehrssystemen oder wissenschaftliche Kooperationsnetzwerken, sind die dem System zugrunde liegenden Akteure ständigen Entscheidungssituationen ausgesetzt, wobei der Erfolg und die Auswirkung der individuell gewählten Strategie von den Entscheidungen der anderen beteiligten Akteuren abhängt. Die (evolutionäre) Spieltheorie und die Physik komplexer Netzwerke stellen die beiden Grundsäulen der theoretischen Beschreibung und mathematischen Formulierung solcher Systeme dar. Im ersten Teil des Kurses werden die grundlegenden Konzepte der Spieltheorie thematisiert und die Studierenden erlernen, unter Verwendung von Computeralgebra-Systemen (Maple und Mathematica) deren Anwendung auf diverse Spielklassen. Neben den endlichen Zweipersonen-Spielen und N-Personen-Spielen wird auch auf die evolutionäre Entwicklung ganzer Spieler-Populationen eingegangen