

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*ZOOM ONLINE MEETING
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
07. MAI, 2021*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die Übungstermine auch in diesem Semester nur Online statt.

4. Vorlesung

Wiederholung: 3. Vorlesung

Vorlesung 3

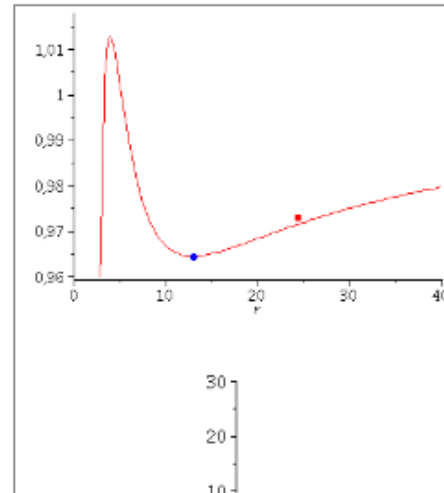
Bevor wir die Geodätengleichung und die Klassifikation möglicher Bahnen von Probekörpern in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit mittels eines definierten effektiven Potentials in einem Jupyter Notebook behandeln, wird eine kurze Einführung in das Computeralgebra-System Maple gegeben. Mithilfe der kommerziellen Computeralgebra-Systeme Maple und Mathematica kann man ebenfalls die komplizierten Berechnungen der tensoriellen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie durchführen und numerische Simulationen der entstehenden Differentialgleichungen erstellen.

Das in dieser Vorlesung inhaltlich behandelte Thema (die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch) ist ein astrophysikalisch sehr relevantes Problem. Schon Jahre bevor die ersten Bilder eines schwarzes Lochs entstanden, galt es schon als so gut wie bestätigt, dass im Zentrum unserer Galaxie ein superschweres schwarzes Loch existiert und Reinhard Genzel (Physik Nobelpreisträger 2021) verfolgt schon seit Jahrzehnten die Bewegung einzelner, sogenannter S-Sterne um dieses schwarzes Loch. Neben diesen aktuellen Erkenntnissen, gilt die Perihel-Drehung des Merkur als ein, durch die allgemeine Relativitätstheorie verursachter Effekt. Obwohl die Bewegung der Planeten unseres Sonnensystems um unser Zentralgestirn (die Sonne) ja sicherlich keine Bewegung um ein schwarzes Loch darstellt, können die Gleichungen der Planetenbewegungen in guter Approximation als solche beschrieben werden (siehe Birkhoff-Theorem).

Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

Analytische Berechnungen und numerische Simulationen im Bereich der Allgemeinen Relativitätstheorie können auch mittels des Computeralgebra-Systems Maple durchgeführt werden (siehe [alter Teil I der Vorlesung](#)). Die entsprechenden Maple Worksheets der bisher besprochenen Inhalte finden Sie unter den folgenden Links:

- [Einführung in Maple](#)
- [Download Maple Worksheet](#)
- [Grundlegende Größen der Allgemeinen Relativitätstheorie](#)



Vorlesung 3

Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht. Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\delta \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = 0$$

, wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art und λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ des Probekörpers). In der dritten Vorlesung werden wir die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit näher betrachten, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Die Geodätengleichung stellt ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen dar

Die Geodätengleichung

Ein System gekoppelter nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

, wobei wir wieder ein sphärisches Koordinatensystem benutzen ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Die Geodätengleichung stellt ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen dar

$$\begin{aligned}\frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad ,\end{aligned}$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit τ), t , r , θ und ϕ die Koordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

1. *General relativity : An introduction for physicists* von M. P. Hobson, G. P. Efstathiou und A. N. Lasenby
2. *Gravity : An introduction to Einstein's general relativity* von James B. Hartle
3. *Allgemeine Relativitätstheorie* von Torsten Fließbach
4. *Relativistic hydrodynamics* von Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti

Während der Bewegung erhaltene Größen

Energie und Drehimpuls des Probekörpers

[Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby](#)), dass sich die erste und vierte Gleichung des Systems der Differentialgleichungen der Geodätengleichung in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \right] = 0$$

$$\rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = e = \text{const}$$

$$4. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$\rightarrow r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\tau} = l = \text{const} \quad ,$$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen e (Teilchenenergie pro Masse, $e = \frac{E}{m}$) und l (Drehimpuls pro Masse m , $l = \frac{L}{m}$) sich aus der Definition des Viererimpulses

$p_\mu = m u_\mu = m g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = m \left(g_{tt} \frac{dt}{d\tau}, g_{rr} \frac{dr}{d\tau}, g_{\theta\theta} \frac{d\theta}{d\tau}, g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \right)$ ergeben (Voraussetzung:

diagonale Form der Metrik). Für die Schwarzschildmetrik erhält man:

$$p_t = p_0 = m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m e$$

$$p_\phi = p_3 = m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l$$

1. *General relativity : An introduction for physicists* von M. P. Hobson, G. P. Efstathiou und A. N. Lasenby
2. *Gravity : An introduction to Einstein's general relativity* von James B. Hartle
3. *Allgemeine Relativitätstheorie* von Torsten Fließbach
4. *Relativistic hydrodynamics* von Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti

Das effektive Potential $V(r, M, l)$

Die Klassifikation möglicher Bahnen von Probekörpern in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit kann mittels eines definierten effektiven Potentials illustriert werden. Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls pro Masse m ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und e : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potential erfolgt mittels der radialen, 2. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1-3 (siehe Angaben oben) das effektive Potential wie folgt:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} .$$

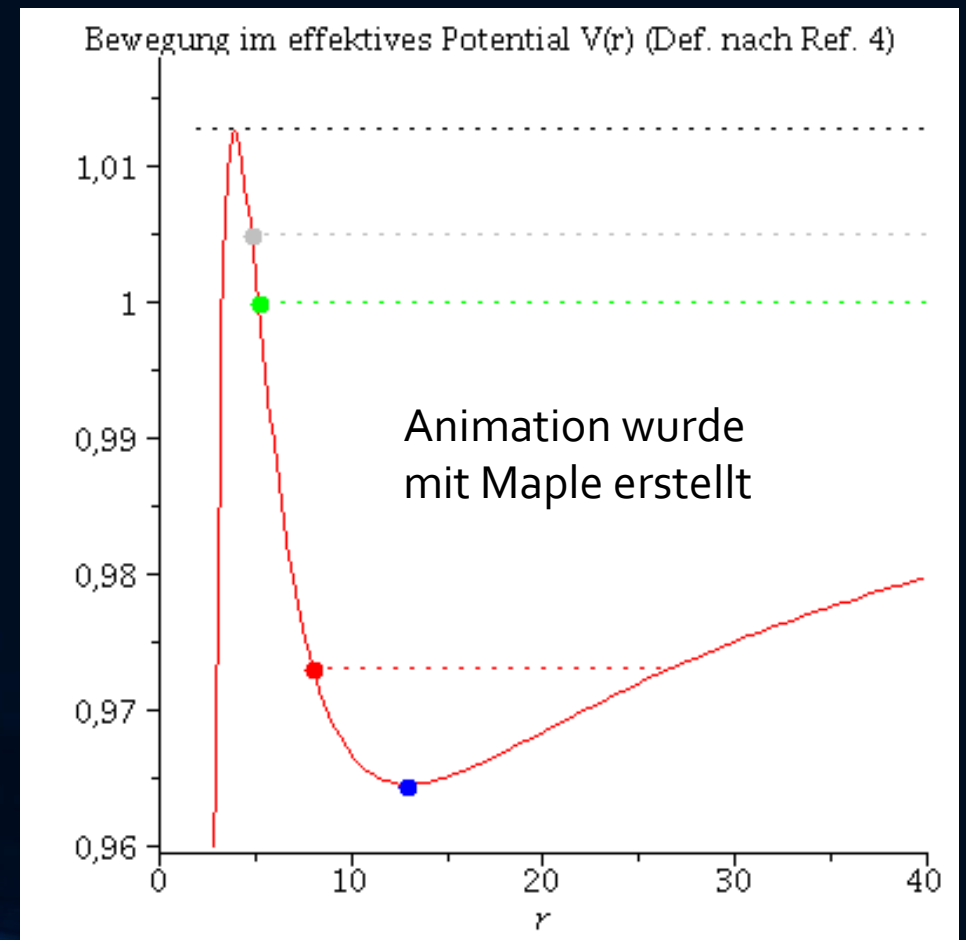
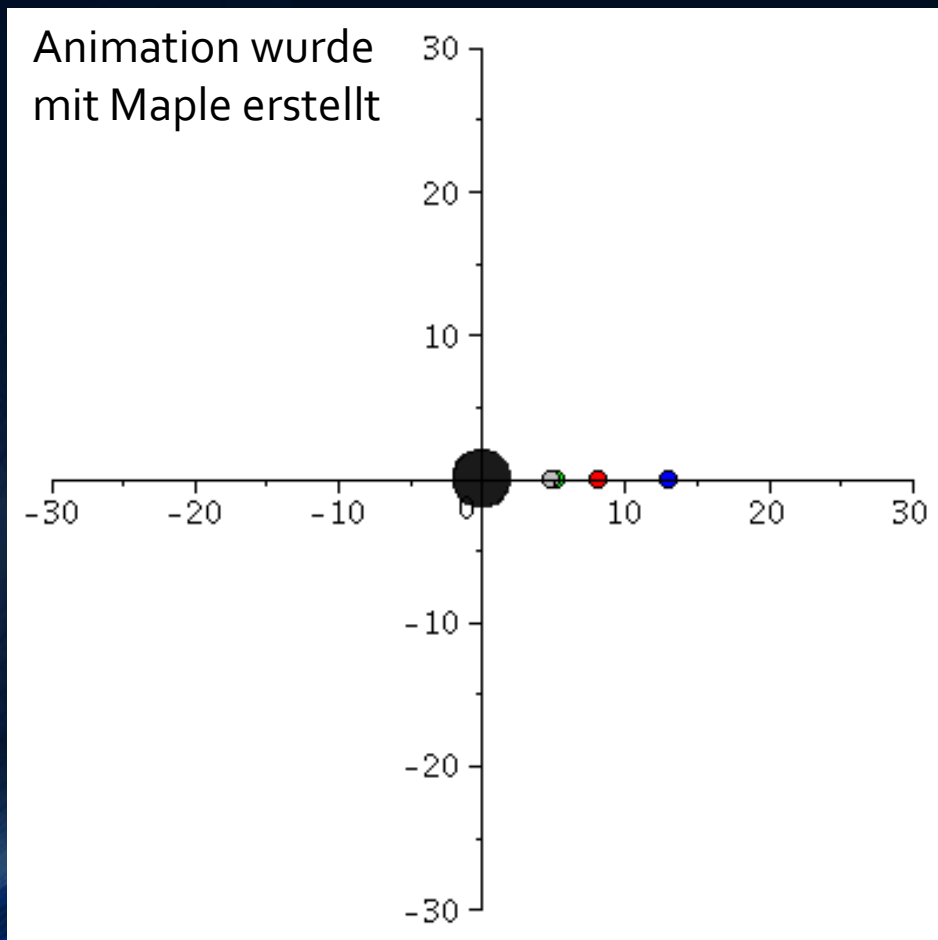
In der Literaturangabe 4 wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

$$2. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = e^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} .$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

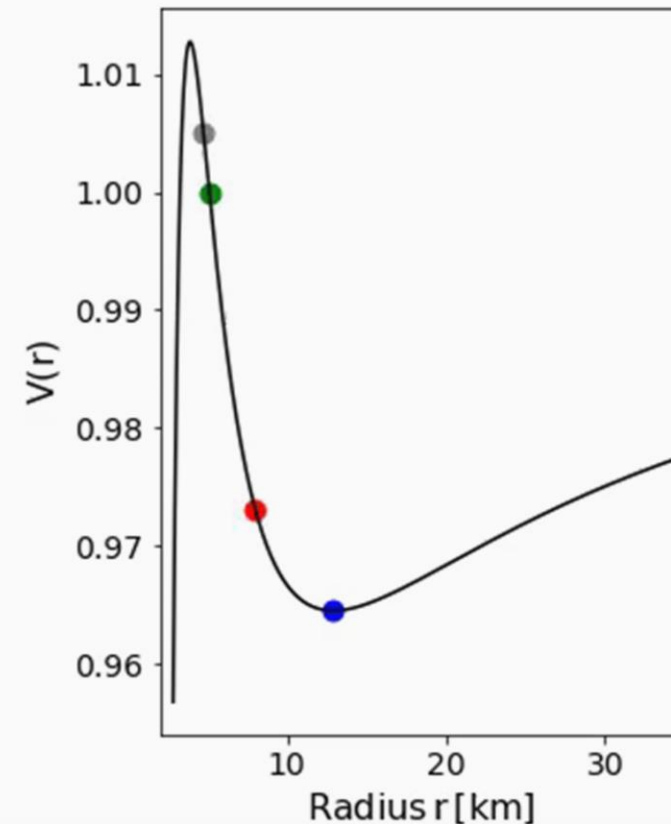
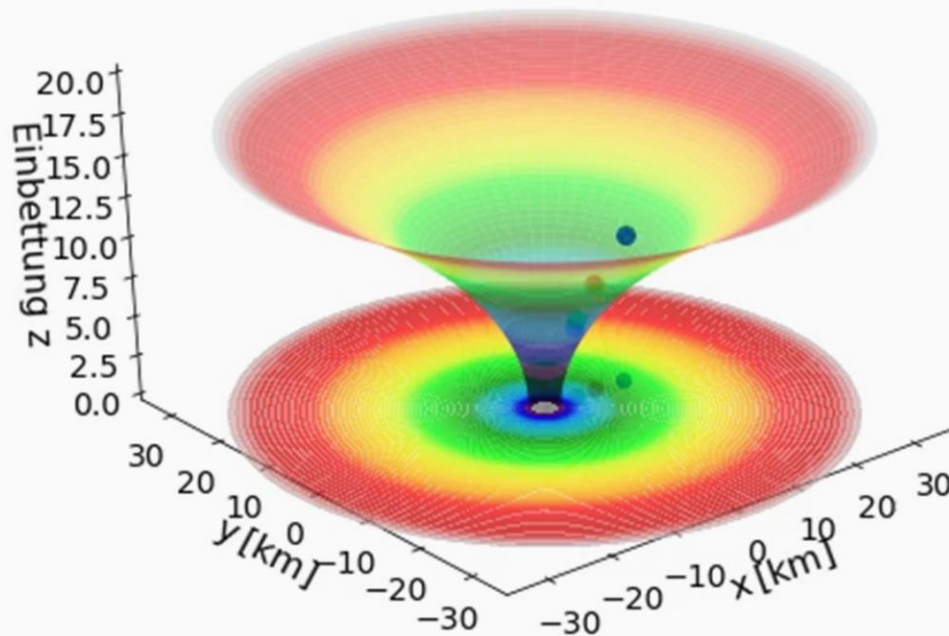
Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

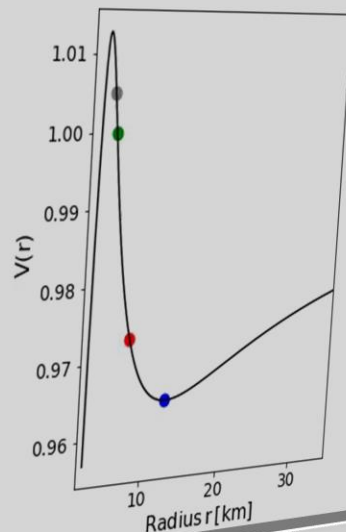
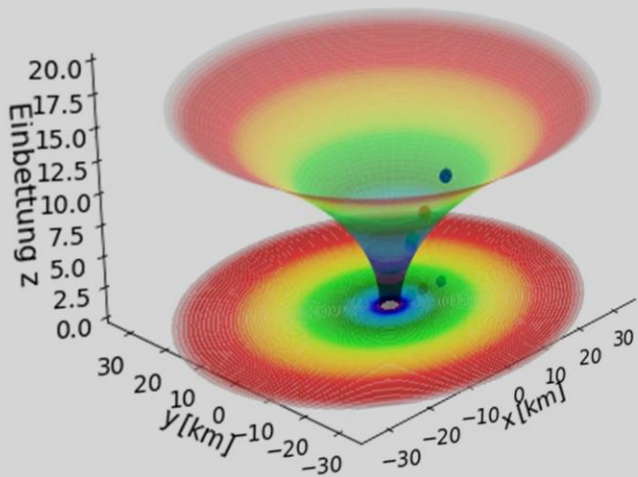
Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich

Animation wurde im Python Jupyter Notebook
„Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen
um ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch“ erstellt



Jupyter Notebook

Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen um ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch



Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Teil II: Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen

Im Folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse Probekörper $m \ll M$ Masse schwarzes Loch) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten Raumzeit, vollzieht.

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \rightarrow \text{Extremal}$$

Sie lässt sich demnach durch folgendes Variationsprinzip herleiten:

$$d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

wobei sich dann die Geodätengleichung mittels der Euler-Lagrange Gleichungen $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$, bzw. alternativ $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ergibt

$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ sind die Christoffel Symbole zweiter Art

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum Herunterladen



- Startseite
- Lehren & Lernen
- Kursangebote
- Allgemeine Relativität...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit
 - Literaturverzeichnis
 - Einschreibung
 - Kursinhalt
 - Vorlesungsaufzeichnung
 - Aufgaben
 - Programme
 - Einführung in Jupyter Notebook:
 - Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer
 - Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik
 - Radialer Fall eines Probekörpers
 - Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen
 - Jupyter Notebooks
 - Mitteilungen
 - Forum
 - Gruppen



Sommersemester 2021
Allgemeine Relativitätstheorie
Verantwortliche/r: Matt
Allgemeine Relativitätstheorie

In dieser Vorlesung wird...
Im ersten Teil des Kurses...
komplizierten und zeitlich...
Einstein- und Geodätengleichungen...
implementiert, quasi...
numerischen Berechnungen...
Programmierkenntnis...
Zusätzlich wird hierbei...
des Kurses werden zu...
Inhaltlich wird hierbei...
Probleme behandelt...
Neutronenstern zu ein...
der gesamten interak...

Weitere Informationen

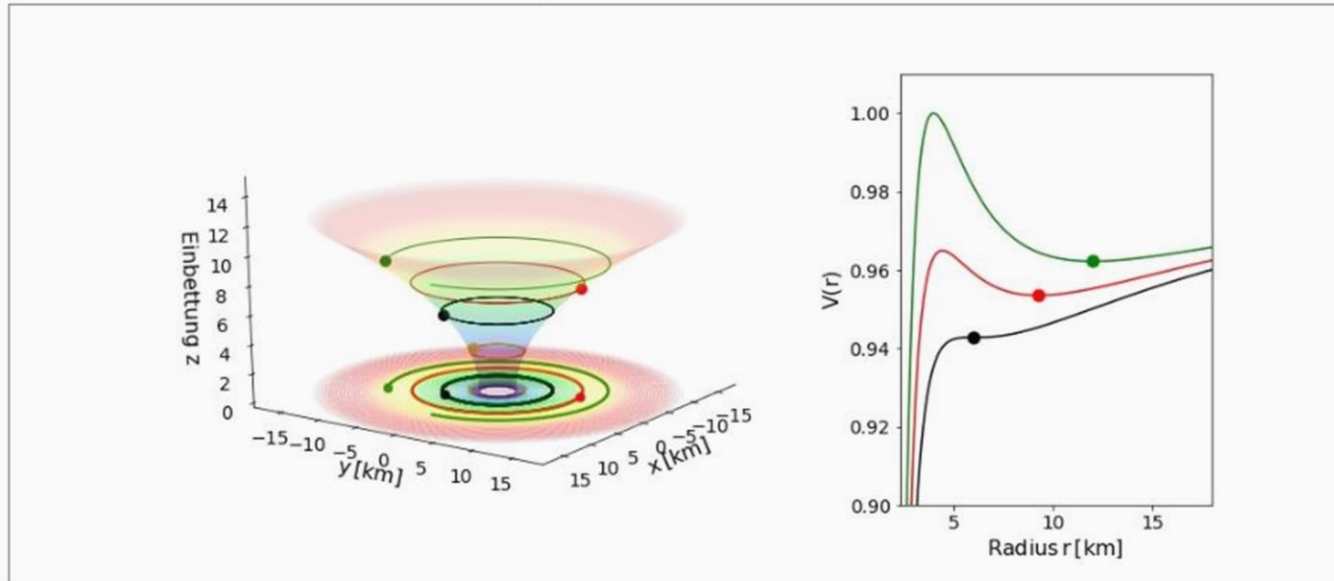
Literaturverzeichnis
• Internetseite der Vorlesung

4. Vorlesung

Vorlesung 4

Im ersten Abschnitt dieser Vorlesung werden wir ein Jupyter Notebook behandeln, welches die Eigenschaften der innersten stabilen kreisförmigen Bahnbewegung eines massiven Probekörpers (ISCO, siehe rechtes Panel dieser Vorlesung) berechnet und diesen Grenzorbit verdeutlicht. Des Weiteren wird in diesem Notebook auch die Bewegung von masselosen Teilchen (z.B. Photonen) um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch simuliert und die Photonensphäre eines schwarzen Loches berechnet. Die astrophysikalische Bedeutung des ISCOs und der Photonensphäre wird danach in einem Maple Worksheet diskutiert und mittels des vom Event Horizon Telescope aufgenommenen Bildes des schwarzen Lochs in unserer Nachbargalaxie Messier 87 illustriert. Am Ende dieser Vorlesung werden die Planetenbewegungen unseres Sonnensystems allgemein-relativistisch berechnet und der Transit des Merkur am 9. Mai 2016 simuliert.

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (der ISCO: Innermost Stable Circular Orbit) und die Photonensphäre



Vorlesung 4

In der vorigen Vorlesung hatten wir die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit betrachtet und gezeigt, wie man eine Klassifizierung möglicher Bahnen von Probekörpern mittels eines definierten effektiven Potentials $V(r, M, l)$ illustrieren kann (M ist die Masse des schwarzen Lochs und l der Bahndrehimpuls pro Masse m des Probekörpers). Eine dieser Bahnen ist von besonderer Bedeutung, die sogenannte innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (der ISCO: Innermost Stable Circular Orbit). Kreisförmige Bahnbewegungen sind dadurch charakterisiert, dass der Wert des Radiuses sich im Laufe der Zeit nicht verändert und somit sich der radiale Abstand des Probekörpers vom schwarzen Loch gerade im Minimum des effektiven Potentials befindet. Es muss somit $\frac{dV}{dr} = 0$ gelten. Löst man diese Gleichung nach r auf, so erhält man zwei Lösungen, wobei die erste (positives Vorzeichen) dem stabilen Minimum und die zweite (negatives Vorzeichen) dem instabilen Maximum entspricht:

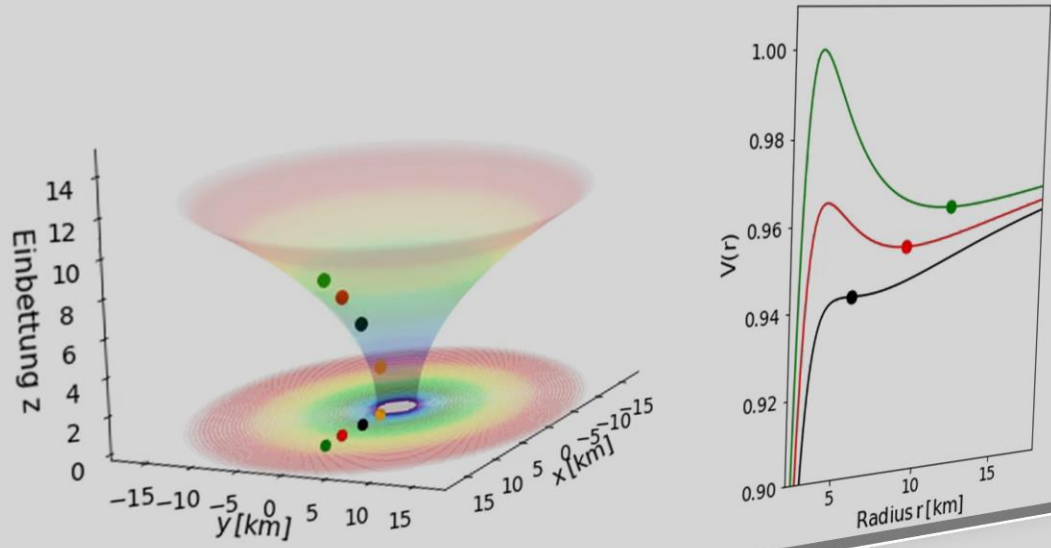
$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow r_{\pm} = \frac{l}{2M} \left(l \pm \sqrt{l^2 - 12M^2} \right)$$

Der ISCO hat gerade die Sattelpunkt-Eigenschaft, sodass zusätzlich $\frac{d^2V}{dr^2} = 0$ gelten muss. Der Drehimpuls l des Probekörpers und sein radialer Abstand vom schwarzen Loch nehmen die folgenden Werte an:

$$\frac{dV}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V}{dr^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r = 6M, \quad l = 2\sqrt{3}M}_{\text{ISCO}}$$

Jupyter Notebook

Der ISCO und die Photonensphäre eines schwarzen Lochs



Bewegung eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch in der Ebene

Teil III: Der ISCO und die Photonensphäre

Im Folgenden werden die beiden Konzepte

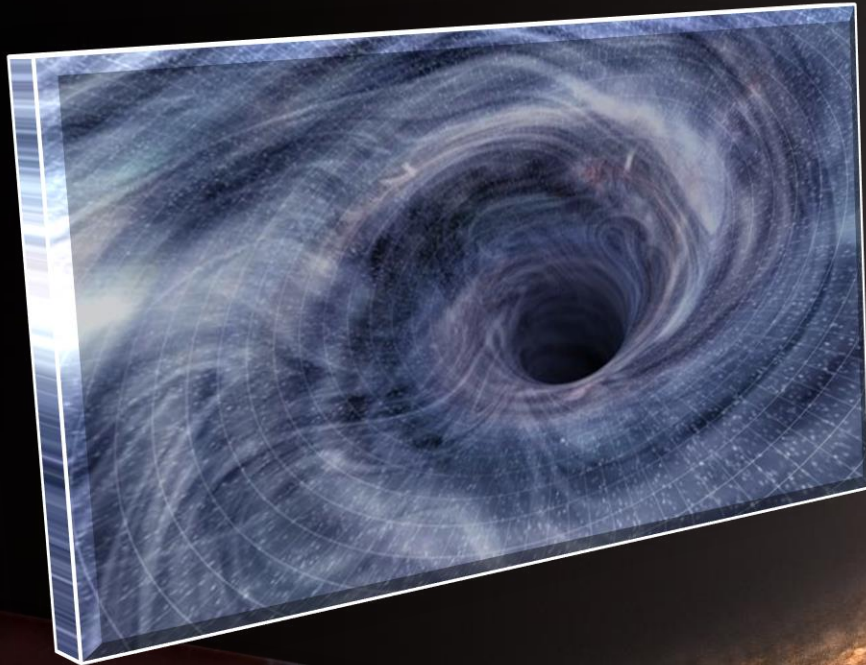
- a) die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch
- b) Die Photonensphäre eines nicht-rotierendes schwarzen Loches

- a) Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die Jupyter Notebooks zum Ansehen und zum herunterladen

The screenshot shows the website of Goethe University Frankfurt am Main. The header includes the university logo and name. Below the header, there are navigation tabs: 'Startseite', 'Lehren & Lernen', 'Kursangebote', and 'Allgemeine Relativität...'. The main content area is titled 'Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer'. A sidebar on the left lists various resources: 'Literaturverzeichnis', 'Einschreibung', 'Kursinhalt', 'Vorlesungsaufzeichnung', 'Aufgaben', and 'Programme'. Under 'Programme', there is a list of items: 'Einführung in Jupyter Notebooks', 'Allgemeine Relativitätstheorie mit Python', 'Eigenschaften der Schwarzschild-Metrik', 'Radialer Fall eines Probekörpers in ein schwarzes Loch', 'Klassifizierung unterschiedlicher Bahnbewegungen', 'Der ISCO und die Photonensphäre', 'Maple Worksheets I', and 'Jupyter Notebooks'. A blue arrow points to the 'Jupyter Notebooks' folder. Below the list, there are 'Mitteilungen' and 'Forum' links. On the right side, there is a portrait of Albert Einstein.

Wie sehen schwarze Löcher aus?



Wie sieht das schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie aus?



Das EU-Projekt **BlackHoleCam**
L.Rezzolla, H.Falke und M.Kramer

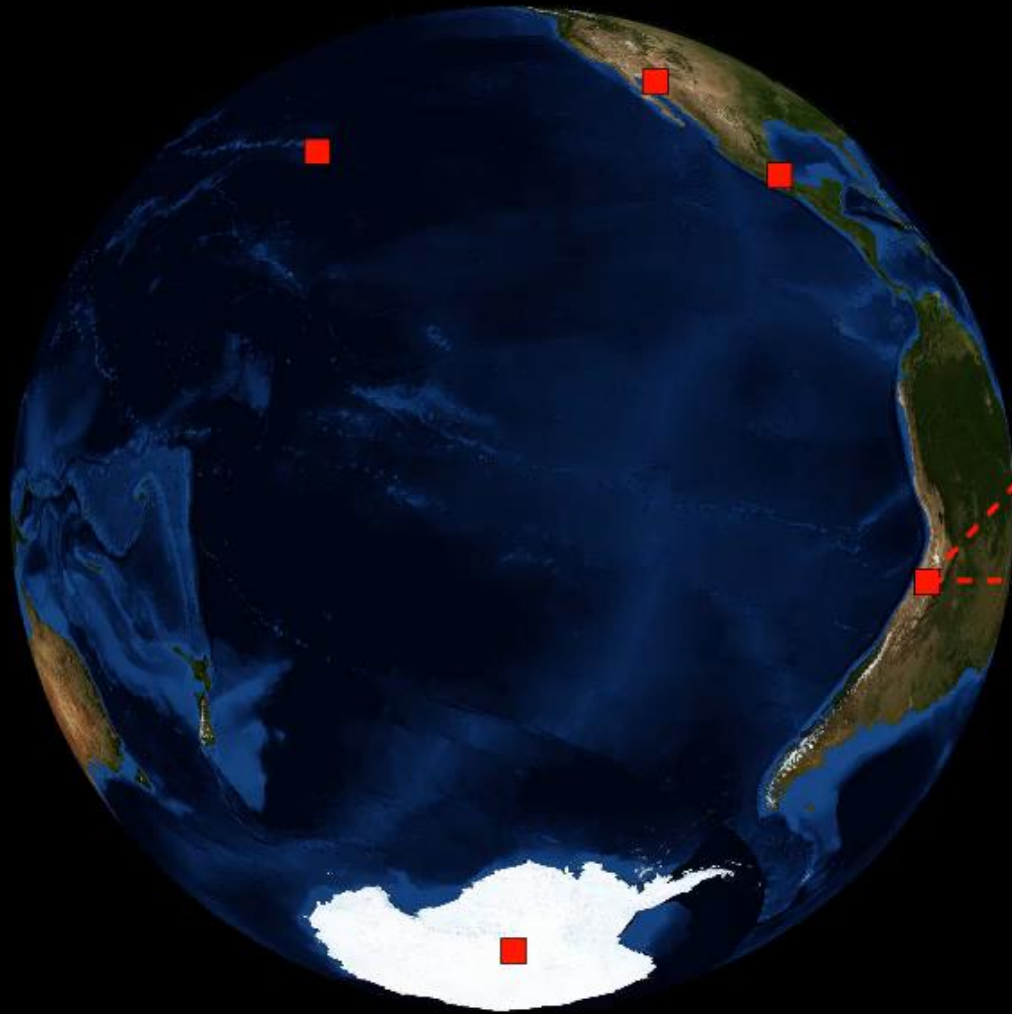
Das Bildnis des schwarzen Loches

(wie wird das wirkliche Bildnis des schwarzen Loches im Zentrum der Milchstrasse aussehen?)



*Simulationen
erstellt von
Dr. Ziri Younsi
(2017)*

Event Horizon Telescope



Atacama Large
Millimeter Array (ALMA)



Coordinates: $23^{\circ} 01' 09''\text{S}$, $67^{\circ} 45' 12''\text{W}$

Diameter: 12m

Das EHT ist ein
virtuelles Radioteleskop
der Größe der Erde

Das Event Horizon Teleskop (EHT) ist eine hochgradig internationale Kooperation von Radioteleskopen die mittels Langbasisinterferometrie das erste Bild eines schwarzen Loches aufzeichnen konnte

*Python-Animation erstellt
von Dr. Christian Fromm*

Bilder von zwei schwarzen Löchern werden erwartet

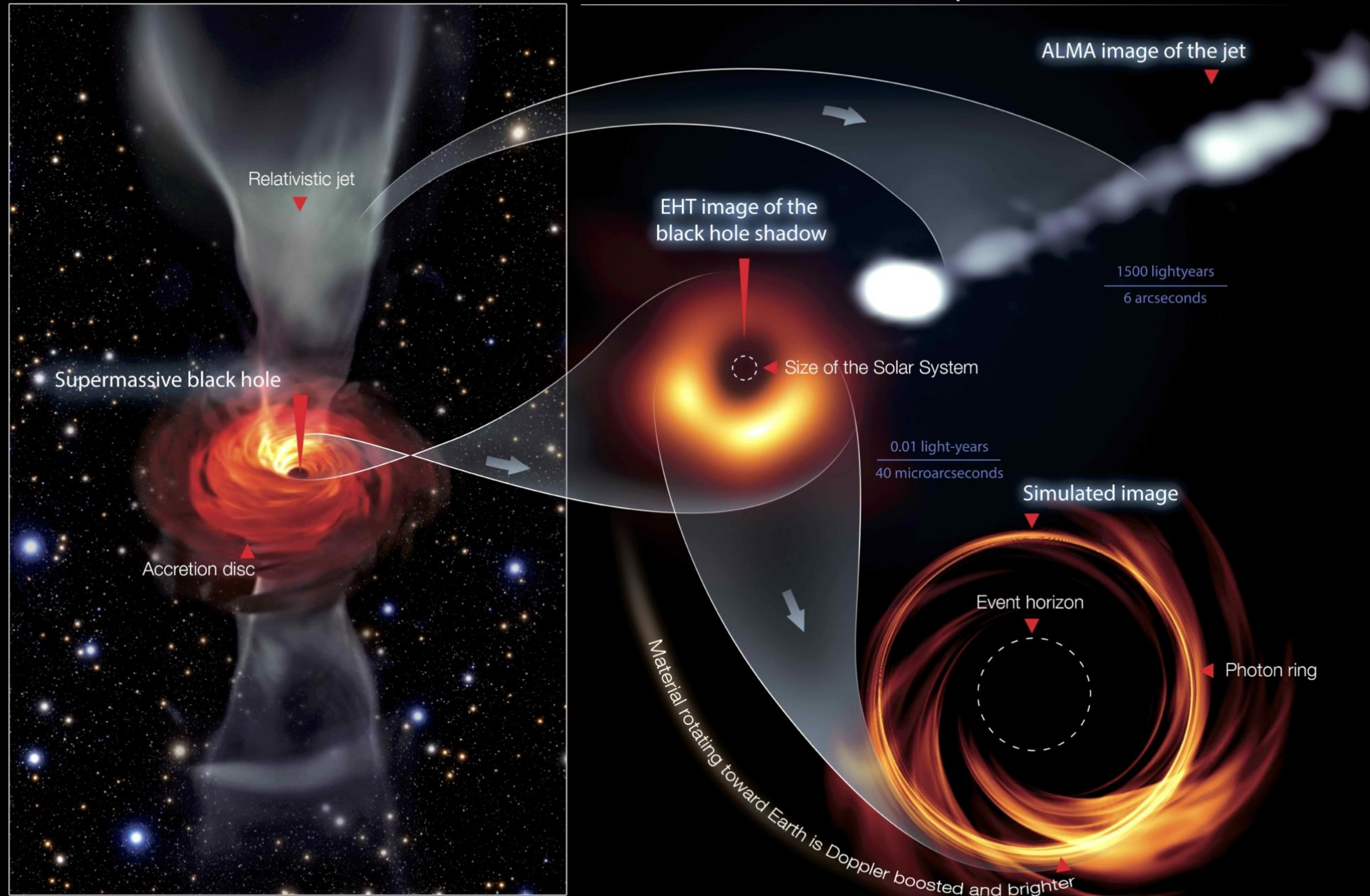
(Stand 04.2017)

	M87	Sgr A*
Mass (M_{sun})	$3-6 \times 10^9$ (?)	4×10^6
Distance	16 Mpc	8.5 kpc
Luminosity	10^{44} erg/s	10^{36} erg/s
Mdot (M_{edd})	10^{-4}	10^{-8}
BH Spin Axis	Gal disk?	10-25 deg los
@ the BH?	Maybe	Yes
B field @ BH	60-130 G	10-100 G
Scattered?	No	yes
Shadow Size	640 AU	0.5 AU
Shadow Angle	20-40 μas	52 μas
GM/c ³	8 hrs	20 sec
Jet Power	$10^{42}-10^{43}$ erg/s	?

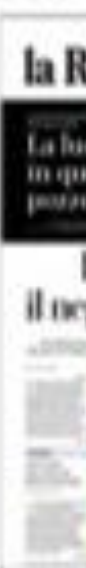
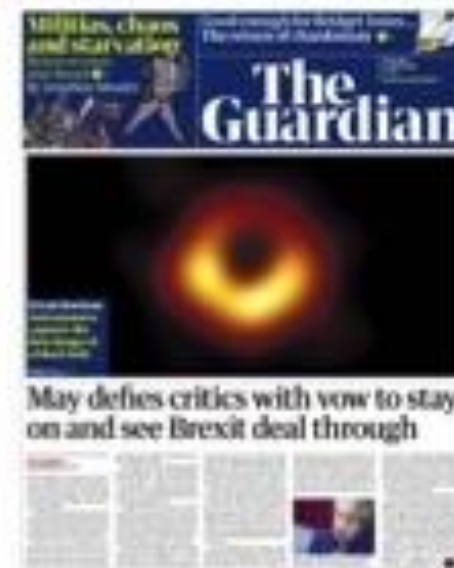
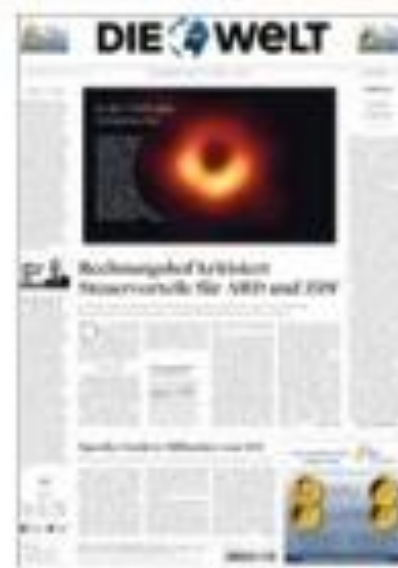


Eine Reise in das Herz von Messier 87

M87 Black Hole – Event Horizon Telescope



Die ersten Bilder eines Schwarzen Lochs



das Bild des schwarzen Lochs

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).

Echte Singularität im Zentrum

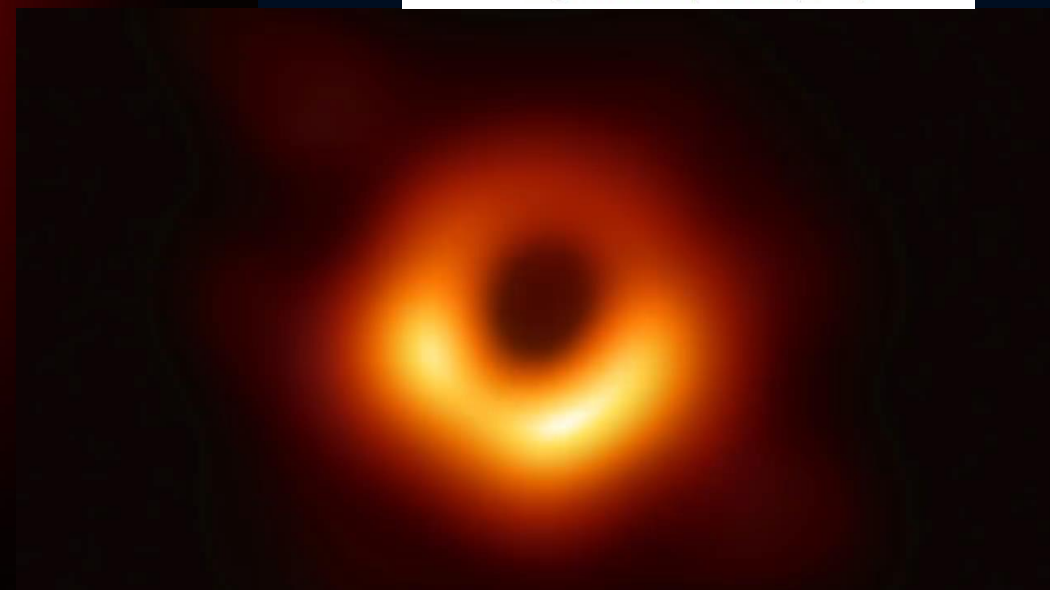
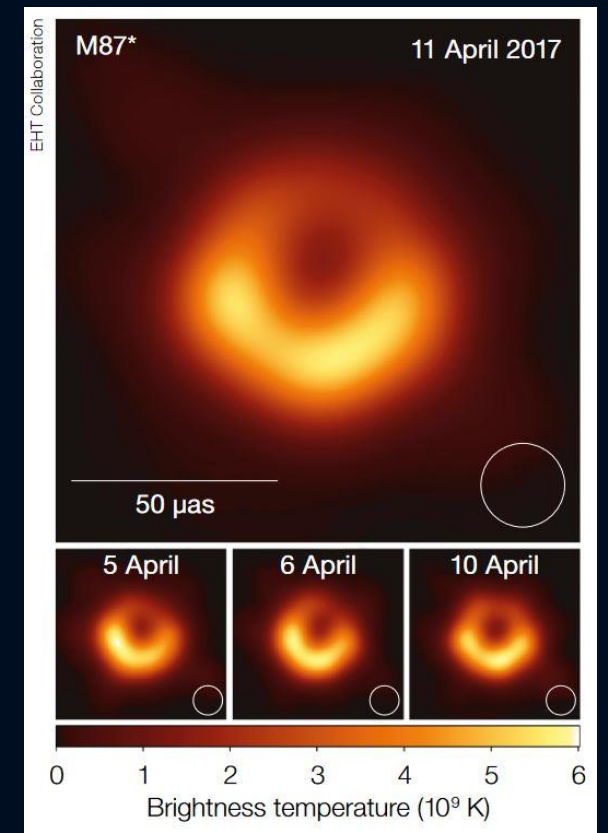
Ereignishorizont

Photonensphäre
Letzte stabile
kreisförmige
Bahnbewegung eines
masselosen Teilchens

Akkretionsscheibe
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines massiven
Probekörpers
Last Stable Circular Orbit (ISCO)

Benutzen Sie hierfür das vorgestellte Maple worksheet und nehmen Sie an das schwarze Loch in M87 rotiere nicht und habe eine Masse von $6.5 \cdot 10^9$ Sonnenmassen. Berechnen Sie wo sich der Ereignishorizont und die letzte stabile kreisförmige Bahnbewegung eines massiven Körpers (ISCO) befindet (in Einheiten von km). Wie viel Zeit benötigt ein Körper auf der ISCO-Trajektorie um einmal um das schwarze Loch zu kreisen?

Aktuelle und zukünftige Bilder

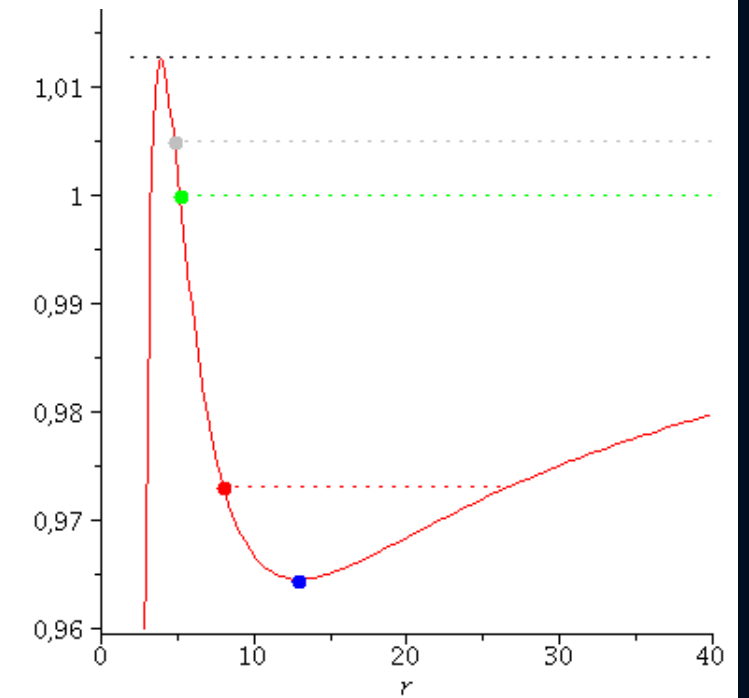
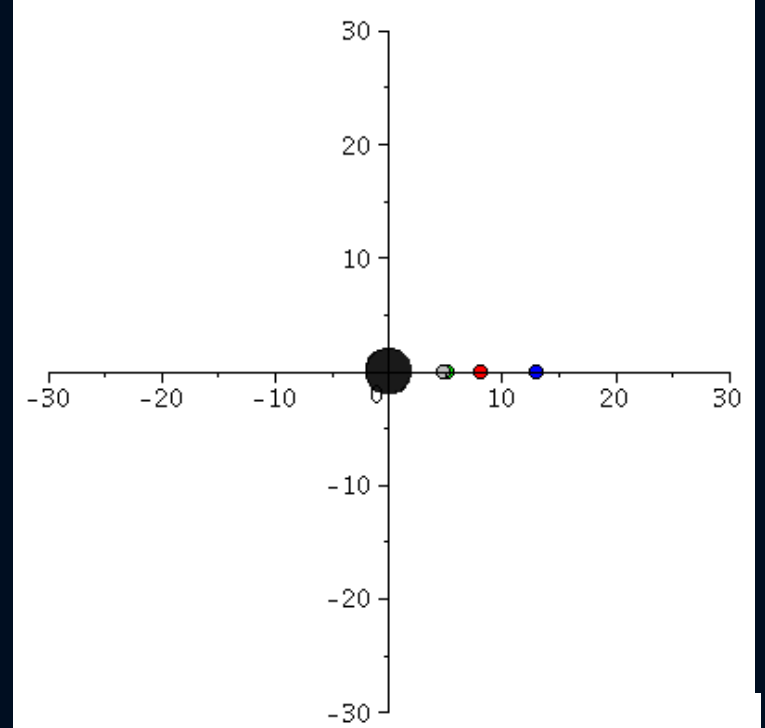
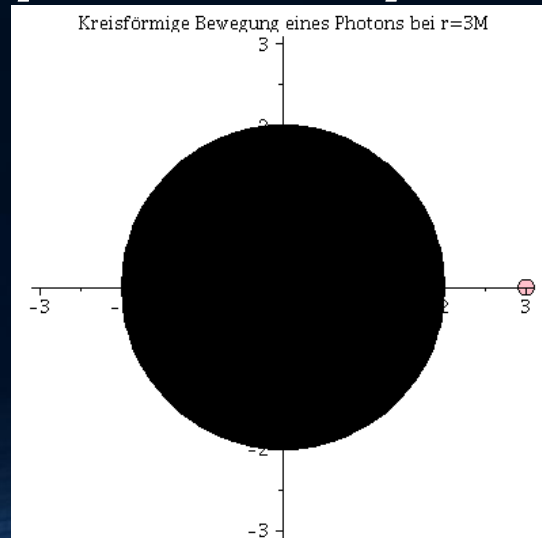
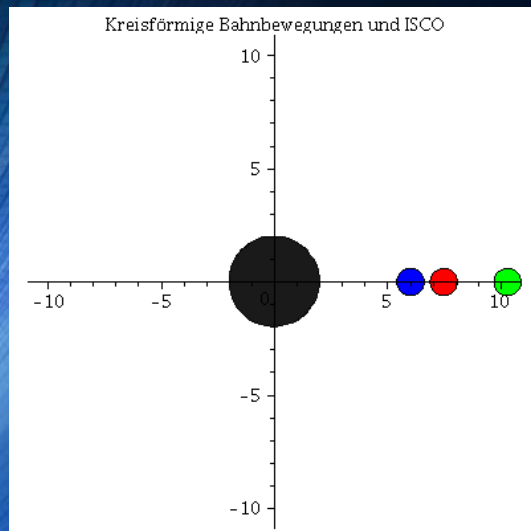


Geodätische Bewegung um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

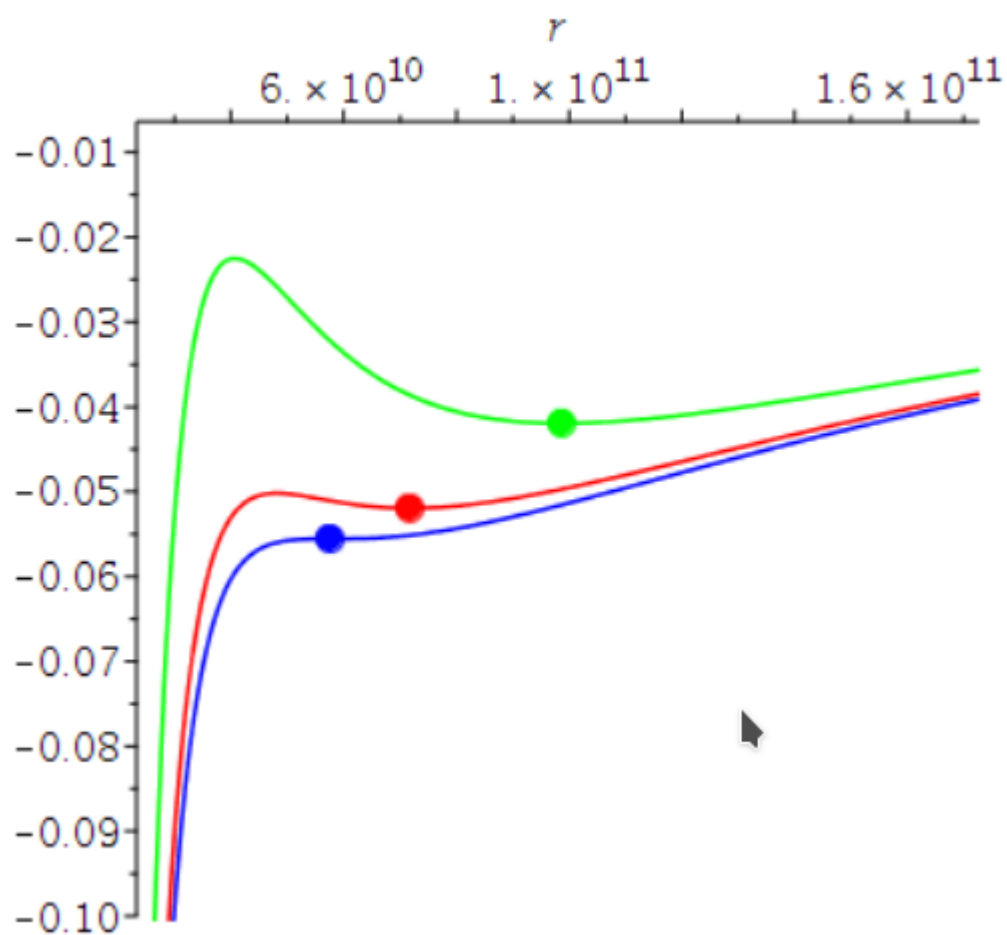
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

The *ISCO* and the *photon sphere*

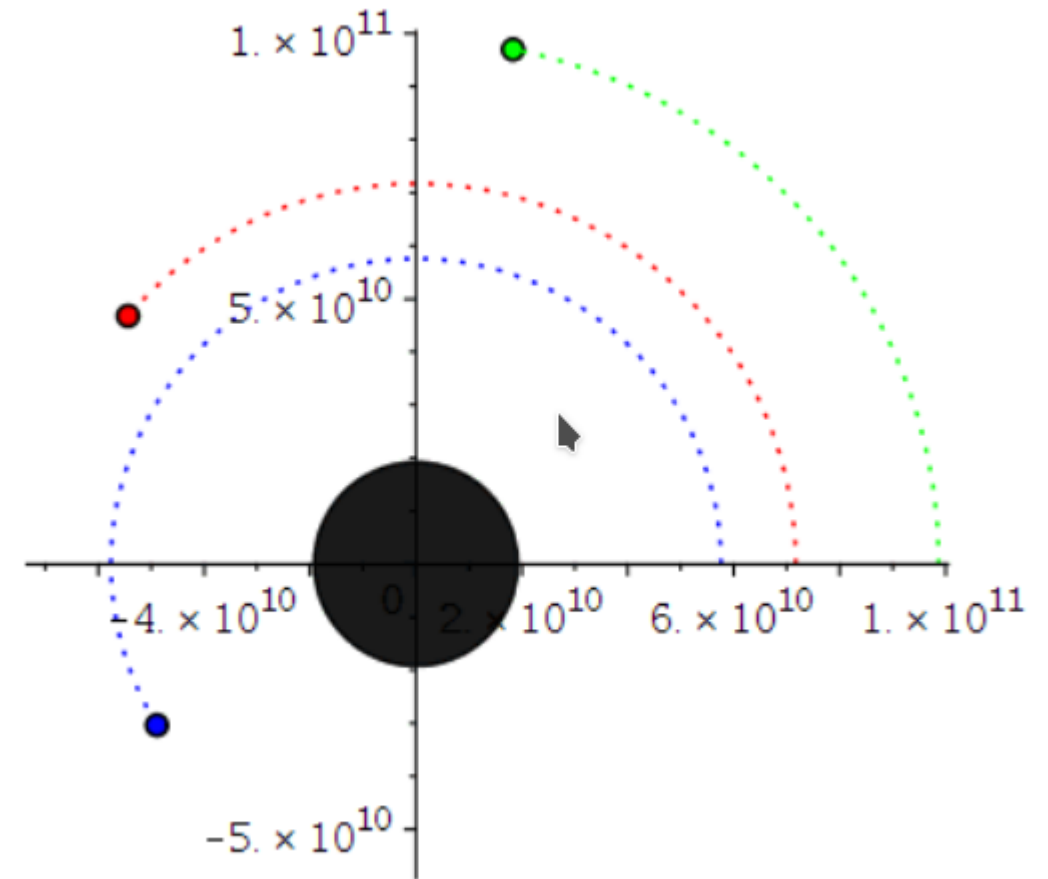


Das effektive Potential eines Probekörpers am ISCO hat eine Sattelpunkteigenschaft

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für drei verschiedene Drehimpulse



Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)

[Download Maple Worksheed](#)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 01.05.2019

[Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple](#)

Das Schwarze Loch in M87

(ohne Rotation)

Einführung

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde:

Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Bild des schwarzen Lochs in M87

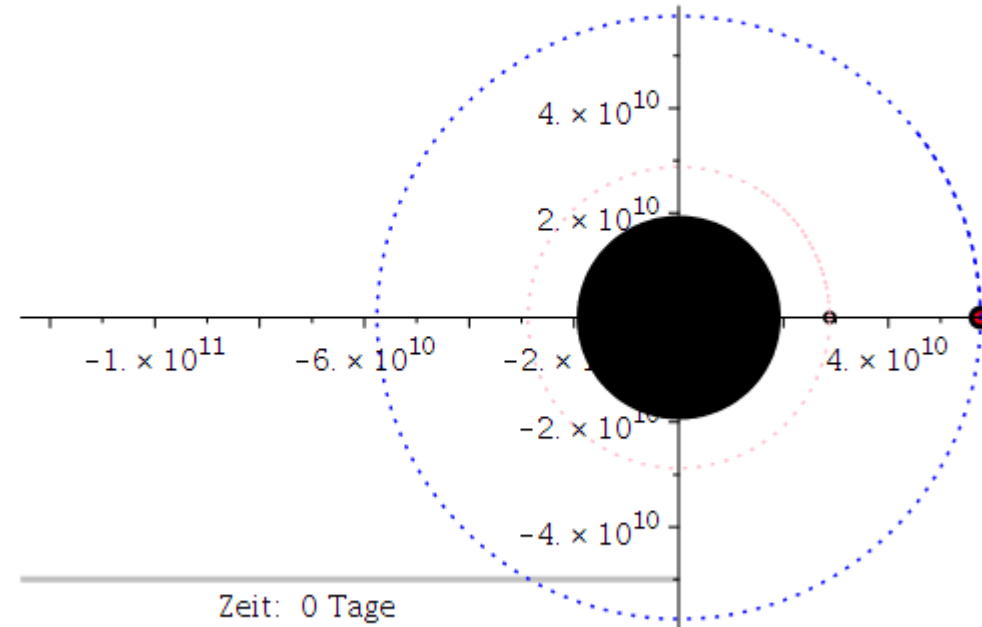
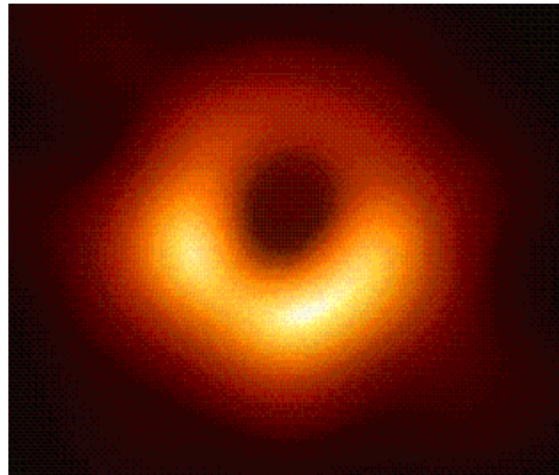


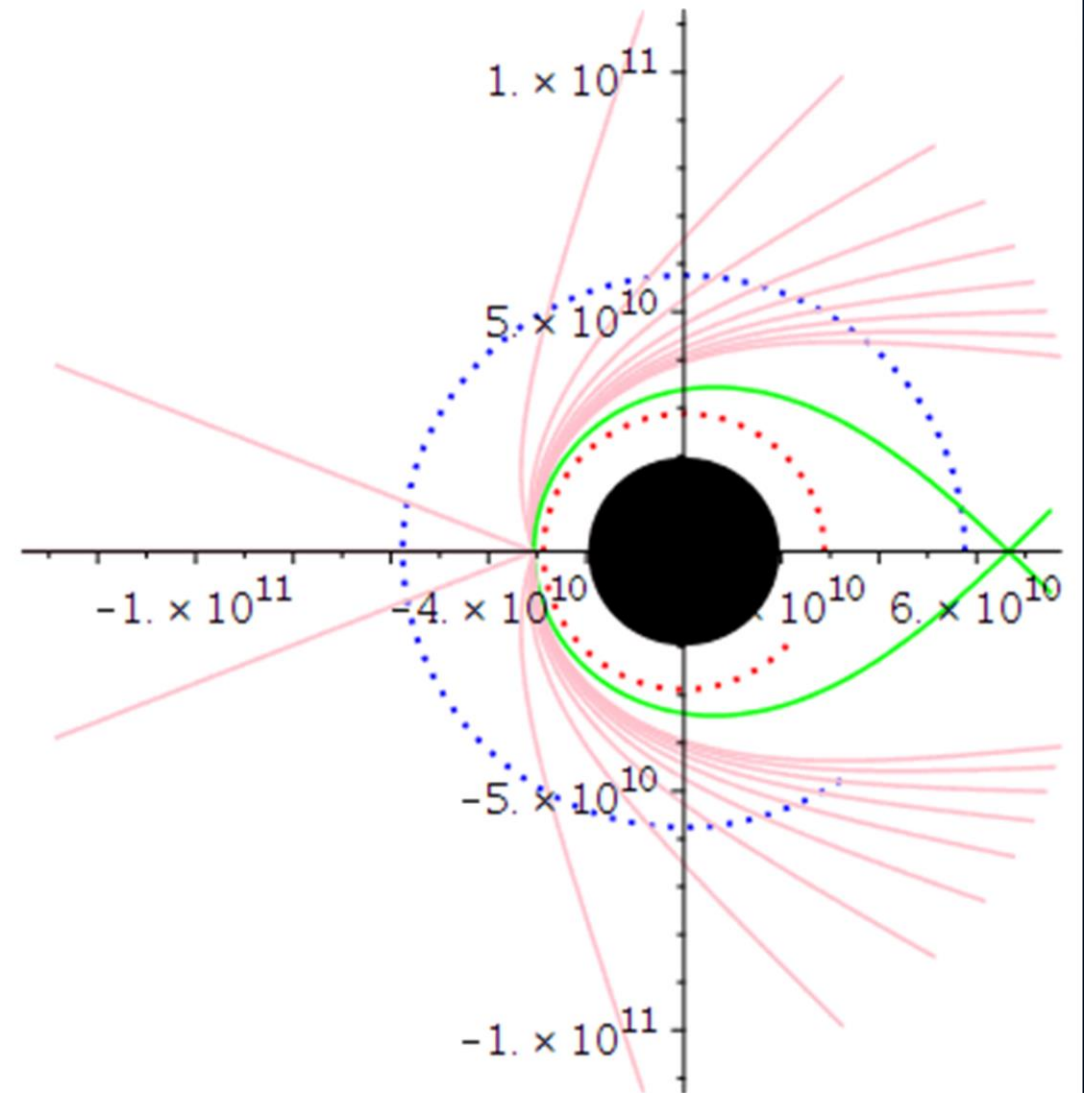
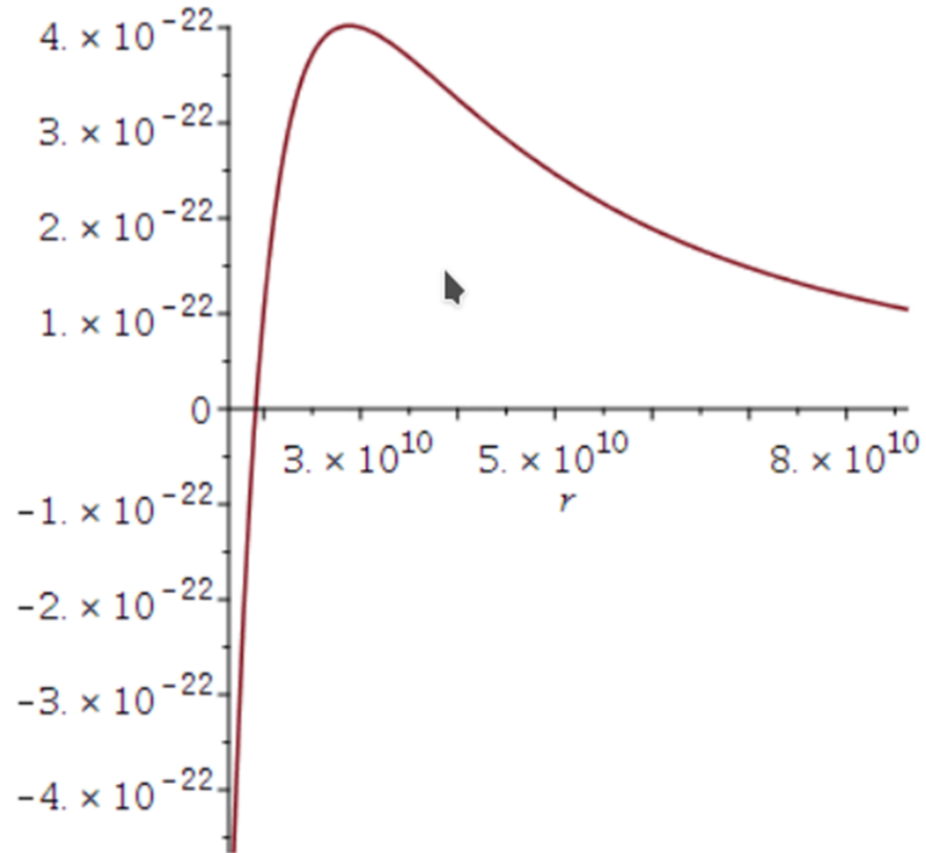
Abb. 1: Erstes Bild eines schwarzen Lochs im Vergleich mit den Simulationsergebnissen des Maple- Worksheets.

Das Bild zeigt das schwarze Loch im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87; bzw. ein wenig genauer, die um ein schwarze Loch entstehende Radiostrahlung (das Bild wurde mittels eines weltweiten Verbunds von Radiowellenteleskopen (EHT: Event Horizon Teleskop) sichtbar gemacht). In Kürze (voraussichtlich im Sommer 2019) werden die aufgenommenen

Masselose Teilchen (Photonen): Das effektive Potential und die Photonensphäre bei $3M$

$$V_{\text{effPhotonHobson}} := (r, M) \mapsto \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für
Photonen



Blau: ISCO , Rot: Photonensphäre

Der Merkurtransit in Allgemeiner Relativitätstheorie

Download Maple Worksheet

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

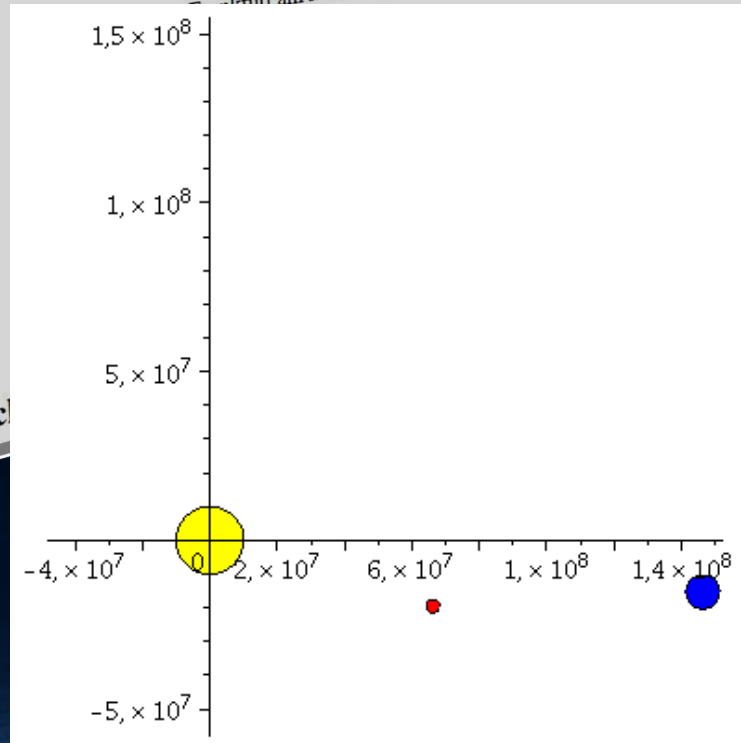
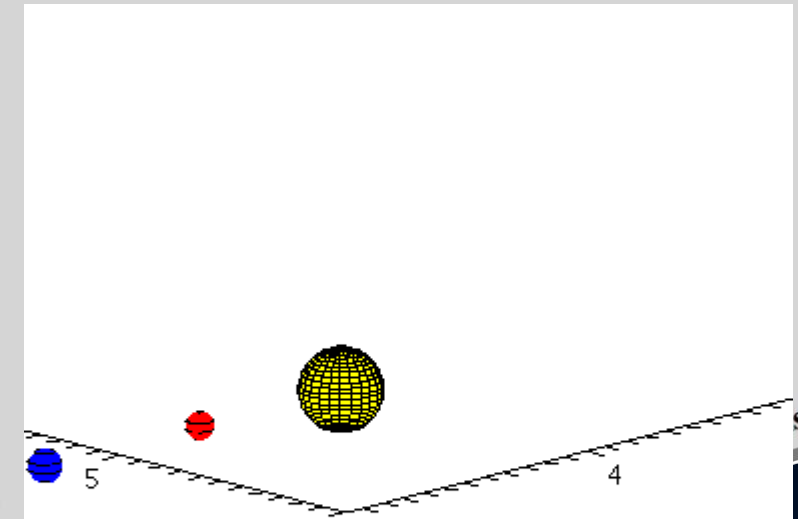
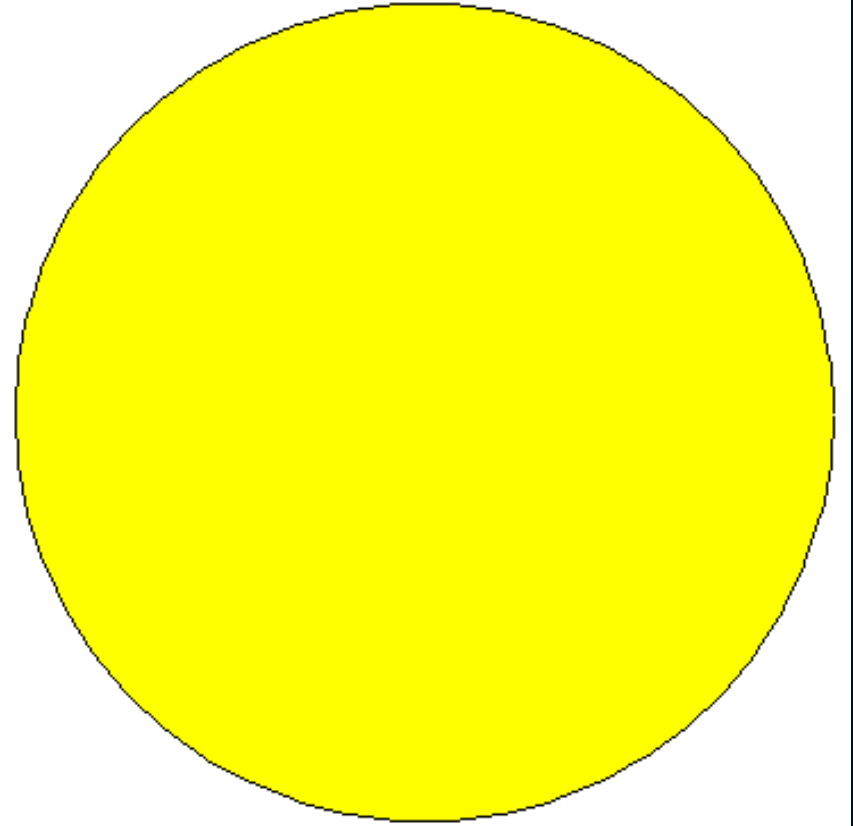
General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Zeit: -.494 Stunden



Die Bewegung der Planeten in allgemeiner Relativitätstheorie

Obwohl die Bewegung der Planeten unseres Sonnensystems um unser Zentralgestirn (die Sonne) in sehr guter Näherung mittels der Newtonschen Gravitationstheorie beschrieben werden kann und unsere Sonne ja sicherlich kein schwarzes Loch darstellt, können die Bahnen der Planeten auch allgemein-relativistisch mittels der Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild-Raumzeit berechnet werden. Dies ist aufgrund des Birkhoff-Theorems möglich, was besagt, dass eine sphärisch symmetrische

Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen außerhalb einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung (Sonne) statisch sein muss und diese Lösung der Schwarzschild-Lösung entspricht.

Die Periheldrehung des Merkur ist ein Beispiel eines nur in der allgemeinen Relativitätstheorie vorkommenden Effektes, der in der Newtonschen Gravitationstheorie nicht entsteht. Beim Klicken auf die nebenstehende Abbildung gelangt man zu einem Maple Worksheet, das die Bewegung der Erde und des Merkur um die Sonne allgemein-relativistisch berechnet und den Merkurtransit am 9.Mai 2016 simuliert.

