

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
17. MAY, 2019*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

4. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Übungstermine:
Zusätzlich zur Vorlesung werden ab dem 03.05.2019 freiwillige Übungstermine eingerichtet, die jeweils freitags, eine Stunde vor der Vorlesung im PC-Pool 01.120 stattfinden (Fr. 14-15.00 Uhr).
- Vorlesungs-Materialien:
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/VARTC/>
- Kurs auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Plan für die heutige Vorlesung:
Kurze Wiederholung der letzten Vorlesung: Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen eines Probekörpers mit Maple lösen, Klassifizierung der möglichen unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials, die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (ISCO) eines Probekörpers
Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch, die Photonensphäre eines schwarzen Loches, Beispiel: Das supermassive schwarze Loch im Zentrum von M87, Aufgaben auf der Lernplattform bearbeiten

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \right. \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\ & \left. -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Während der Bewegung erhaltene Größen

Zwei Gleichungen der Geodätengleichung lassen sich wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const} \\ 2. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad , \end{aligned}$$

Die während der Bewegung erhaltenen Größen der Energie (E) und des Drehimpulses (l) lassen sich mittels des Viererimpulses definieren:

Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben ($\lambda = \tau$):

$$\begin{aligned} p_0 &= m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E \\ p_3 &= m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l \end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe z.B. Seite 206 in "General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby"), dass sich die erste und zweite Gleichung dieses Systems von Differentialgleichungen in die folgenden Gleichungen umschreiben lässt:

$$1. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const}$$

$$2. \text{ Gleichung: } \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad ,$$

wobei die während der Bewegungen erhaltenen Größen E (Teilchenenergie pro Masse) und l (Drehimpuls pro Masse m) sich aus der Definition des Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben (Beachte: Die im folgenden benutzten einzelnen Rechenschritte gelten speziell nur für die Schwarzschildmetrik und desweiteren ist $\lambda = \tau$):

$$p_0 = m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E$$

$$p_3 = m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l$$

Wir lassen nur ebene Bewegungen zu ($\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$) und setzen $M=1$:

```
> setM:=1:
eq1:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[1]):
eq2:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[2]):
eq3:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[3]):
eq4:=subs({r=r(lambda), sin(theta)=1, cos(theta)=0, diff(theta(lambda), lambda)=0, theta=Pi/2, M=setM}, eqns[4]):
eq1:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq1);
eq2:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq2);
eq3:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq3);
eq4:=subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda)}, eq4);
```

Das effektive Potential

Mittels der radialen Gleichung läßt sich das effektive Potential definieren:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

Alternative Definition (siehe Buch von Prof. Rezzolla):

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle
3. Allgemeine Relativitätstheorie by Torsten Fließbach
4. Relativistic hydrodynamics by Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti

Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenen Drehimpuls pro Masse m ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und E : Energie pro Masse) charakterisiert. Die Definition des effektiven Potential erfolgt mittels der radialen, 4. Geodätengleichung. So definieren z.B. die Literaturangaben 1.-3. das effektive Potential wie folgt:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

In der Literaturangabe 4 wird das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

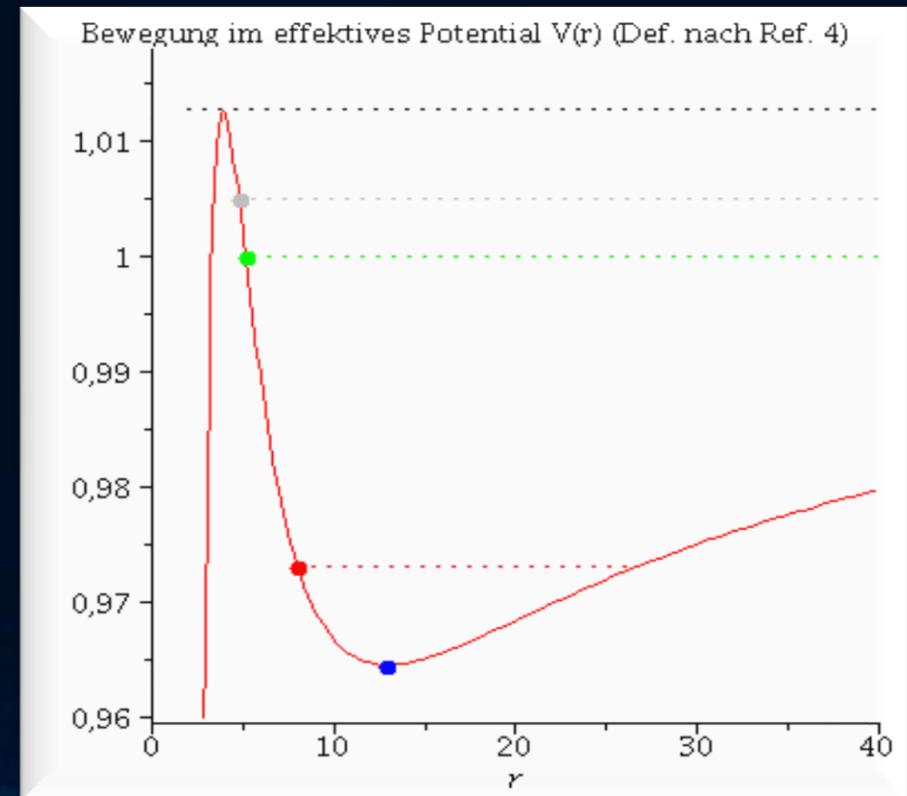
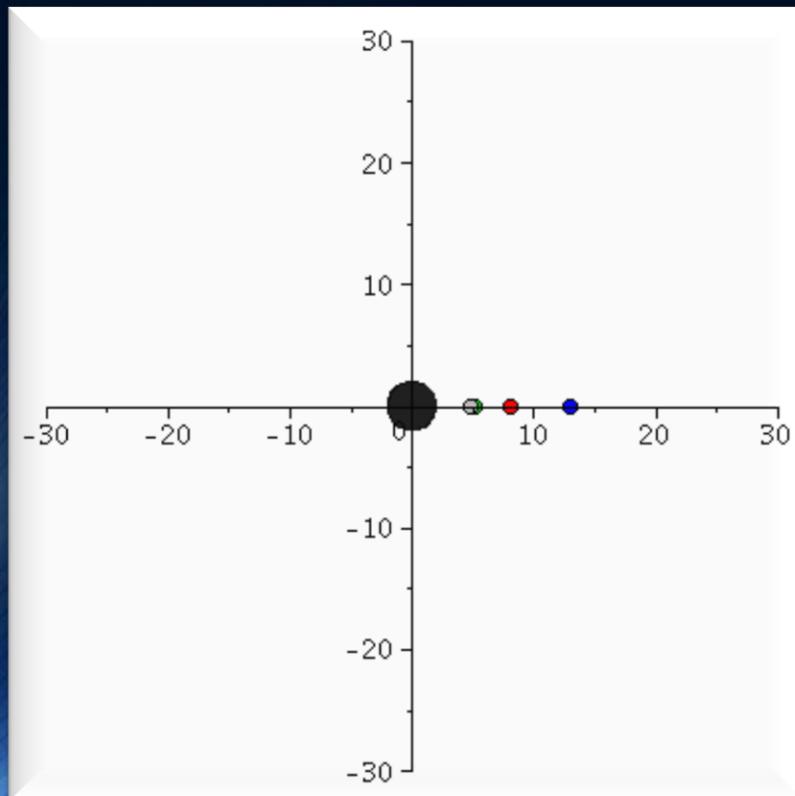
$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$
$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

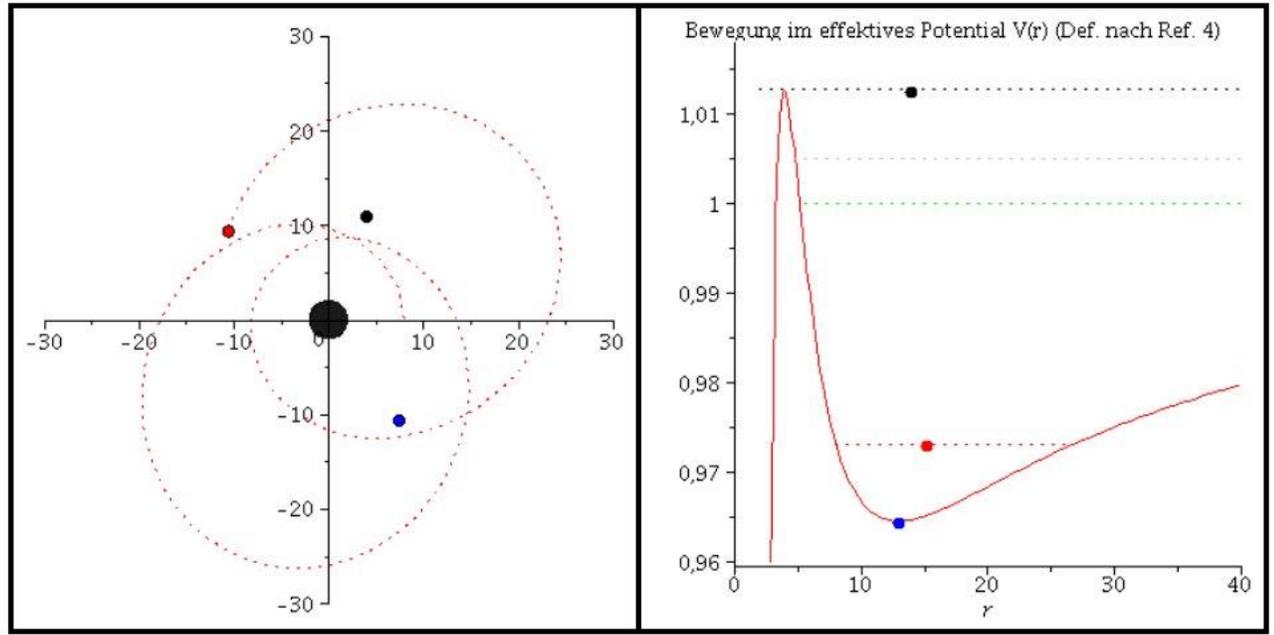
Die folgende Abbildung zeigt (in der Nomenklatur des 4. Buches (Diagramm links) bzw. des 1. bis 3. Buches (Diagramm rechts)) das effektive Potential als Funktion des Radius bei den obigen gewählten Anfangswerten:

> $setl:=r_0^2*dphi_0;$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich





>

Die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch (gebunden kreisförmige (A: blau) und elliptische (B: rot) Bahn, parabolische (C: grün) und hyperbolische (D: grau) Bahnverläufe bzw. eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz)) sind in der obigen Abbildung dargestellt. Bei der elliptische, roten Bahn erkennt man hierbei gut den allgemeinrelativistem Effekt der Periheldrehung, d.h. der nächste Punkt (der Perihel) und der am weitesten entfernte Punkt (der Aphel) vom Zentrum des schwarzen Lochs betrachtet, ändert seine Position und rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn in ϕ -Richtung.

>

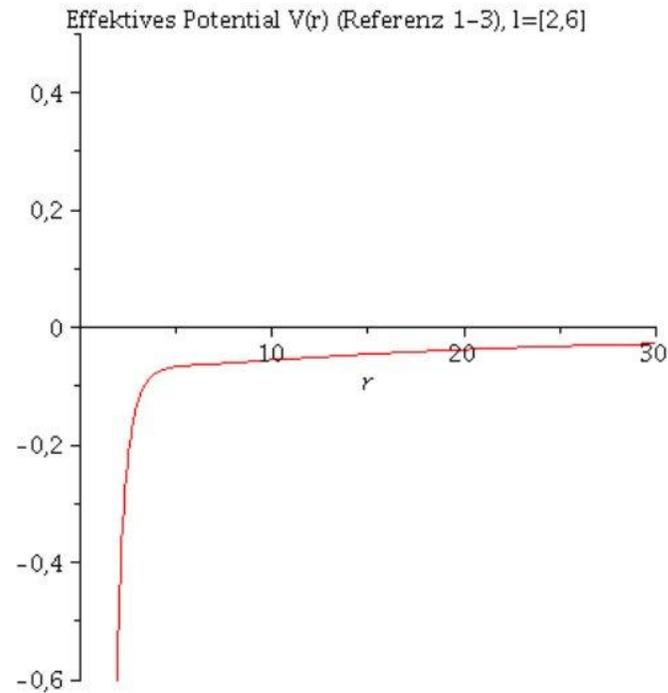
Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers

Wir berechnen die kreisförmigen Bahnbewegungen indem wir das Minimum des effektiven Potentials berechnen.

In der vorigen Animation der unterschiedlichen Bahnbewegungen wurde der Drehimpuls l fest auf den Wert 4.1 und die Masse des schwarzen Lochs auf 1 festgelegt. Das effektive Potential $V(r, M, l)$ war somit nur noch von r abhängig. Die folgende Animation zeigt wie sich die Form des effektiven Potentials bei Variation des Parameters l von $l=2$ bis $l=6$ verändert.

```
> animate(VeffFb(r,1,l),r=0..30,l=2..6,view=-0.6..0.5,title="Effektives Potential V(r) (Referenz 1-3), l=[2,6]",numpoints=500);
```



Wir benutzen nun die Potential-Nomenklatur der 1. bis 3. Literaturangabe (siehe weiter oben). Ist der Wert des Drehimpulses l oberhalb einer gewissen Grenze, so sind stabile Bahnen möglich, da ein Minimum im Potential vorhanden ist. Kreisförmige Bahnbewegungen sind dadurch charakterisiert, dass der Wert des Radiuses sich im Laufe der Zeit nicht verändert und somit sich der radiale Abstand des Probekörpers vom schwarzen Loch gerade im Minimum des effektiven Potentials befindet. Es muss somit gelten:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{Bedingung für kreisförmige Bahnverläufe}$$

> `Diff(V(r,M,l),r)=0;`
`ExtremaV:=diff(Veff(r,M,l),r)=0;`

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} V(r, M, l) &= 0 \\ \text{ExtremaV} &= \frac{M}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{3Ml^2}{r^4} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

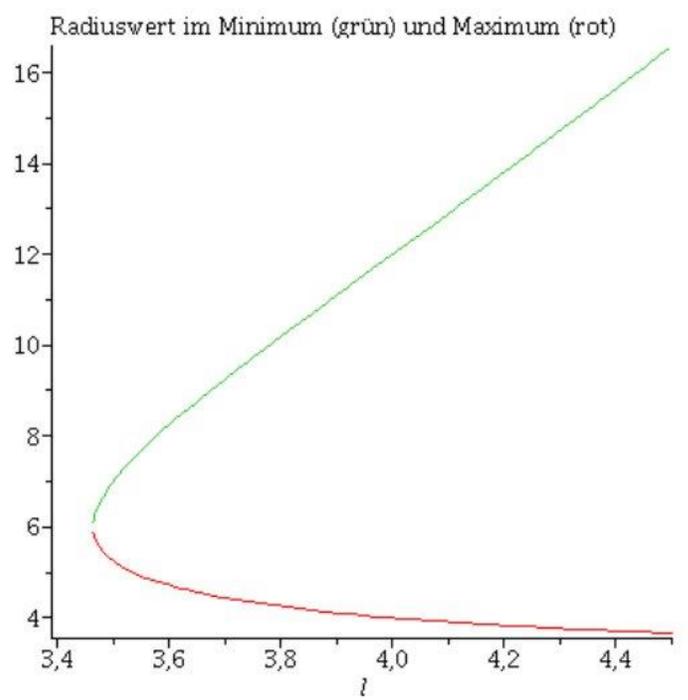
Lösen wir diese Gleichung nach r auf, so erhalten wir die folgenden Lösungen, wobei der erste (positives Vorzeichen) Wert dem Minimum und der zweite (negatives Vorzeichen) dem Maximum entspricht:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\pm} = \frac{l}{2M} \left(l \pm \sqrt{l^2 - 12M^2} \right)$$

$$r_{extr} := \frac{1}{2} \frac{(l + \sqrt{l^2 - 12 M^2}) l}{M}, -\frac{1}{2} \frac{(-l + \sqrt{l^2 - 12 M^2}) l}{M} \quad (2.3.2)$$

Darstellen des Radiuswertes im Minimum (grün) und Maximum (rot) des effektiven Potentials

```
> plot({subs(M=1, rextr[1]), subs(M=1, rextr[2])}, l=3.4..4.5, title="Radiuswert im Minimum (grün) und Maximum (rot)");
```



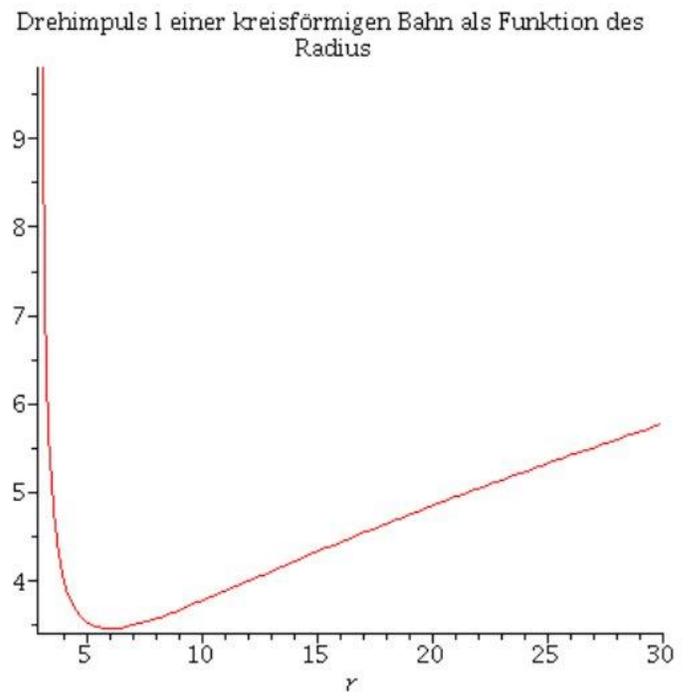
Der Drehimpuls l für eine kreisförmige Bahnbewegung ergibt sich durch Auflösen von V'=0 nach l:

Die beiden Lösungen entsprechen rechts und links rotierenden Probekörpern. Kreisförmige Bahnbewegungen sind somit durch die folgende Bedingung an das effektive Potential charakterisiert:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow l = \pm \frac{\sqrt{Mr}}{\sqrt{r-3M}}$$

Man erkennt an dieser Stelle schon, dass stabile kreisförmige Bahnbewegungen nur möglich sind, falls $r \geq 3M$. Darstellung einer Lösung:

```
> plot(subs(M=1,lextr[2]),r=3.1..30,title="Drehimpuls l einer kreisförmigen Bahn als Funktion des Radius");
```



Die innerste stabile Kreisbahn hat die Eigenschaft: $V'=0$ und $V''=0$. Der Drehimpuls l muss somit einen Wert annehmen, dass das effektive Potential einen Sattelpunkt bei einem speziellen Radiuswert annimmt:

$$\frac{dV}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V}{dr^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r = 6M, \quad l = 2\sqrt{3}M}_{\text{ISCO}}$$

```
> ExtremaV2:=diff(VeffFb(r,M,l),r,r)=0;
lISCO:=solve(simplify(subs(r=rextr[1],ExtremaV2)),l);
rISCO:=solve(simplify(subs(l=lextr[2],ExtremaV2)),r);
```

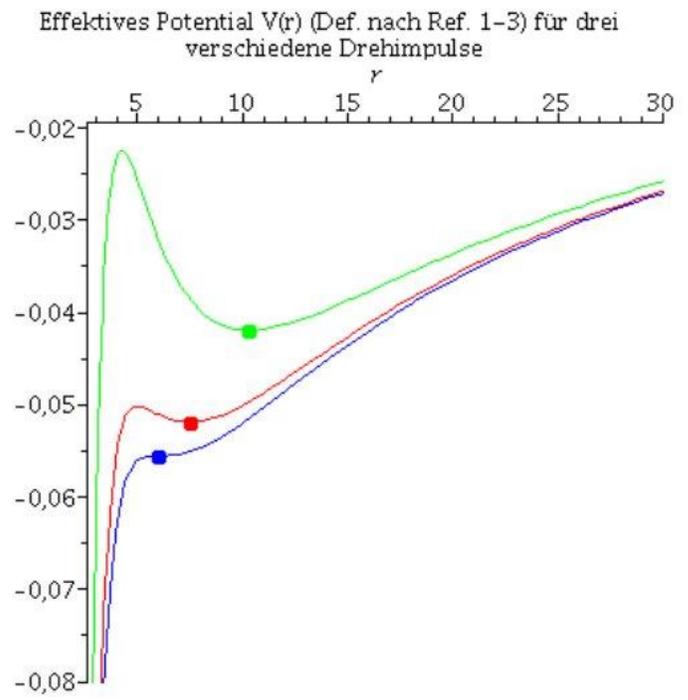
$$\text{ExtremaV2} := -\frac{2M}{r^3} + \frac{3l^2}{r^4} - \frac{12Ml^2}{r^5} = 0$$

$$l_{\text{ISCO}} := 2\sqrt{3}M, -2\sqrt{3}M$$

$$r_{\text{ISCO}} := 6M$$

(2.3.4)

Definition der Anfangswerte der innersten stabilen Kreisbahn und zweier weiterer stabilen kreisförmigen Bahnbewegungen.



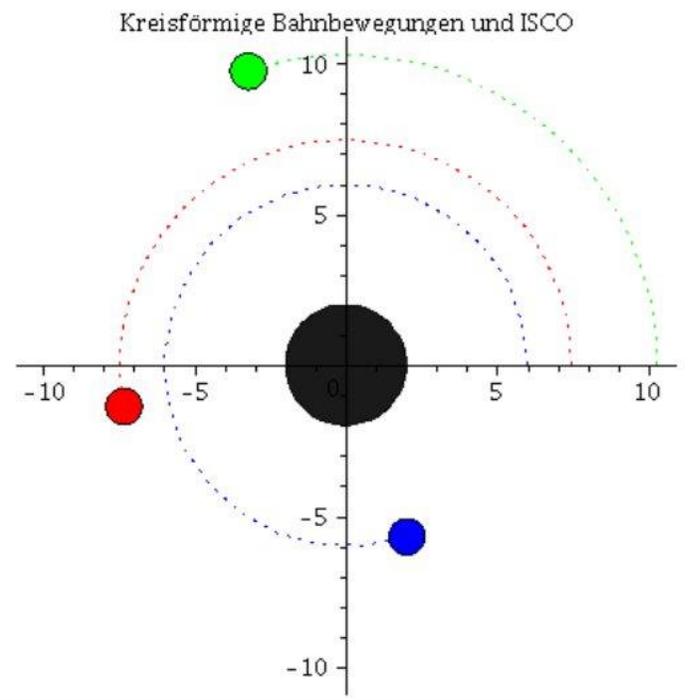
Numerische Lösung der drei Bahnbewegungen:

```
> LoesA:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0A,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0A,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0A},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesB:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0B,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0B,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0B},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesC:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0C,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0C,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0C},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

Animation der Bewegungen: Der ISCO ist die blaue Kurve

```
[4])*sin(rhs(LoesC(i*lend/frames)[2])),0.6,color=green)):
TrajA[i]:=listplot([seq([rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=blue,linestyle=dot):
TrajB[i]:=listplot([seq([rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=red,linestyle=dot):
TrajC[i]:=listplot([seq([rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=green,linestyle=dot):
Ani[i]:=display({KoerperA[i],KoerperB[i],KoerperC[i],TrajA[i],TrajB[i],TrajC[i],BH});
od:
```

```
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO");
```



>

Bewegung von Licht (Photonen) um ein schwarzes Loch in der Ebene (Die Photonensphäre)

In der Literatur wird die Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle
3. Allgemeine Relativitätstheorie by Torsten Fließbach
4. Relativistic hydrodynamics by Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti

Mittels der Eigenschaft für Photonen ($ds^2 = 0$) vereinfacht sich die radiale Gleichung der Geodätengleichung und man kann ein effektives Potential definieren, welches allein von der Masse des schwarzen Lochs abhängt.:

$$\frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{b^2}$$
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) ,$$

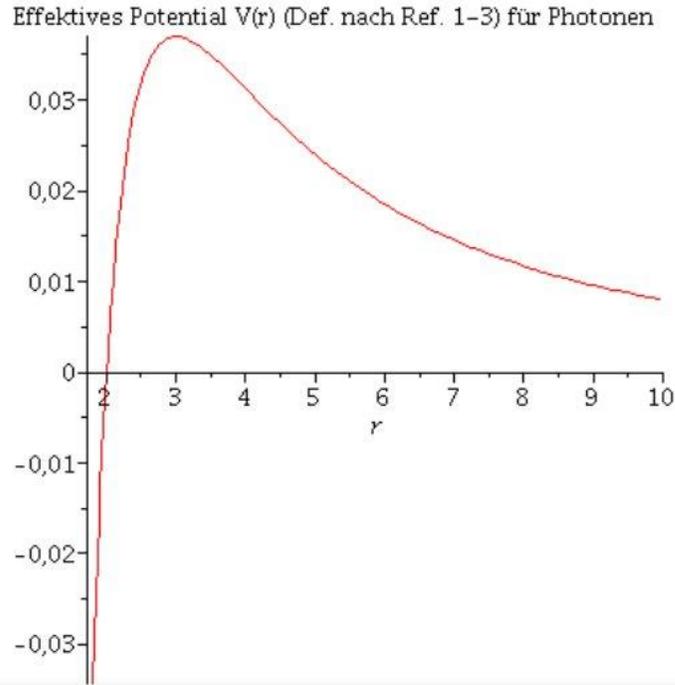
wobei der Parameter b der Impaktparameter der Photonenbahn darstellt. Die folgende Abbildung zeigt das effektive Potential (Definition nach Buch 1. bis 3.) als Funktion des Radius bei einer Masse von $M=1$:

>

```
setM=1;
VeffPhotonHobson:=(r,M)->1/r^2*(1-2*M/r);
Pot:=plot(VeffPhotonHobson(r,setM),r=1.8..10);
display(Pot,title="Effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 1-3) für Photonen");
```

```
> setM=1:  
VeffPhotonHobson:=(r,M)->1/r^2*(1-2*M/r);  
Pot:=plot(VeffPhotonHobson(r,setM),r=1.8..10):  
display(Pot,title="Effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 1-3) für Photonen");
```

$$V_{effPhotonHobson} := (r, M) \rightarrow \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$



Mittels $ds^2=0$ (für Photonen) kann man die folgenden Anfangswerte für eine Photonenkreisbahn bei $r=3$ berechnen:

```
> setM=1:  
  t0:=0:  
  phi0:=0:  
  theta0:=Pi/2:  
  dtheta0:=0:  
  dr0:=0:  
  r0:=3:  
  dphi0:=(1/9)*sqrt(3):  
  dt0:=1:
```

Der Anfangswert für $dphi0$ wurde hierbei mittels des infinitesimalen Weglängenelements $ds^2=0$ berechnet:

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):  
  ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1])):  
  ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]):  
  subs({dr=0,dtheta=0,cos(theta)=0},ds2)=0;  
  dphi=solve(subs({dr=0,dtheta=0,cos(theta)=0,M=setM,r=r0},ds2)=0,dphi);
```

$$-\frac{(r^2 - 4 r M + 4 M^2) dt^2}{r (-r + 2 M)} - \frac{(-r^4 + 2 r^3 M) d\phi^2}{r (-r + 2 M)} = 0$$
$$d\phi = \left(\frac{1}{9} \sqrt{3} dt, -\frac{1}{9} \sqrt{3} dt \right)$$

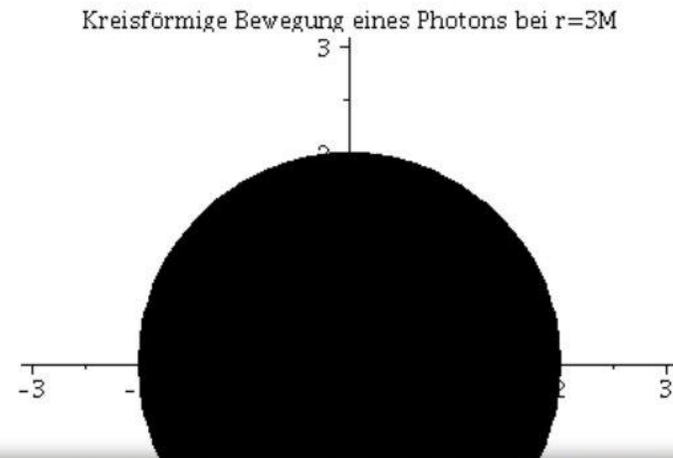
(2.4.1)

```
> Loes:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0},
               {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

Animation der Kreisbahn des Photons:

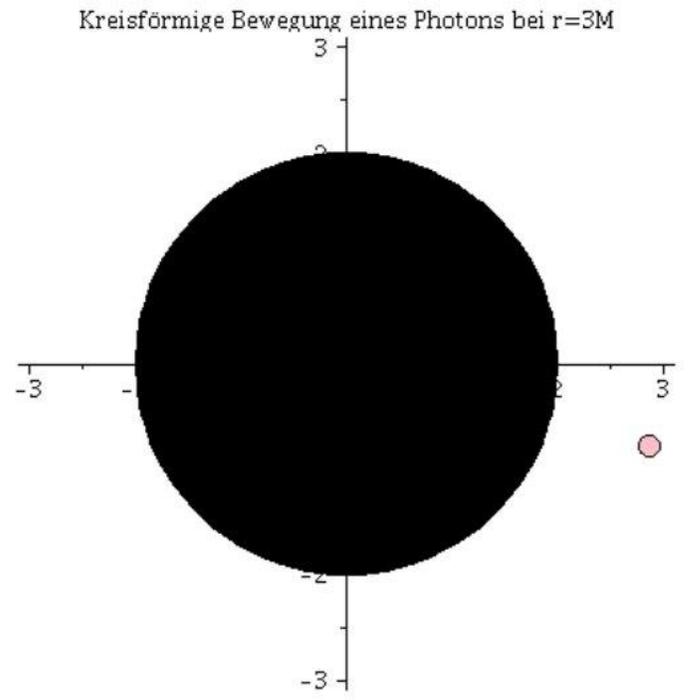
```
> frames:=250:
   lend:=200:
   BH:=display(disk([0,0],2,color=black)):
   for i from 0 by 1 to frames do
   Photon[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]),
   rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.1,color=pink)):
   Ani[i]:=display({Photon[i],BH});
   od:

> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bewegung eines Photons bei r=3M");
```



```
    BH:=display(disk([0,0],2,color=black));
    for i from 0 by 1 to frames do
    Photon[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)
[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.1,color=pink));
    Ani[i]:=display({Photon[i],BH});
    od:

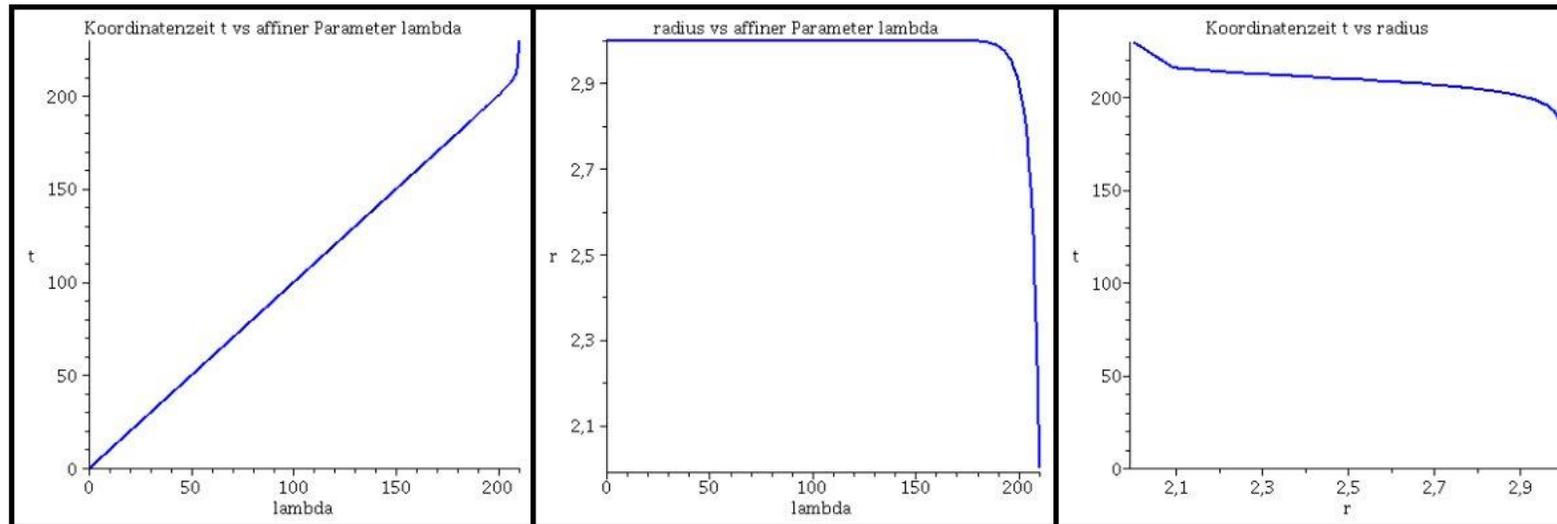
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bewegung eines Photons bei r=3M");
```



Numerischer Beweis der Instabilität der Lösung:

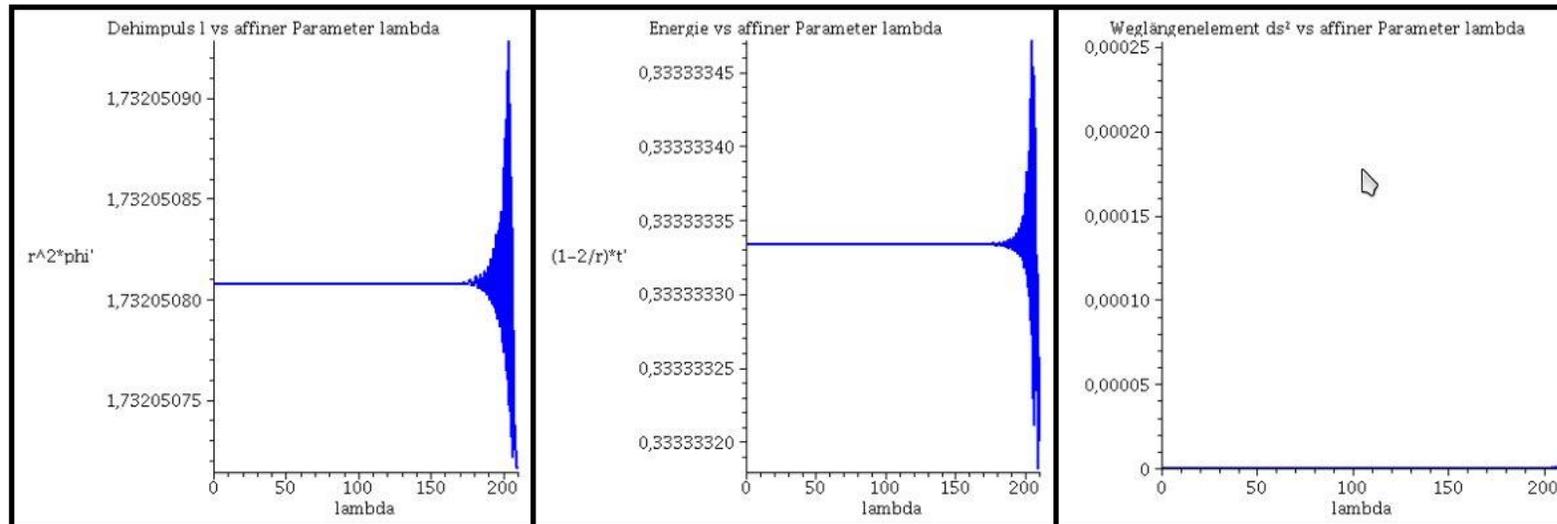
Numerischer Beweis der Instabilität der Lösung:

```
> lend:=210.098:  
Plot1:=odeplot(Loes,[lambda,t(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter lambda"):  
Plot2:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)],0..lend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="radius vs affiner Parameter lambda"):  
Plot3:=odeplot(Loes,[r(lambda),t(lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Koordinatenzeit t vs radius"):  
display(Matrix(1,3,[Plot1,Plot2,Plot3]));
```



Während der Bewegung erhaltenen Größen (l: Drehimpuls pro Masse m, E: Energie pro Masse und Weglängenelement ds^2):

```
> Plot4:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)^2*diff(phi(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Dehimpuls l vs affiner Parameter lambda");  
Plot5:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*diff(t(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Energie vs affiner Parameter lambda");  
Plot6:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*(diff(t(lambda), lambda))^2 - 1/(1-2/r(lambda))*(diff(r(lambda), lambda))^2 - r(lambda)^2*(diff(phi(lambda), lambda))^2],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Weglängenelement ds^2 vs affiner Parameter lambda");  
display(Matrix(1,3,[Plot4,Plot5,Plot6]));
```



>

Beispiel: Das schwarze Loch in M87

Echte Singularität im Zentrum

Ereignishorizont

Photonensphäre
Letzte stabile
kreisförmige
Bahnbelegung eines
masselosen Teilchens

Akkretionsscheibe
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines massiven
Probekörpers
Last Stable Circular Orbit (ISCO)

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).

YouTube Video: https://www.youtube.com/watch?v=Zh5p9Sro_VU&list=PLn5gYfEKlag8nps1GKLqUW35AOgQY7aM2

Anlässlich der bahnbrechenden Aufnahme des ersten Bildes eines schwarzen Lochs im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87, wurde am 17. April 2019 um 20 Uhr ein öffentlicher, populärwissenschaftlicher Abendvortrag im Otto Stern Zentrum (OSZ H1) am Campus Riedberg der Goethe Universität gehalten. Es sprachen die drei Principal Investigators des europäischen Black Hole Cam-Projekts (L.Rezzolla, M.Kramer und H.Falke).

das Bild des schwarzen Lochs

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativitätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).

Echte Singularität im Zentrum

Ereignishorizont

Photonensphäre
Letzte stabile
kreisförmige
Bahnbewegung eines
masselosen Teilchens

Akkretionsscheibe
Letzte stabile kreisförmige Bahn-
bewegung eines massiven
Probekörpers
Last Stable Circular Orbit (ISCO)

Benutzen Sie hierfür das vorgestellte Maple worksheet und nehmen Sie an das schwarze Loch in M87 rotiere nicht und habe eine Masse von $6.5 \cdot 10^9$ Sonnenmassen. Berechnen Sie wo sich der Ereignishorizont und die letzte stabile kreisförmige Bahnbewegung eines massiven Körpers (ISCO) befindet (in Einheiten von km). Wie viel Zeit benötigt ein Körper auf der ISCO-Trajektorie um einmal um das schwarze Loch zu kreisen?

[Download Maple Worksheed](#)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 01.05.2019

[Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple](#)

Das Schwarze Loch in M87

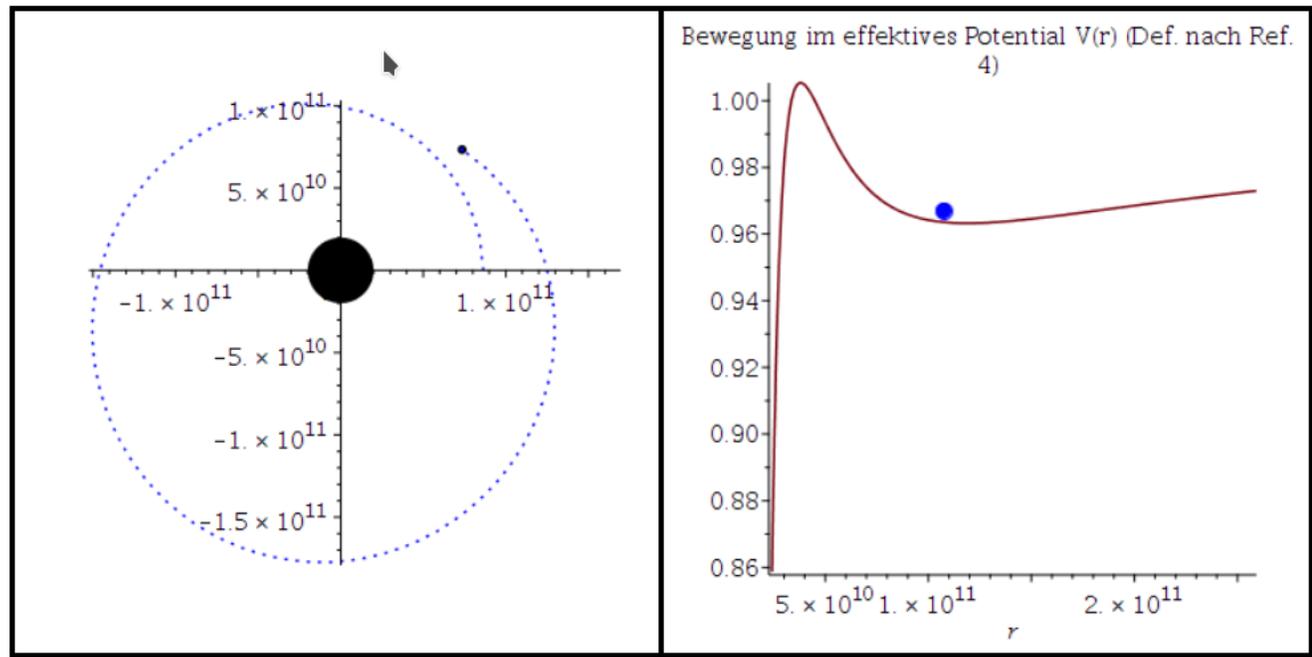
(ohne Rotation)

Einführung

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit

```
Ref. 4)":  
display(Array([Animat1,Animat2]));
```

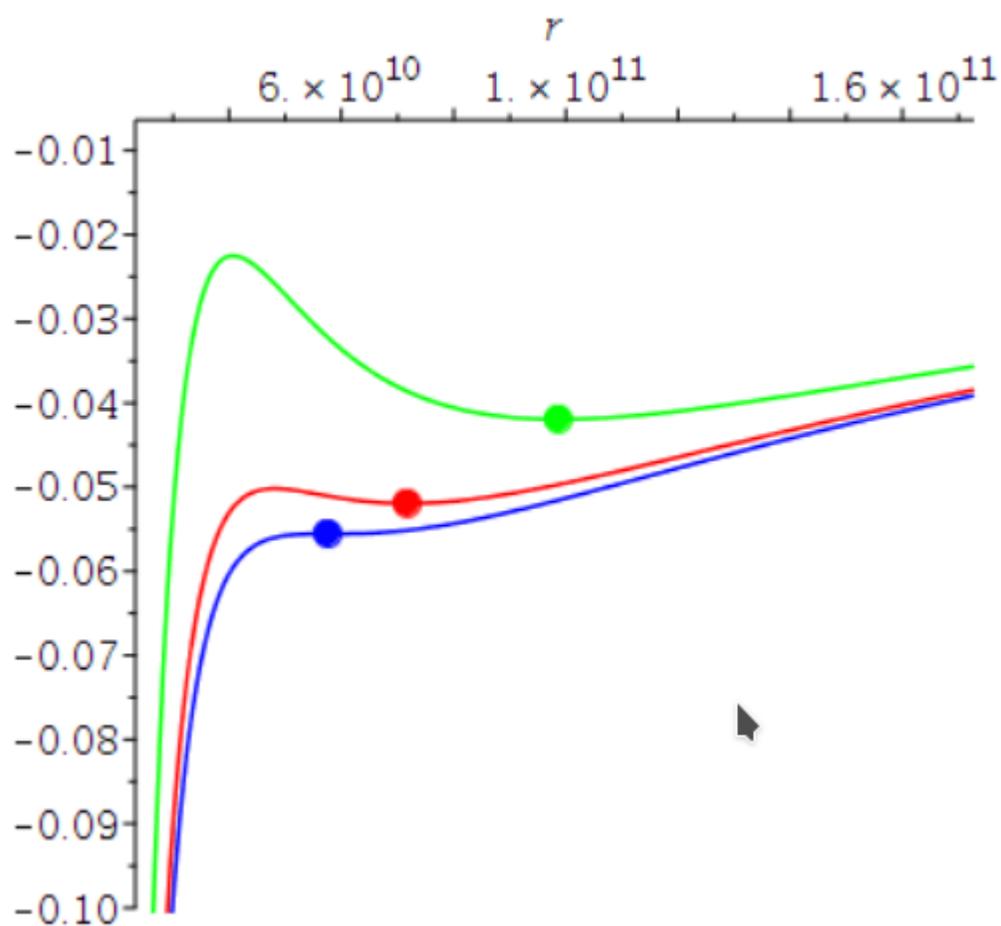
Beispiel: Elliptische Bahn eines Probekörpers



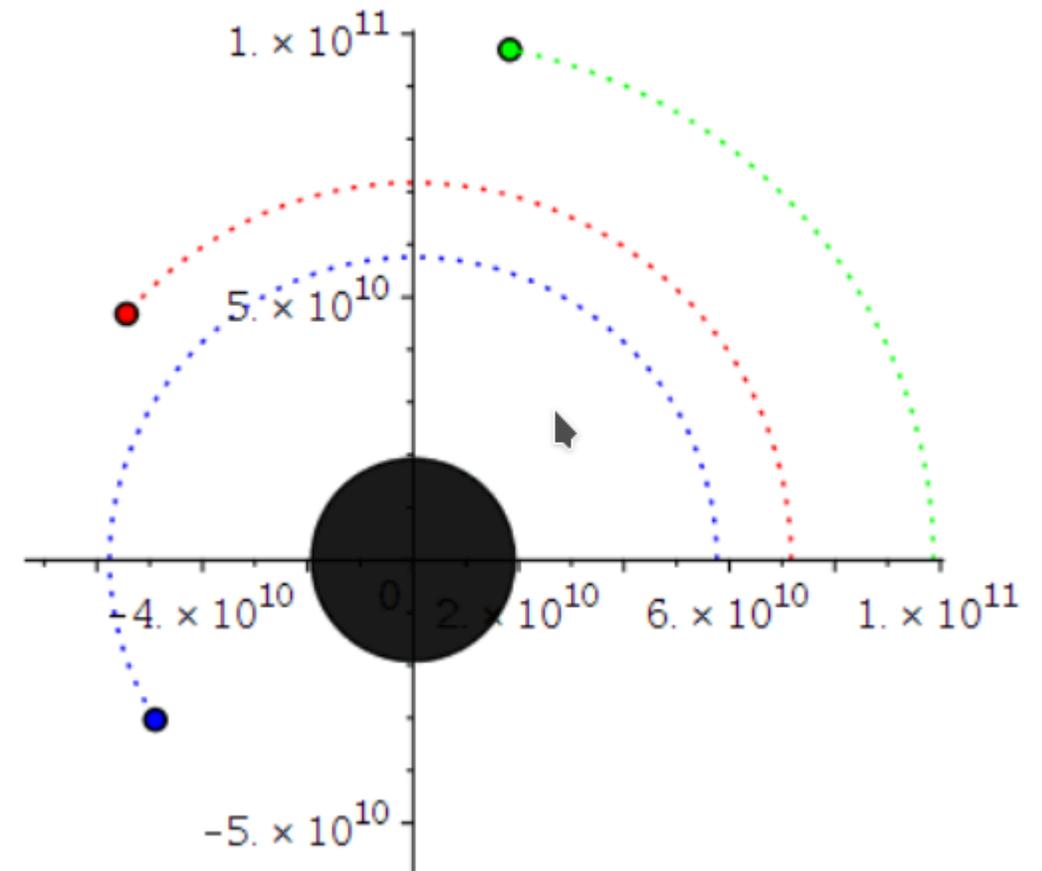
```
EW_Sonne:=evalf(arctan(R_Sonne/A_ESonne));  
convert(evalf(round((i*lend/frames/(c*60*60))*1000)*0.001,string),"Stunden"]]
```

Das effektive Potential eines Probekörpers am ISCO hat eine Sattelpunkteigenschaft

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für drei verschiedene Drehimpulse



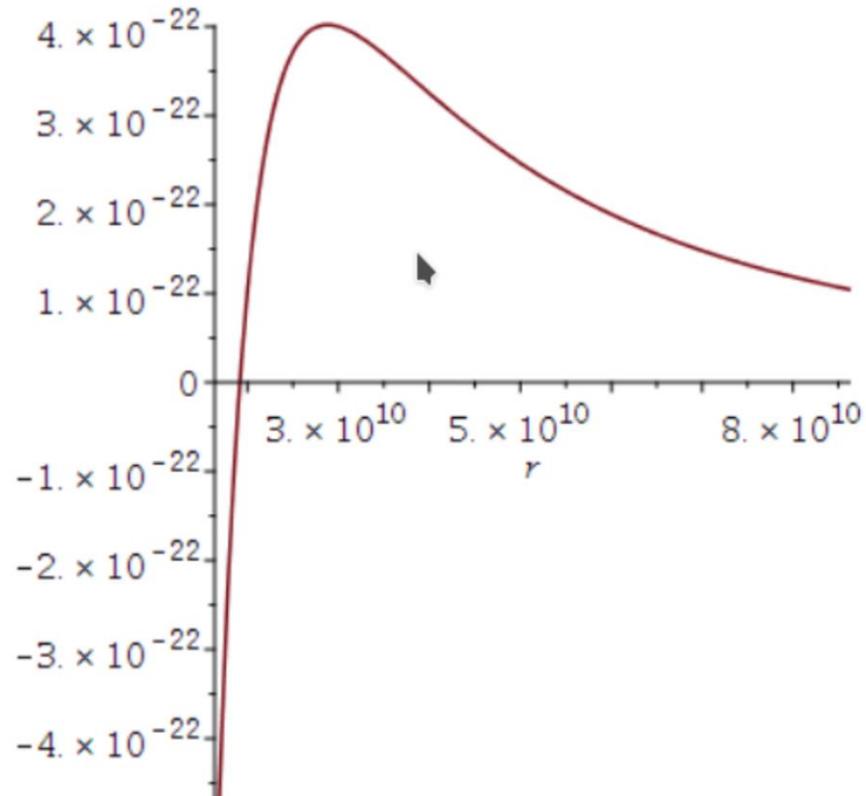
Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO



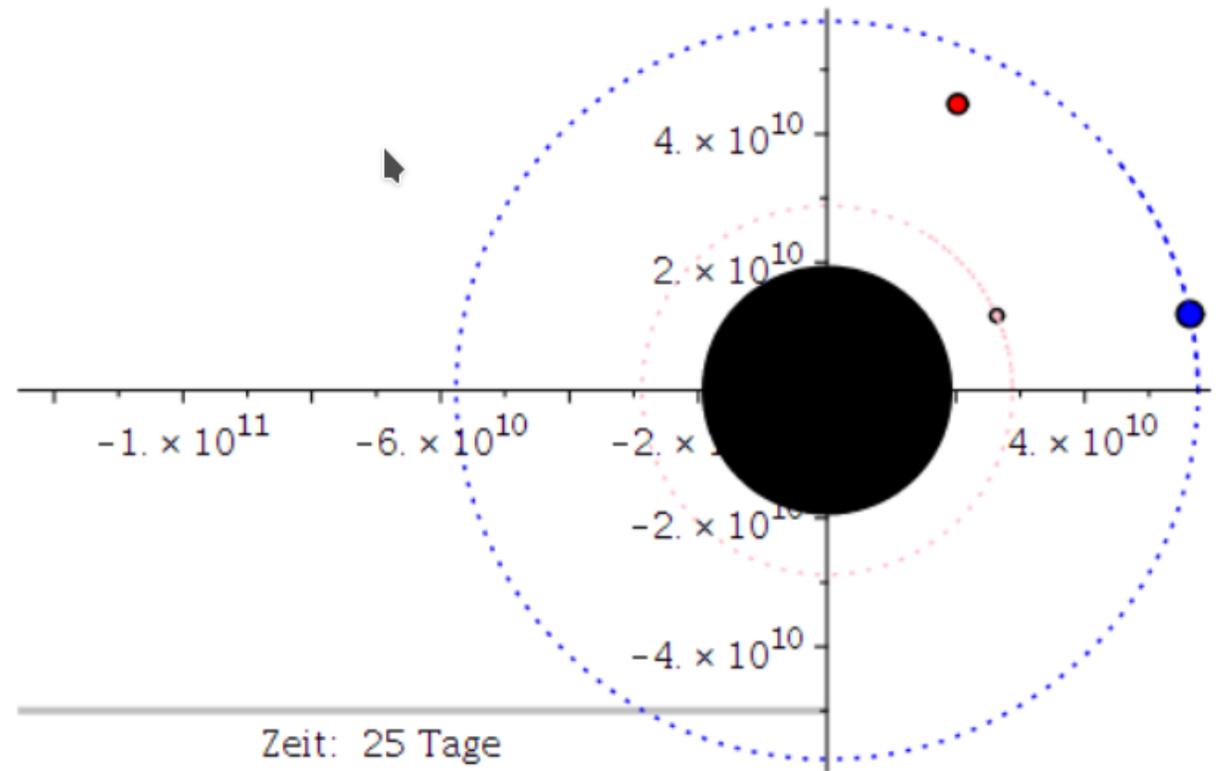
Masselose Teilchen (Photonen): Das effektive Potential und die Photonensphäre bei $3M$

$$V_{\text{effPhotonHobson}} := (r, M) \mapsto \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für
Photonen



Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Bild des schwarzen
Lochs in M87



Blau: ISCO, Pink: Photonensphäre

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde:

Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Bild des schwarzen Lochs in M87

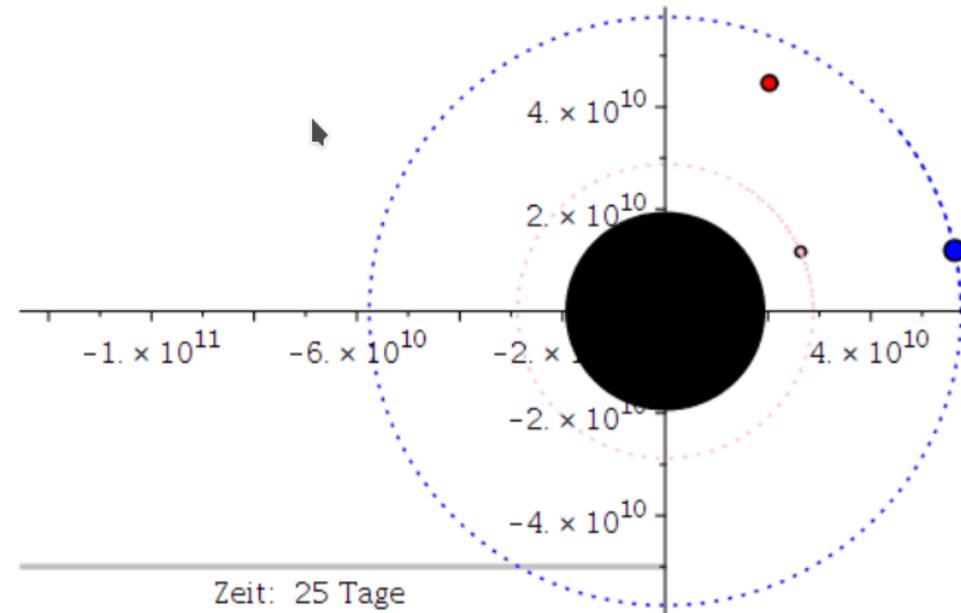
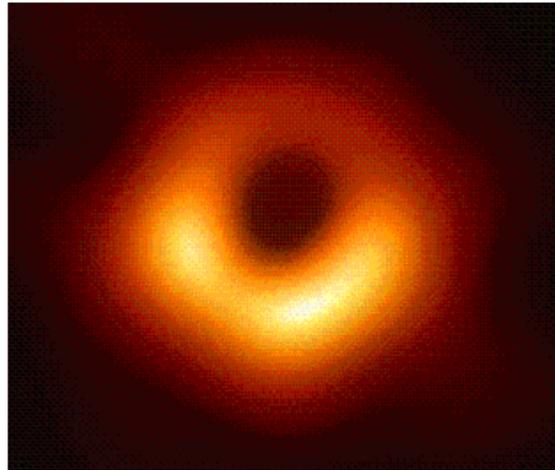


Abb. 1: Erstes Bild eines schwarzen Lochs im Vergleich mit den Simulationsergebnissen des Maple- Worksheets.

Das Bild zeigt das schwarze Loch im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87; bzw. ein wenig genauer, die um ein schwarze Loch entstehende Radiostrahlung (das Bild wurde mittels eines weltweiten Verbunds von Radiowellenteleskopen (EHT: Event Horizon Teleskop) sichtbar gemacht). In Kürze (voraussichtlich im Sommer 2019) werden die aufgenommenen

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

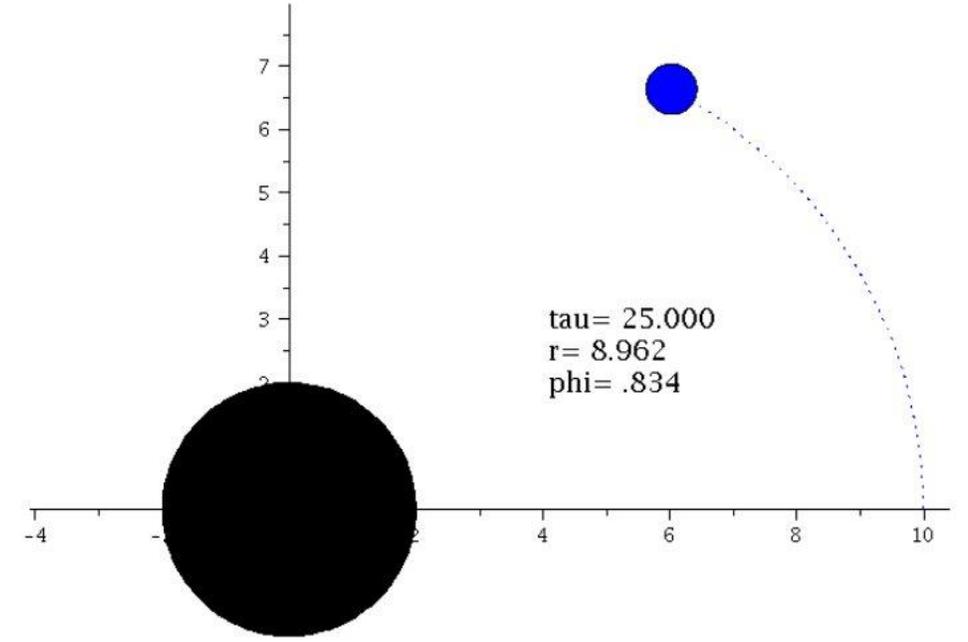
$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} ,$$

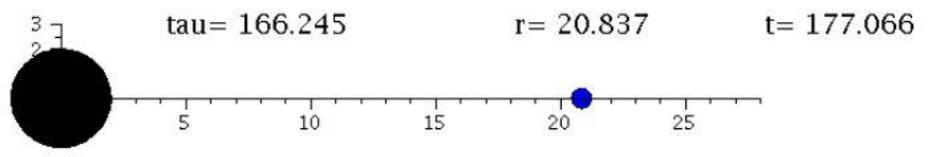
wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung numerisch und wählen Sie dabei die folgenden Anfangsbedingungen. Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=15.4$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0.031$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau=50$ befindet und geben Sie den Radius r und die polare Koordinate ϕ an.



$r =$, $\phi =$

Submit Answer Tries 0/20

Sie befinden sich im Abstand von 10 km von einem nichtrotierenden schwarzen Loch der Masse $M=1$. Sie möchten ein wichtiges Paket zu Ihrem Begleiterraumschiff abschicken, welches Sie jedoch nur mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $\frac{dr}{d\tau} = 0.265$ radial nach außen abschießen können. Das Raumschiff kann dem schwarzen Loch nur bis zu einer Entfernung von 20 km nahe kommen und Ihr Paket ausschließlich im Umkehrpunkt (wenn das Paket gerade $\frac{dr}{d\tau}(r) = 0$ hat) auffangen. Können Sie Ihr Paket dem Raumschiff zusenden? Geben Sie an in welchem Abstand vom schwarzen Loch sich Ihr Begleiterraumschiff befinden muss, damit das Paket heil ankommt.



Submit Answer Tries 0/20

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben. Die Art und Weise wie sich der Probekörper um das schwarze Loch bewegen wird mithilfe der radialen Komponente der Geodätengleichung und der Definition eines effektiven Potentials charakterisiert werden:

Maximum des Potentials bei r =

Minimum des Potentials bei r =

Submit Answer Tries 0/20

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

wobei:
$$V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r}$$

Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l: Drehimpuls pro Masse m und E: Energie pro Masse) charakterisiert. Die Masse des schwarzen Loches sei M=1 und der Drehimpuls des Probekörper sei l=4.72. Geben Sie an bei welchem Abstand r sich das Maximum und das Minimum des Potentials befindet. Was bedeutet das Minimum des Potentials?