

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
22. MAI, 2020*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die freiwilligen Übungstermine in diesem Semester nur Online statt.

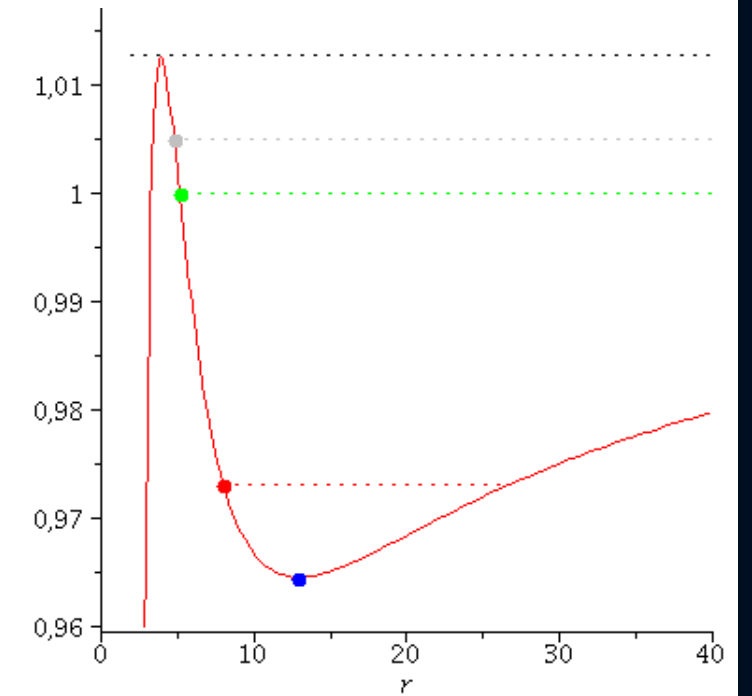
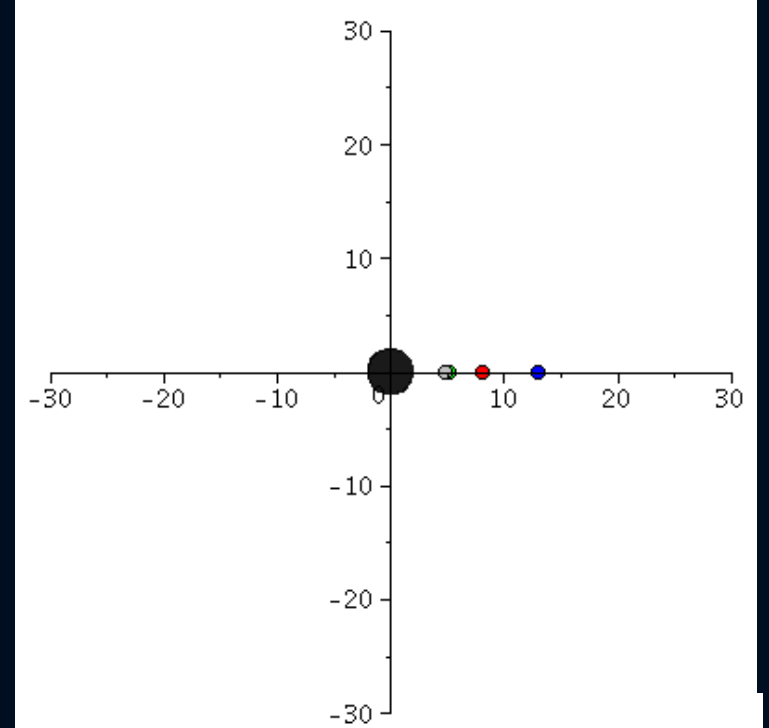
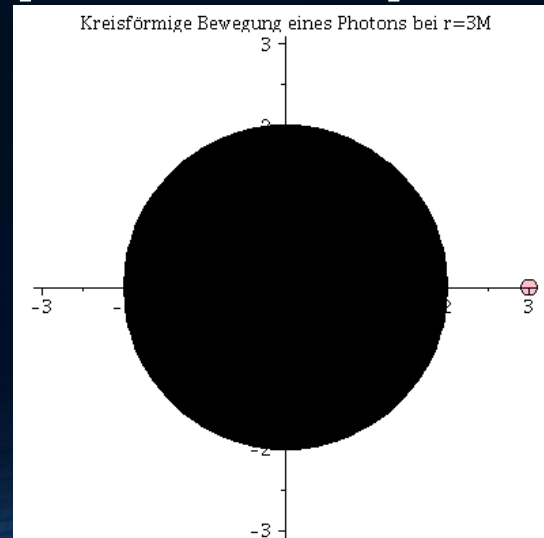
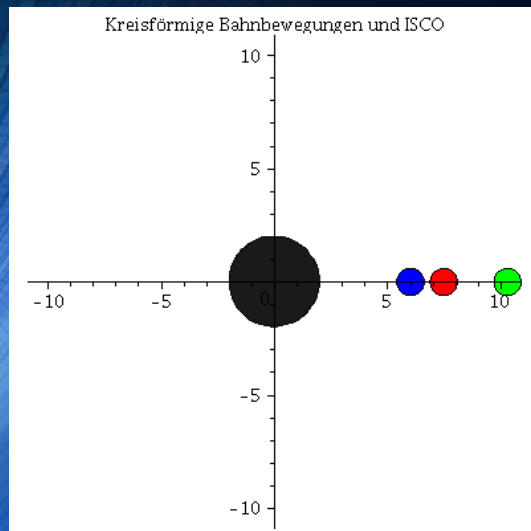
4. Vorlesung

Geodätische Bewegung um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

The *ISCO* and the *photon sphere*



Während der Bewegung erhaltene Größen

Zwei Gleichungen der Geodätengleichung lassen sich wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const} \\ 2. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad , \end{aligned}$$

Die während der Bewegung erhaltenen Größen der Energie (E) und des Drehimpulses (l) lassen sich mittels des Viererimpulses definieren:

Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben ($\lambda = \tau$):

$$\begin{aligned} p_0 &= m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E \\ p_3 &= m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l \end{aligned}$$

Das effektive Potential

Mittels der radialen Gleichung läßt sich das effektive Potential definieren:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

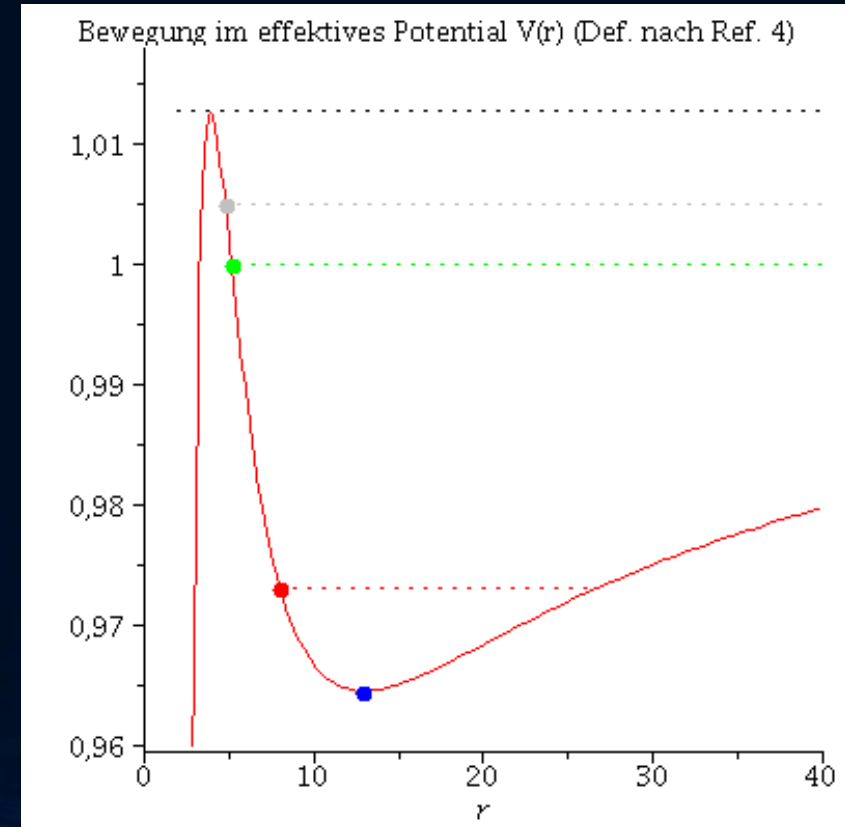
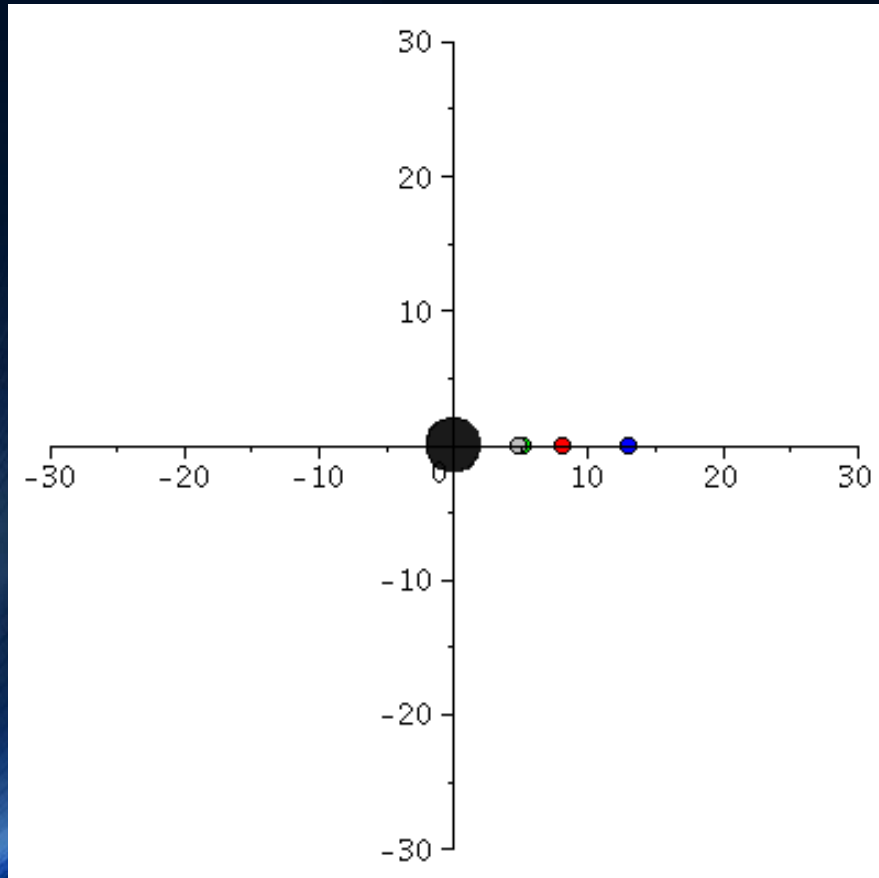
Alternative Definition (siehe Buch von Prof. Rezzolla):

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

3. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der zweiten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden eine Klassifizierung der Umlaufbahnen eines Probekörpers um ein schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

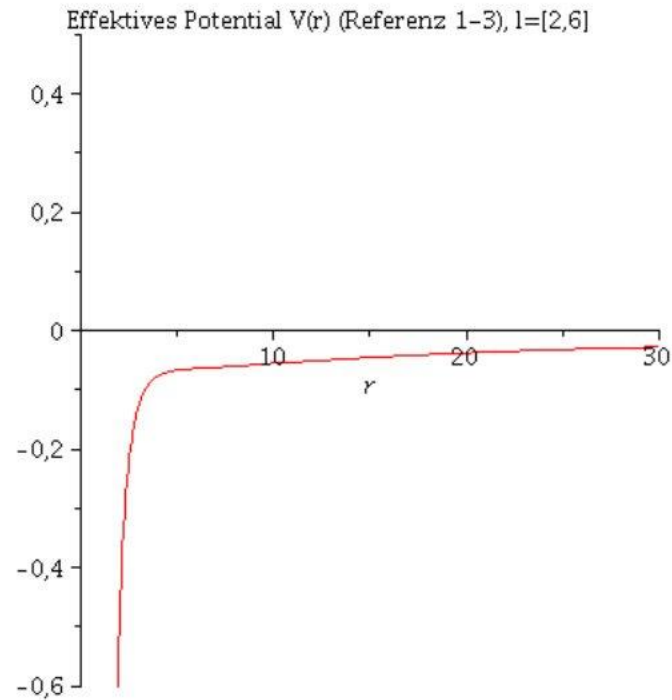
Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers

Wir berechnen die kreisförmigen Bahnbewegungen indem wir das Minimum des effektiven Potentials berechnen.

In der vorigen Animation der unterschiedlichen Bahnbewegungen wurde der Drehimpuls l fest auf den Wert 4.1 und die Masse des schwarzen Lochs auf 1 festgelegt. Das effektive Potential $V(r, M, l)$ war somit nur noch von r abhängig. Die folgende Animation zeigt wie sich die Form des effektiven Potentials bei Variation des Parameters l von $l=2$ bis $l=6$ verändert.

```
> animate(VeffFb(r,1,l),r=0..30,l=2..6,view=-0.6..0.5,title="Effektives Potential V(r) (Referenz 1-3), l=[2,6]",numpoints=500);
```



Wir benutzen nun die Potential-Nomenklatur der 1. bis 3. Literaturangabe (siehe weiter oben). Ist der Wert des Drehimpulses l oberhalb einer gewissen Grenze, so sind stabile Bahnen möglich, da ein Minimum im Potential vorhanden ist. Kreisförmige Bahnbewegungen sind dadurch charakterisiert, dass der Wert des Radiuses sich im Laufe der Zeit nicht verändert und somit sich der radiale Abstand des Probekörpers vom schwarzen Loch gerade im Minimum des effektiven Potentials befindet. Es muss somit gelten:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{Bedingung für kreisförmige Bahnverläufe}$$

> `Diff(V(r,M,l),r)=0;`
`ExtremaV:=diff(Veff(r,M,l),r)=0;`

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} V(r, M, l) &= 0 \\ \text{ExtremaV} &= \frac{M}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{3Ml^2}{r^4} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

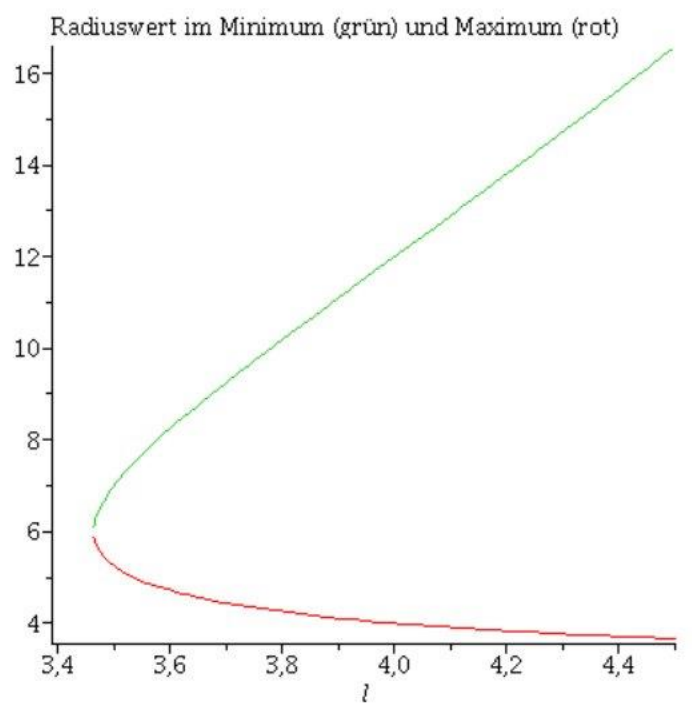
Lösen wir diese Gleichung nach r auf, so erhalten wir die folgenden Lösungen, wobei der erste (positives Vorzeichen) Wert dem Minimum und der zweite (negatives Vorzeichen) dem Maximum entspricht:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\pm} = \frac{l}{2M} \left(l \pm \sqrt{l^2 - 12M^2} \right)$$

$$r_{extr} := \frac{1}{2} \frac{(l + \sqrt{l^2 - 12 M^2}) l}{M}, -\frac{1}{2} \frac{(-l + \sqrt{l^2 - 12 M^2}) l}{M} \quad (2.3.2)$$

Darstellen des Radiuswertes im Minimum (grün) und Maximum (rot) des effektiven Potentials

```
> plot({subs(M=1, rextr[1]), subs(M=1, rextr[2])}, l=3.4..4.5, title="Radiuswert im Minimum (grün) und Maximum (rot)");
```



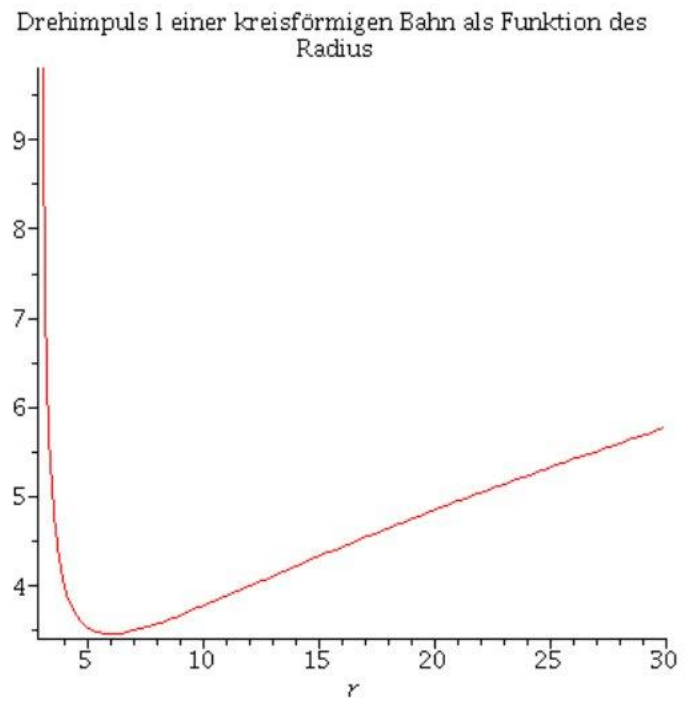
Der Drehimpuls l für eine kreisförmige Bahnbewegung ergibt sich durch Auflösen von V'=0 nach l:

Die beiden Lösungen entsprechen rechts und links rotierenden Probekörpern. Kreisförmige Bahnbewegungen sind somit durch die folgende Bedingung an das effektive Potential charakterisiert:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow l = \pm \frac{\sqrt{Mr}}{\sqrt{r-3M}}$$

Man erkennt an dieser Stelle schon, dass stabile kreisförmige Bahnbewegungen nur möglich sind, falls $r \geq 3M$. Darstellung einer Lösung:

```
> plot(subs(M=1,lextr[2]),r=3.1..30,title="Drehimpuls l einer kreisförmigen Bahn als Funktion des Radius");
```



Die innerste stabile Kreisbahn hat die Eigenschaft: $V'=0$ und $V''=0$. Der Drehimpuls l muss somit einen Wert annehmen, dass das effektive Potential einen Sattelpunkt bei einem speziellen Radiuswert annimmt:

$$\frac{dV}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V}{dr^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r = 6M, \quad l = 2\sqrt{3}M}_{\text{ISCO}}$$

```
> ExtremaV2:=diff(VeffFb(r,M,l),r,r)=0;  
lISCO:=solve(simplify(subs(r=rextr[1],ExtremaV2)),l);  
rISCO:=solve(simplify(subs(l=lextr[2],ExtremaV2)),r);
```

$$\text{ExtremaV2} := -\frac{2M}{r^3} + \frac{3l^2}{r^4} - \frac{12Ml^2}{r^5} = 0$$

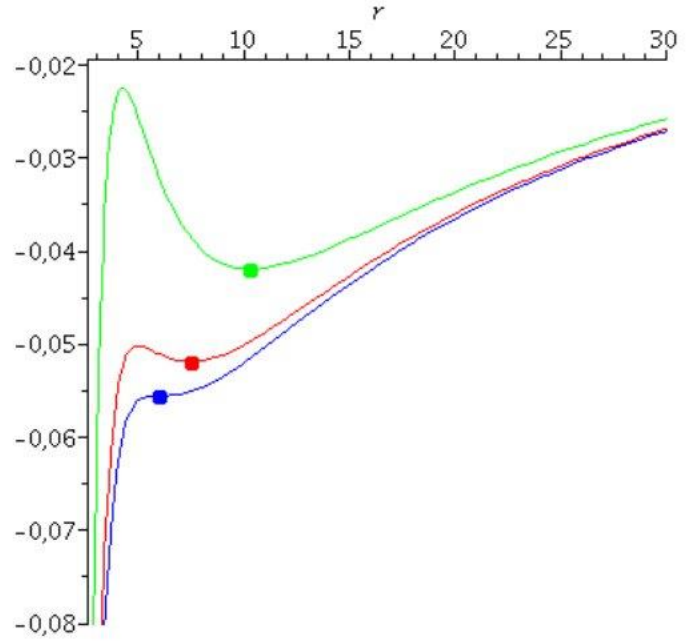
$$l_{\text{ISCO}} := 2\sqrt{3}M, -2\sqrt{3}M$$

$$r_{\text{ISCO}} := 6M$$

(2.3.4)

Definition der Anfangswerte der innersten stabilen Kreisbahn und zweier weiterer stabilen kreisförmigen Bahnbewegungen.

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für drei verschiedene Drehimpulse



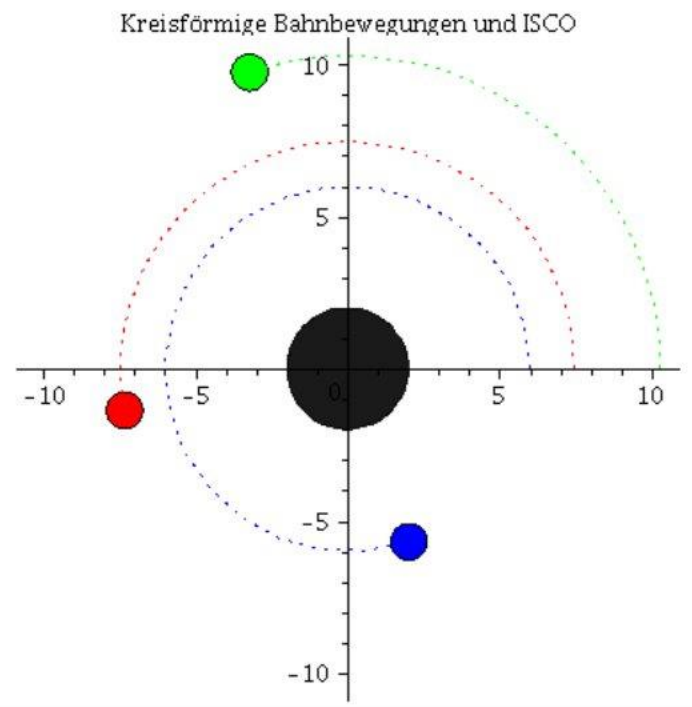
Numerische Lösung der drei Bahnbewegungen:

```
> LoesA:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0A,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0A,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0A},  
               {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesB:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0B,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0B,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0B},  
               {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesC:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0C,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0C,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0C},  
               {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

Animation der Bewegungen: Der ISCO ist die blaue Kurve

```
[4])*sin(rhs(LoesC(i*lend/frames)[2])),0.6,color=green)):
TrajA[i]:=listplot([seq([rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=blue,linestyle=dot):
TrajB[i]:=listplot([seq([rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=red,linestyle=dot):
TrajC[i]:=listplot([seq([rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=green,linestyle=dot):
Ani[i]:=display({KoerperA[i],KoerperB[i],KoerperC[i],TrajA[i],TrajB[i],TrajC[i],BH});
od:
```

```
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO");
```



>

Bewegung von Licht (Photonen) um ein schwarzes Loch in der Ebene (Die Photonensphäre)

In der Literatur wird die Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle
3. Allgemeine Relativitätstheorie by Torsten Fließbach
4. Relativistic hydrodynamics by Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti

Mittels der Eigenschaft für Photonen ($ds^2 = 0$) vereinfacht sich die radiale Gleichung der Geodätengleichung und man kann ein effektives Potential definieren, welches allein von der Masse des schwarzen Lochs abhängt.:

$$\frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{b^2}$$
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) ,$$

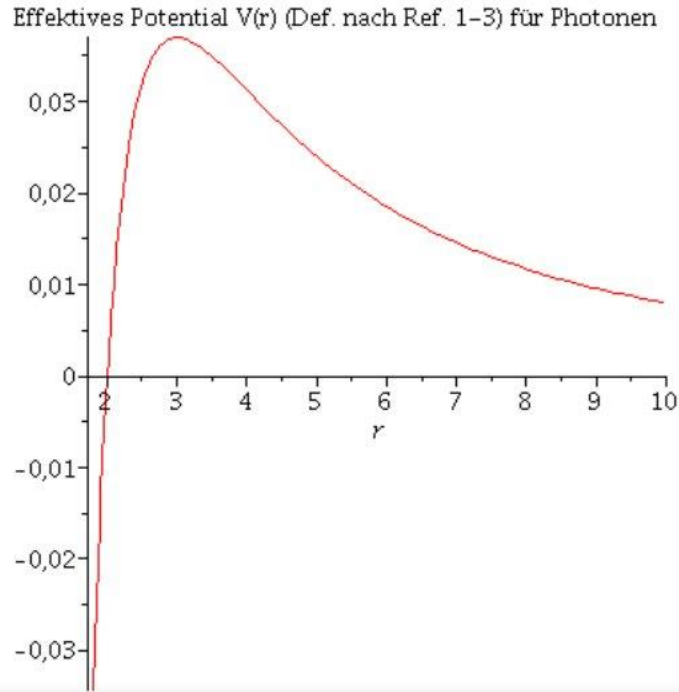
wobei der Parameter b der Impaktparameter der Photonenbahn darstellt. Die folgende Abbildung zeigt das effektive Potential (Definition nach Buch 1. bis 3.) als Funktion des Radius bei einer Masse von $M=1$:

>

```
setM=1;
VeffPhotonHobson:=(r,M)->1/r^2*(1-2*M/r);
Pot:=plot(VeffPhotonHobson(r,setM),r=1.8..10);
display(Pot,title="Effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 1-3) für Photonen");
```

```
> setM=1:  
VeffPhotonHobson:=(r,M)->1/r^2*(1-2*M/r);  
Pot:=plot(VeffPhotonHobson(r,setM),r=1.8..10):  
display(Pot,title="Effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 1-3) für Photonen");
```

$$V_{\text{effPhotonHobson}} := (r, M) \rightarrow \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$



Mittels $ds^2=0$ (für Photonen) kann man die folgenden Anfangswerte für eine Photonenkreisbahn bei $r=3$ berechnen:

```
> setM=1:
  t0:=0:
  phi0:=0:
  theta0:=Pi/2:
  dtheta0:=0:
  dr0:=0:
  r0:=3:
  dphi0:=(1/9)*sqrt(3):
  dt0:=1:
```

Der Anfangswert für $dphi0$ wurde hierbei mittels des infinitesimalen Weglängenelements $ds^2=0$ berechnet:

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):
  ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1])):
  ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]):
  subs({dr=0,dtheta=0,cos(theta)=0},ds2)=0;
  dphi=solve(subs({dr=0,dtheta=0,cos(theta)=0,M=setM,r=r0},ds2)=0,dphi);
```

$$-\frac{(r^2 - 4rM + 4M^2) dt^2}{r(-r + 2M)} - \frac{(-r^4 + 2r^3M) d\phi^2}{r(-r + 2M)} = 0$$

$$d\phi = \left(\frac{1}{9} \sqrt{3} dt, -\frac{1}{9} \sqrt{3} dt \right)$$

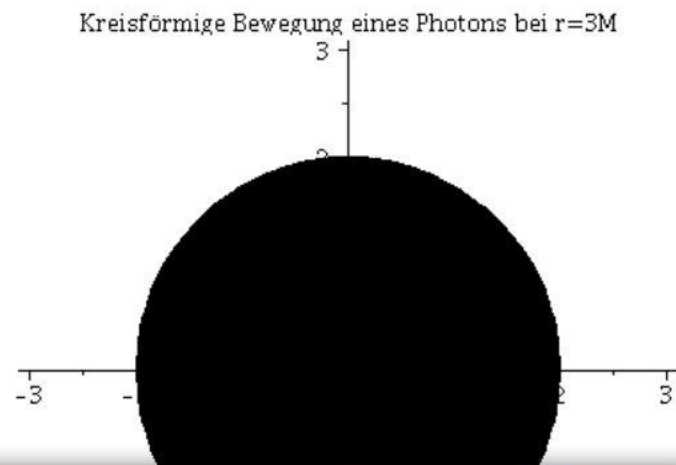
(2.4.1)


```
> Loes:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0},
               {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

Animation der Kreisbahn des Photons:

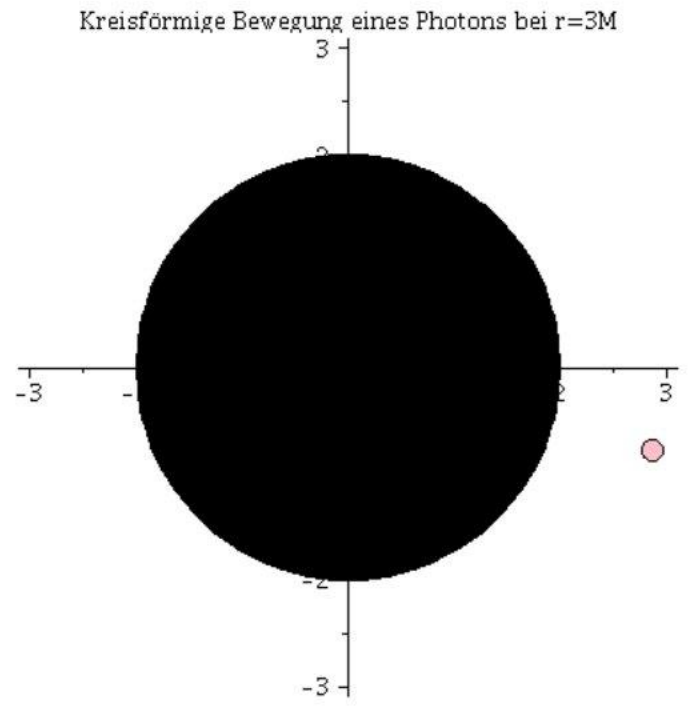
```
> frames:=250:
   lend:=200:
   BH:=display(disk([0,0],2,color=black)):
   for i from 0 by 1 to frames do
   Photon[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]),
                        rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.1,color=pink)):
   Ani[i]:=display({Photon[i],BH});
   od:

> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bewegung eines Photons bei r=3M");
```



```
    BH:=display(disk([0,0],2,color=black));
    for i from 0 by 1 to frames do
    Photon[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)
[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.1,color=pink));
    Ani[i]:=display({Photon[i],BH});
    od:

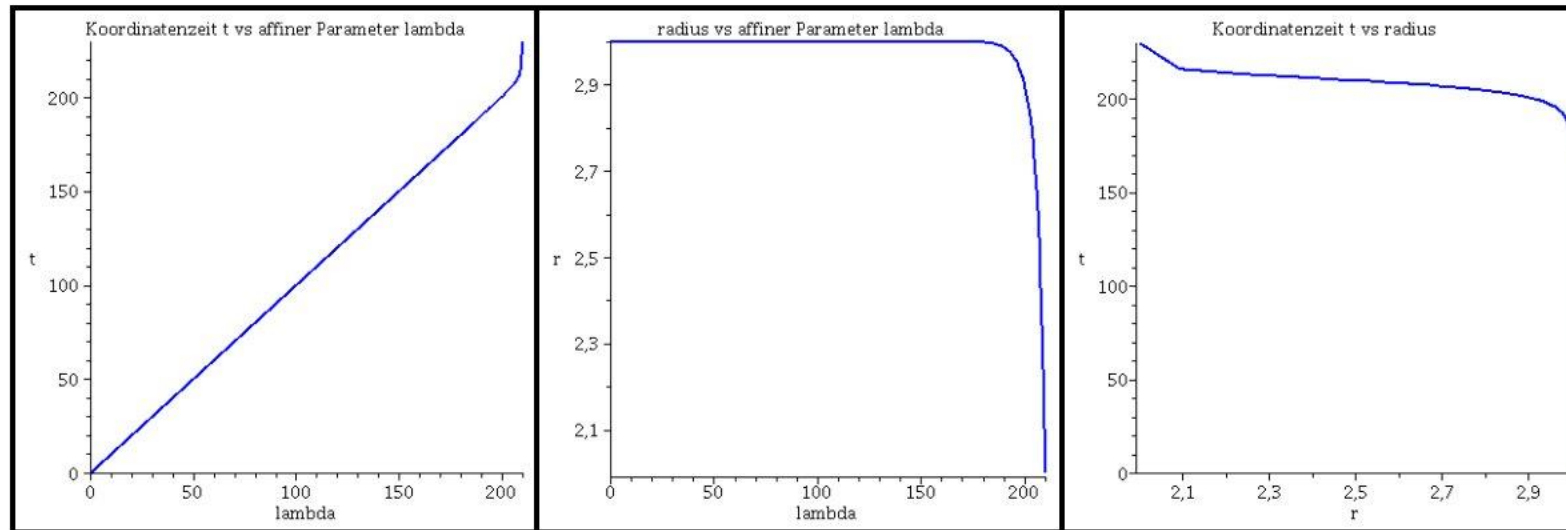
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bewegung eines Photons bei r=3M");
```



Numerischer Beweis der Instabilität der Lösung:

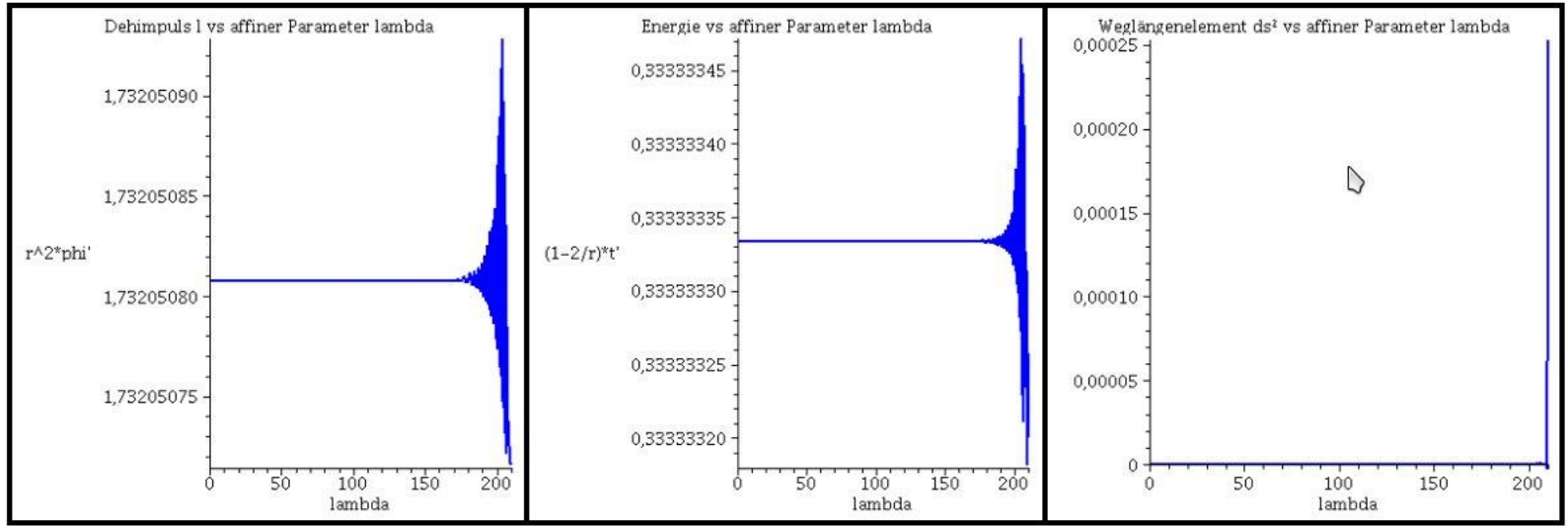
Numerischer Beweis der Instabilität der Lösung:

```
> lend:=210.098:  
Plot1:=odeplot(Loes, [lambda, t(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter lambda"):  
Plot2:=odeplot(Loes, [lambda, r(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="radius vs affiner Parameter lambda"):  
Plot3:=odeplot(Loes, [r(lambda), t(lambda)], 0..lend, numpoints=700, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs radius"):  
display(Matrix(1,3, [Plot1,Plot2,Plot3]));
```



Während der Bewegung erhaltenen Größen (l : Drehimpuls pro Masse m , E : Energie pro Masse und Weglängenelement ds^2):

```
> Plot4:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)^2*diff(phi(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Dehimpuls l vs affiner Parameter lambda");  
Plot5:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*diff(t(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Energie vs affiner Parameter lambda");  
Plot6:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*(diff(t(lambda), lambda))^2 - 1/(1-2/r(lambda))*(diff(r(lambda), lambda))^2 - r(lambda)^2*(diff(phi(lambda), lambda))^2],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Weglängenelement ds^2 vs affiner Parameter lambda");  
display(Matrix(1,3,[Plot4,Plot5,Plot6]));
```



>

[Download Maple Worksheed](#)

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 01.05.2019

[Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple](#)

Das Schwarze Loch in M87

(ohne Rotation)

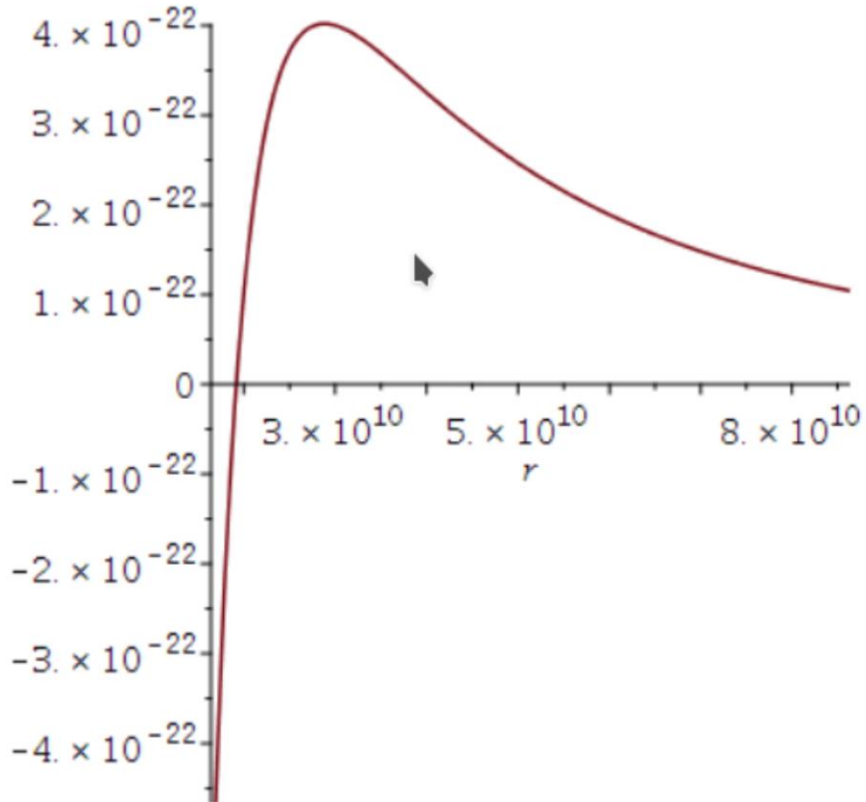
Einführung

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit

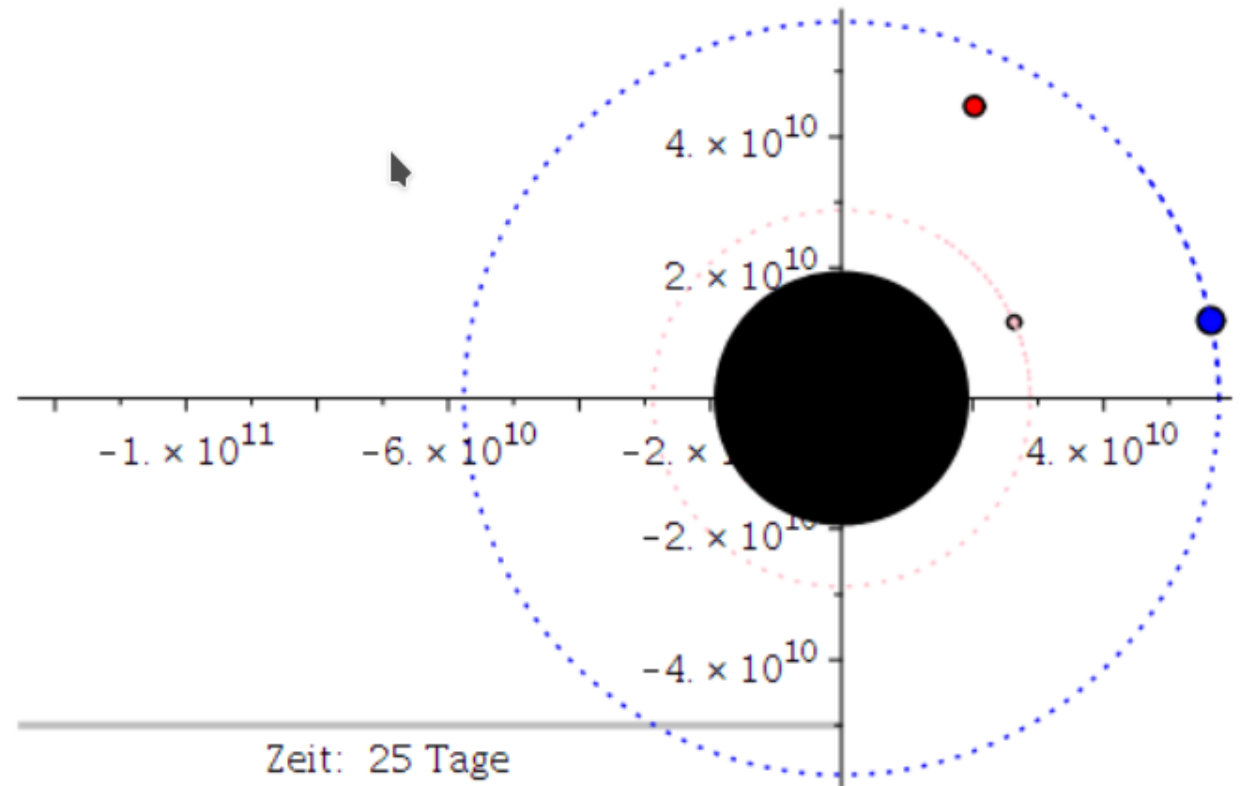
Masselose Teilchen (Photonen): Das effektive Potential und die Photonensphäre bei $3M$

$$V_{\text{effPhotonHobson}} := (r, M) \mapsto \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für
Photonen



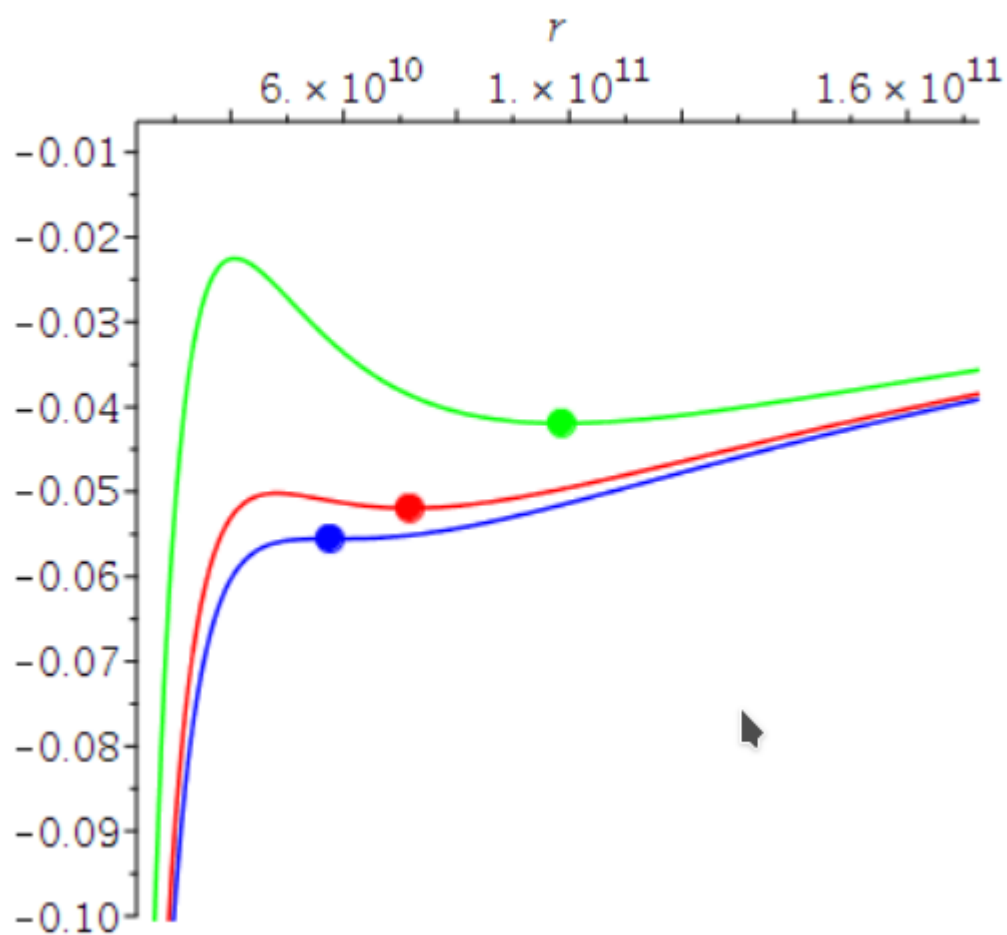
Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Bild des schwarzen
Lochs in M87



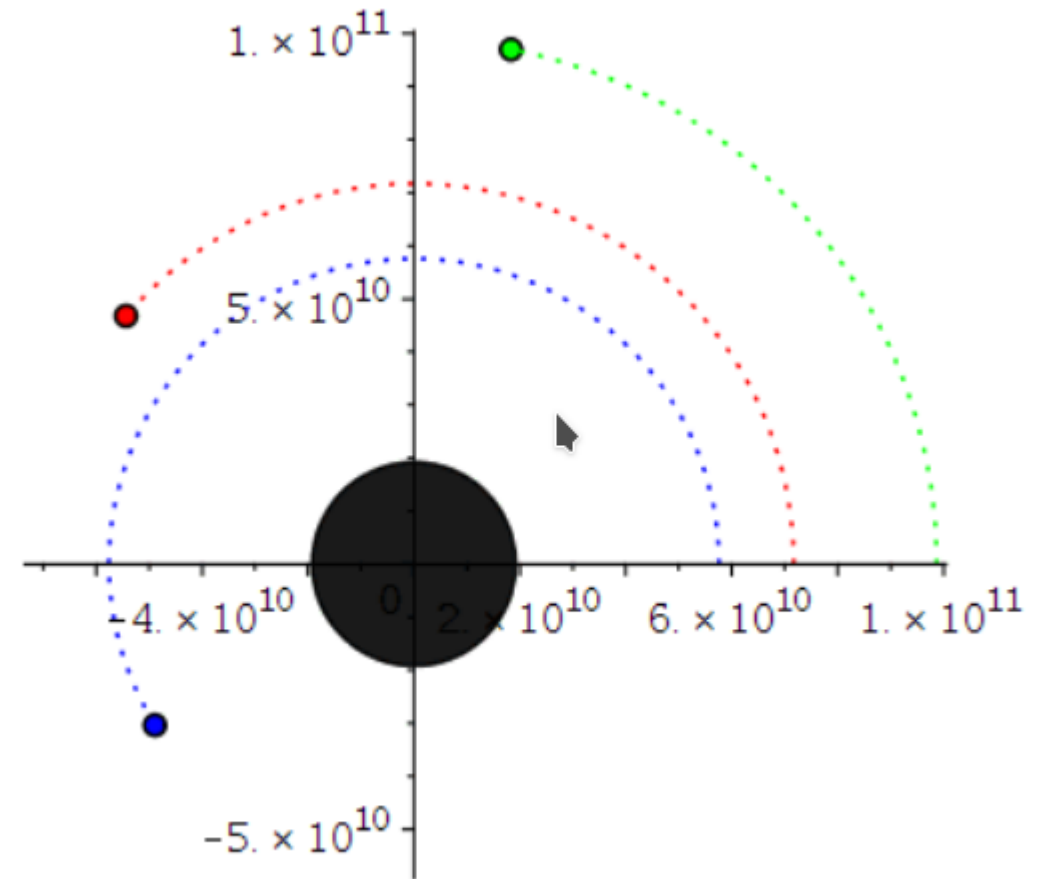
Blau: ISCO, Pink: Photonensphäre

Das effektive Potential eines Probekörpers am ISCO hat eine Sattelpunkteigenschaft

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für drei verschiedene Drehimpulse



Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO



Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativitätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde:

Vergleich der Simulationsergebnisse mit dem Bild des schwarzen Lochs in M87

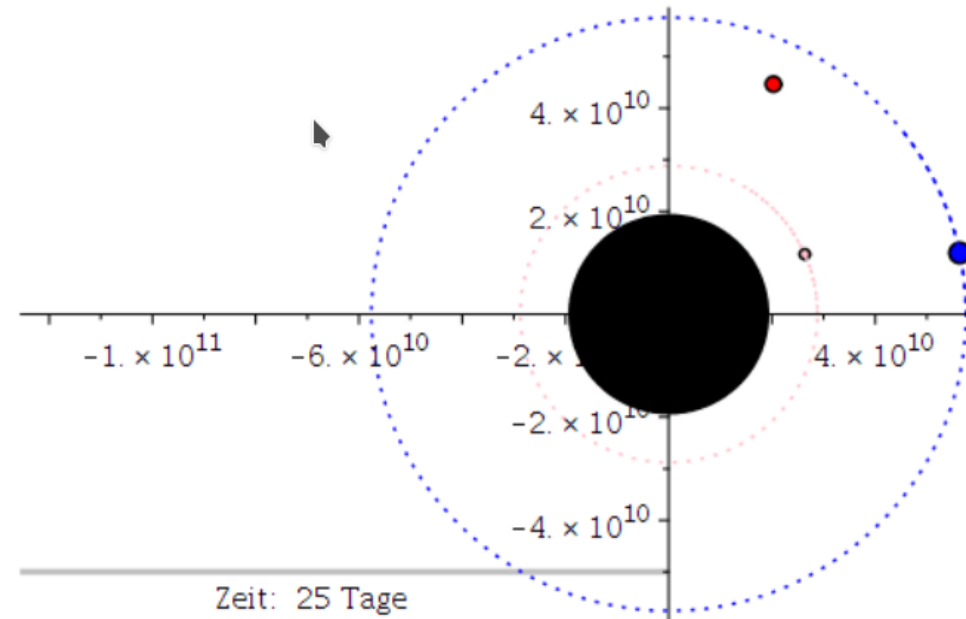
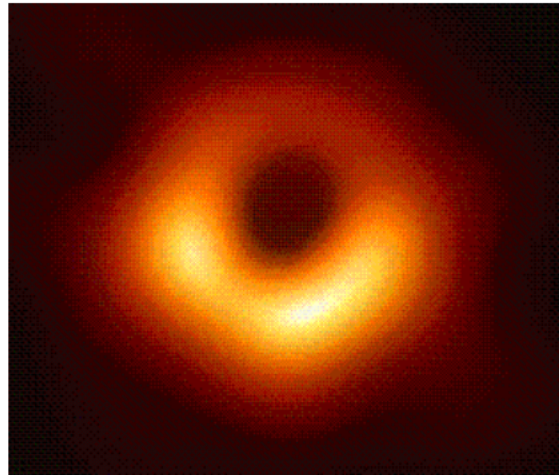
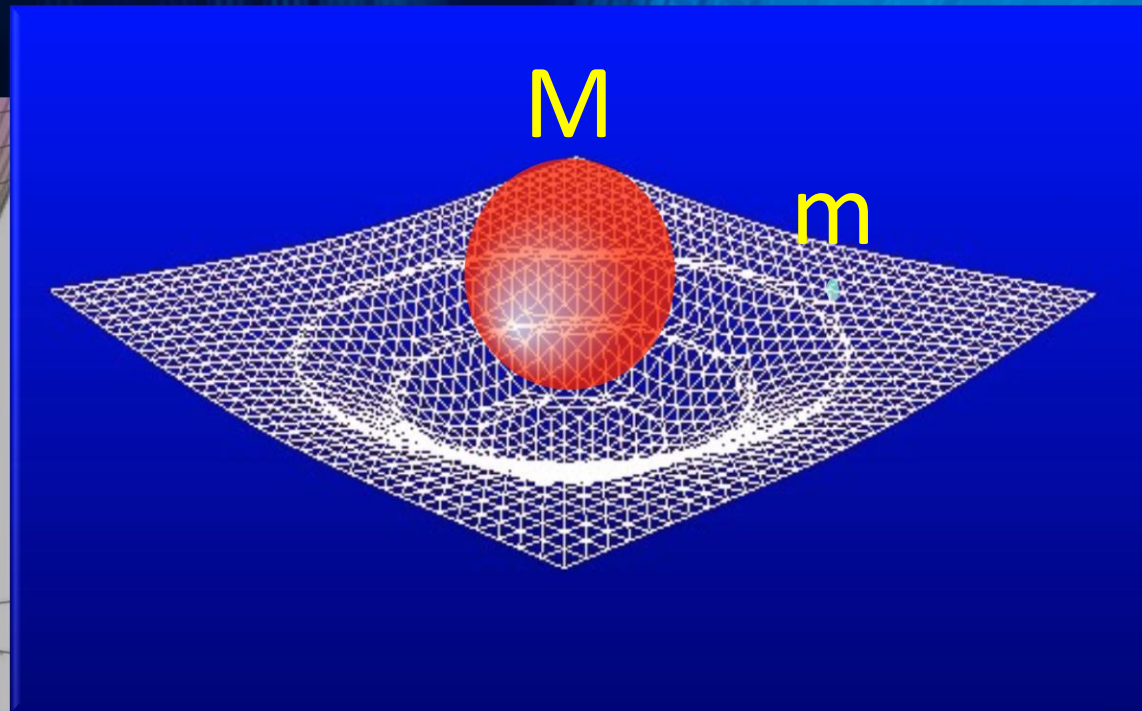
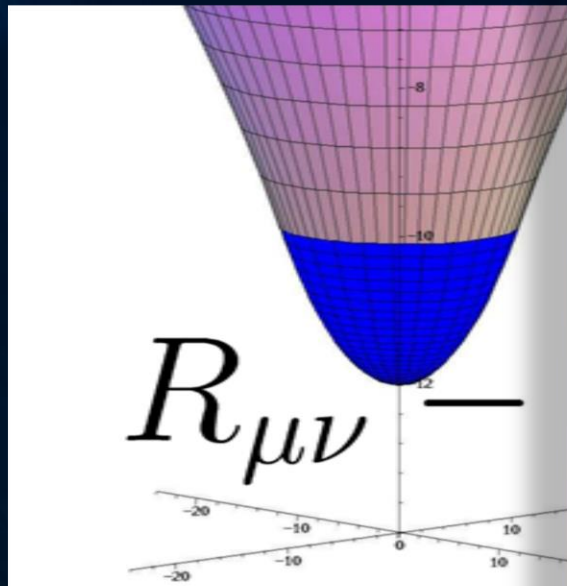


Abb. 1: Erstes Bild eines schwarzen Lochs im Vergleich mit den Simulationsergebnissen des Maple- Worksheets.

Das Bild zeigt das schwarze Loch im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87; bzw. ein wenig genauer, die um ein schwarze Loch entstehende Radiostrahlung (das Bild wurde mittels eines weltweiten Verbunds von Radiowellenteleskopen (EHT: Event Horizon Teleskop) sichtbar gemacht). In Kürze (voraussichtlich im Sommer 2019) werden die aufgenommenen

Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Einsteingleichung



ellte Albert Einstein
orie" (ART) der

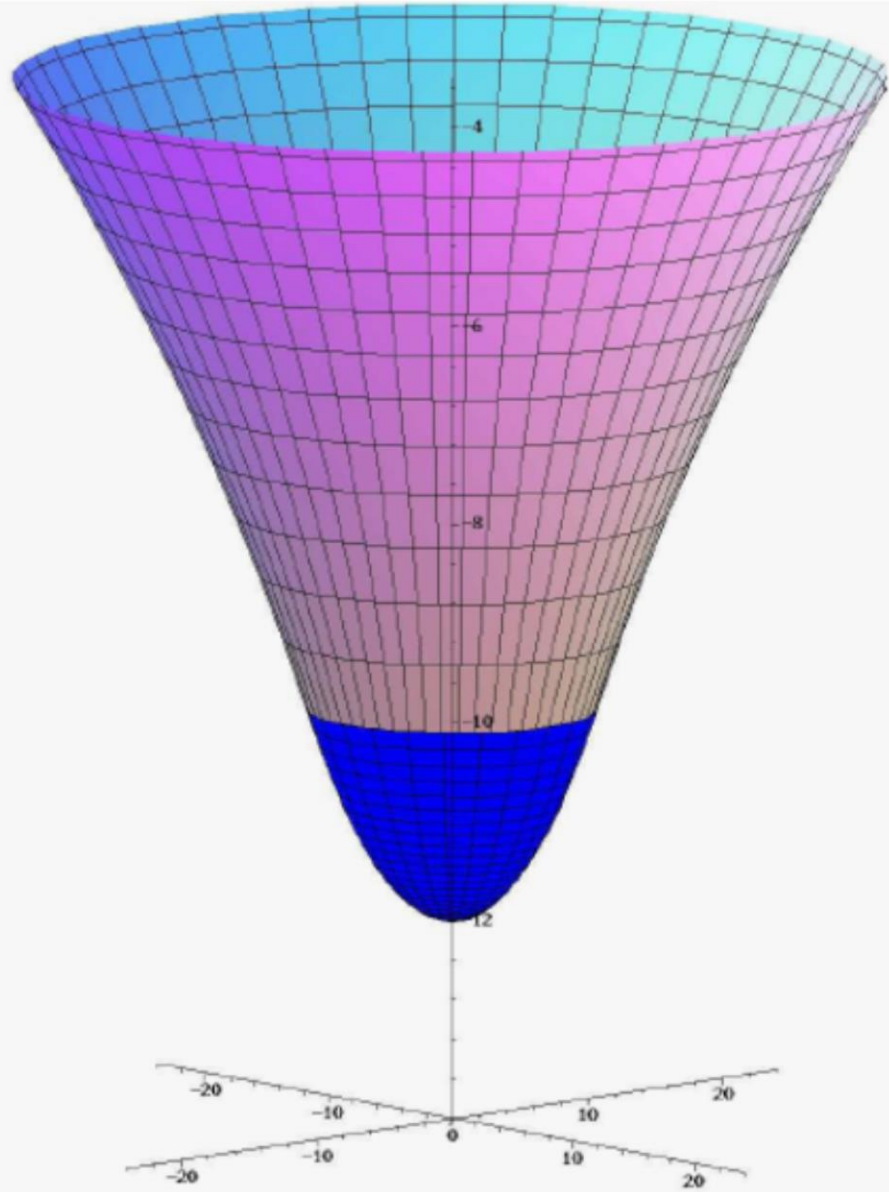
$$T_{\mu\nu}$$


A diagram illustrating the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$. It shows a grid representing spacetime that is curved downwards, forming a well. The curvature is represented by a green and yellow shaded area. Below the diagram is the symbol $T_{\mu\nu}$ and a coordinate system with axes labeled -20, -10, 0, 10, 20.

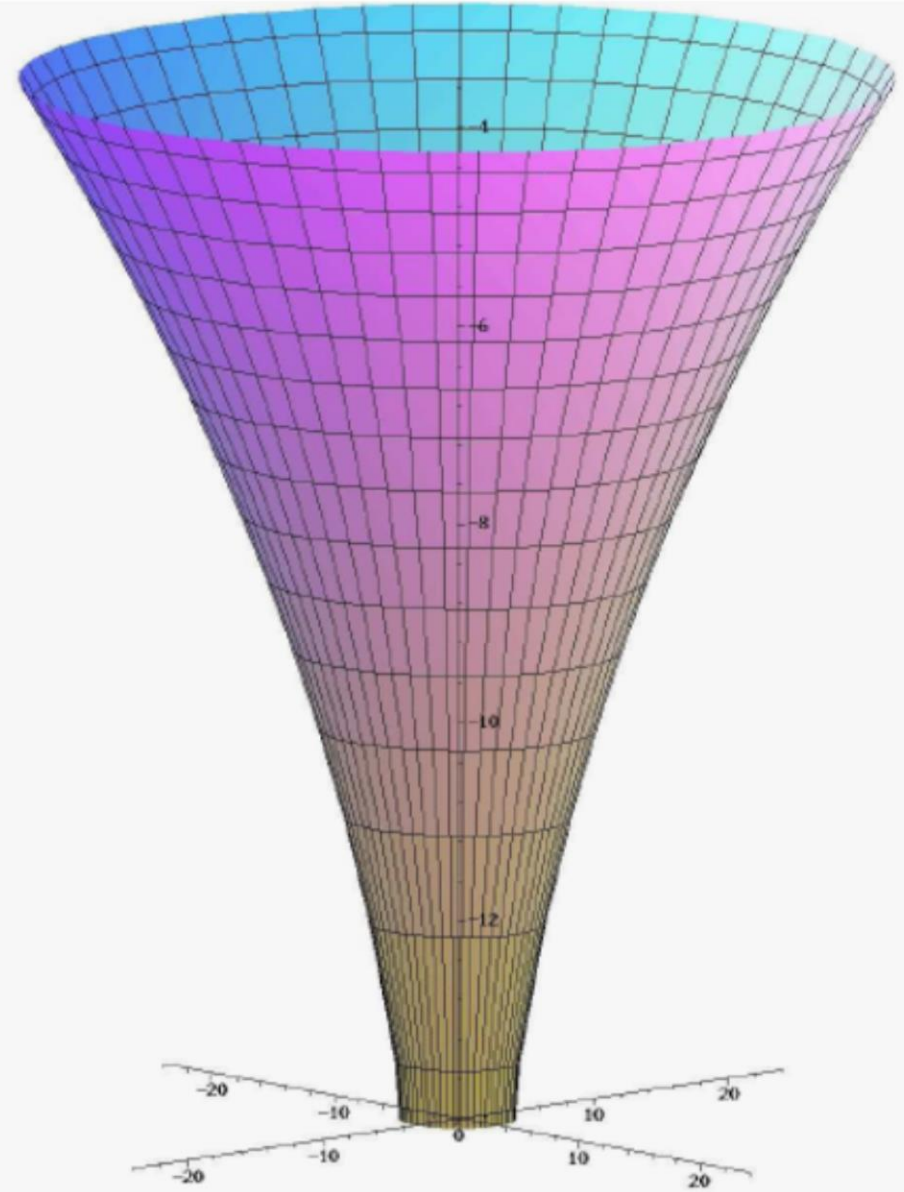
Raumzeit-Krümmung = Energie

Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse der Erde) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit resultiert die Gravitationskraft (Schwerkraft).

Neutronenstern



Schwarzes Loch



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

4. Vorlesung

Einführung

In den folgenden drei Vorlesungen wurde die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen numerisch analysiert. Die raumzeitliche Struktur, die Metrik, wurde hierbei als gegeben vorausgesetzt. In der folgenden Vorlesung betrachteten wir nun wie man die Metrik bei vorgegebener Materieverteilung berechnet. Die zugrundeliegende Gleichung die es hier zu lösen gilt ist die Einstein Gleichung.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

Die innere Schwarzschildlösung eines sphärisch symmetrischen, statischen Objektes (z.B. Erde, Neutronenstern)

Im folgenden wird die Einsteingleichung einer sphärisch symmetrischen und statischen Materieverteilung betrachtet. Die Materie wird hierbei als ideale Flüssigkeit angesetzt.

Von der Einstein Gleichung zur Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung (TOV)

```
> restart:  
with( tensor );
```

Wir definieren einen sphärisch symmetrischen und statischen Ansatz der Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{mit: } x^\mu = (t, r, \theta, \phi) \quad ,$$

wobei die Funktionen $\phi(r)$ und $m(r)$ an dieser Stelle noch unbekannt sind und keine physikalische Bedeutung besitzen.

```
> coord := [t, r, theta, phi]:  
g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):  
g_compts[1,1] := exp(2*phi(r)):  
# a_compts[2,2] := exp(2*lambda(r)):
```

Kovariante Form des Einsteintensors $G_{\mu\nu}$:

> G := Einstein(g, RICCI, RS);

$$\begin{aligned}
 G := \text{table} \left(\left[\text{compts} = \left[\left[-\frac{2 e^{2 \phi(r)} \left(\frac{d}{dr} m(r) \right)}{r^2}, 0, 0, 0 \right], \right. \right. \\
 \left. \left[0, -\frac{2 \left(2 r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 \right)}{r^2 (-r + 2 m(r))}, 0, 0 \right], \right. \\
 \left. \left[0, 0, \frac{1}{r} \left(-\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r - m(r) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \right. \right. \\
 \left. \left. + 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 \right], 0 \right], \right. \\
 \left. \left[0, 0, 0, -\frac{1}{r} \left(\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r \cos(\theta)^2 + m(r) \right. \right. \\
 \left. \left. - m(r) \cos(\theta)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) + 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) \cos(\theta)^2 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 \cos(\theta)^2 \right] \right], \text{index_char} = [-1, -1] \right)
 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Der Energie-Impuls Tensor (rechte Seite der Einsteingleichung) wird als ideale Flüssigkeit angesetzt:

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $e(r)$ und $p(r)$ die Energiedichte und den Druck der Neutronensternmaterie darstellen, die ihrerseits über die Zustandsgleichung $p(e)$ miteinander verknüpft sind.

```
> T:=create([1,-1], array([[e(r),0,0,0],[0,-p(r),0,0],[0,0,-p(r),0],[0,0,0,-p(r)]]));
    Tl:=lower(g,T,1);
    Tu:=raise(ginv,T,2);
    prod(ginv, Tl, [2, 1]);
    contract(T, [1, 2]);
```

$$T := \text{table} \left(\text{compts} = \begin{pmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{pmatrix}, \text{index_char} = [1, -1] \right)$$

$$Tl := \text{table} \left(\text{compts} = \begin{pmatrix} e^{2\Phi(r)} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r p(r)}{-r + 2 m(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 p(r) \end{pmatrix}, \text{index_char} = [-1, -1] \right)$$

(2.1.4)

Wir definieren die Einsteingleichung in der folgenden Form:

$$G_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu} = 0$$

> Einsteingl:=lin_com(G,8*Pi,Tl);

$$\begin{aligned}
 \text{Einsteingl} := \text{table} \left(\text{compts} = \right. & \left. \left[\left[-\frac{2 e^{2\phi(r)} \left(\frac{d}{dr} m(r) - 4 \pi e(r) r^2 \right)}{r^2}, 0, 0, 0 \right], \right. \right. \\
 & \left. \left[0, -\frac{2 \left(2 r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 + 4 \pi r^3 p(r) \right)}{r^2 (-r + 2 m(r))}, 0, 0 \right], \right. \\
 & \left[0, 0, \frac{1}{r} \left(-\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r - m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 + 8 \pi r^3 p(r) \right], 0 \right], \\
 & \left[0, 0, 0, -\frac{1}{r} \left(\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r \cos(\theta)^2 + m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. - m(r) \cos(\theta)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \cos(\theta)^2 \right] \right. \\
 & \left. \right) \quad (2.1.5)
 \end{aligned}$$

> **A:=get_compts(Einsteingl):**

Aufgrund der angenommenen Symmetrie ist die Einsteingleichung ein System von 4 gekoppelten Differentialgleichungen. Im folgenden lösen wir die erste Gleichung der Einsteingleichung (tt-Komponente) nach $\frac{dm}{dr}$ und die zweite Gleichung (rr-Komponente) nach $\frac{d\phi}{dr}$ auf.

> **Einstein1:=diff(m(r), r)=solve(A[1,1],diff(m(r), r));**
Einstein2:=diff(phi(r), r)=solve(A[2,2],diff(phi(r), r));

$$\begin{aligned} \text{Einstein1} &:= \frac{d}{dr} m(r) = 4 \pi e(r) r^2 \\ \text{Einstein2} &:= \frac{d}{dr} \phi(r) = - \frac{m(r) + 4 \pi r^3 p(r)}{r (-r + 2 m(r))} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Aus der Einsteingleichung folgt die Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen (kovariante Erhaltung des Energie-Impulses) sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert (Bemerke: in der Literatur wird die kovariante Ableitung mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet):

Aus der Einsteingleichung folgt die Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen (kovariante Erhaltung des Energie-Impulses) sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert (Bemerke: in der Literatur wird die kovariante Ableitung mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet):

$$\nabla_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = D_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = G^{\mu}_{\nu}{}_{||\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0 \quad .$$

wobei die kovariante Ableitung eines Tensors zweiter Stufe wie folgt definiert ist:

$$\nabla_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} T^{\rho}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} T^{\mu}_{\rho} \quad ,$$

```
> DT:=cov_diff(T, coord, Cf2);  
DTa:=get_compts(contract(DT, [1, 3]))[2]=0;
```

$$DTa := -\left(\frac{d}{dr} \phi(r)\right) p(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r)\right) e(r) - \left(\frac{d}{dr} p(r)\right) = 0 \quad (2.1.7)$$

und nach $\frac{dp}{dr}$ aufgelöst ergibt sich das folgende:

und nach $\frac{dp}{dr}$ aufgelöst ergibt sich das folgende:

```
> diff(p(r), r)=collect(solve(DTa,diff(p(r), r)),diff(phi(r), r));
```

$$\frac{d}{dr} p(r) = (-e(r) - p(r)) \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \quad (2.1.8)$$

Die TOV-Gleichung erhalten wir, indem man diese Gleichung nach $\frac{d\phi}{dr}$ auflöst und das Ergebnis in die zweite Gleichung der Einsteingleichung einsetzt:

```
> solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*(e(r)+p(r))*(-1);
```

$$\frac{d}{dr} p(r) = \frac{(m(r) + 4 \pi r^3 p(r)) (e(r) + p(r))}{r (-r + 2 m(r))} \quad (2.1.9)$$

```
> TOV1:=solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*(e(r)+p(r))*(-1);  
TOV2:=Einstein1;  
TOV3:=Einstein2;
```

$$\begin{aligned} \text{TOV1} &:= \frac{d}{dr} p(r) = \frac{(m(r) + 4 \pi r^3 p(r)) (e(r) + p(r))}{r (-r + 2 m(r))} \\ \text{TOV2} &:= \frac{d}{dr} m(r) = 4 \pi e(r) r^2 \\ \text{TOV3} &:= \frac{d}{dr} \phi(r) = - \frac{m(r) + 4 \pi r^3 p(r)}{r (-r + 2 m(r))} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Das oben abgebildete System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen bezeichnet man als die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichungen (TOV-Gleichung). Bemerkung: In manchen Büchern werden auch lediglich die ersten beiden Gleichungen als TOV-Gleichungen bezeichnet.

Numerische Lösung der TOV-Gleichungen

Im folgenden werden die TOV-Gleichungen numerisch gelöst, indem wir einerseits eine Zustandsgleichung der Materie (eine Funktion $p(e)$) festlegen und von einem Startwert der zentralen Energiedichte im Inneren des sphärisch symmetrischen Objektes nach Außen integrieren.

>

```
a:=10;  
b:=5/3;  
p(r):=a*(e(r))^b;  
W3:=plot(a*x^b,x=0..1,color=blue):  
TOV1:=solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*  
(e(r)+p(r))*(-1);  
TOV2:=Einstein1;  
TOV3:=Einstein2;
```

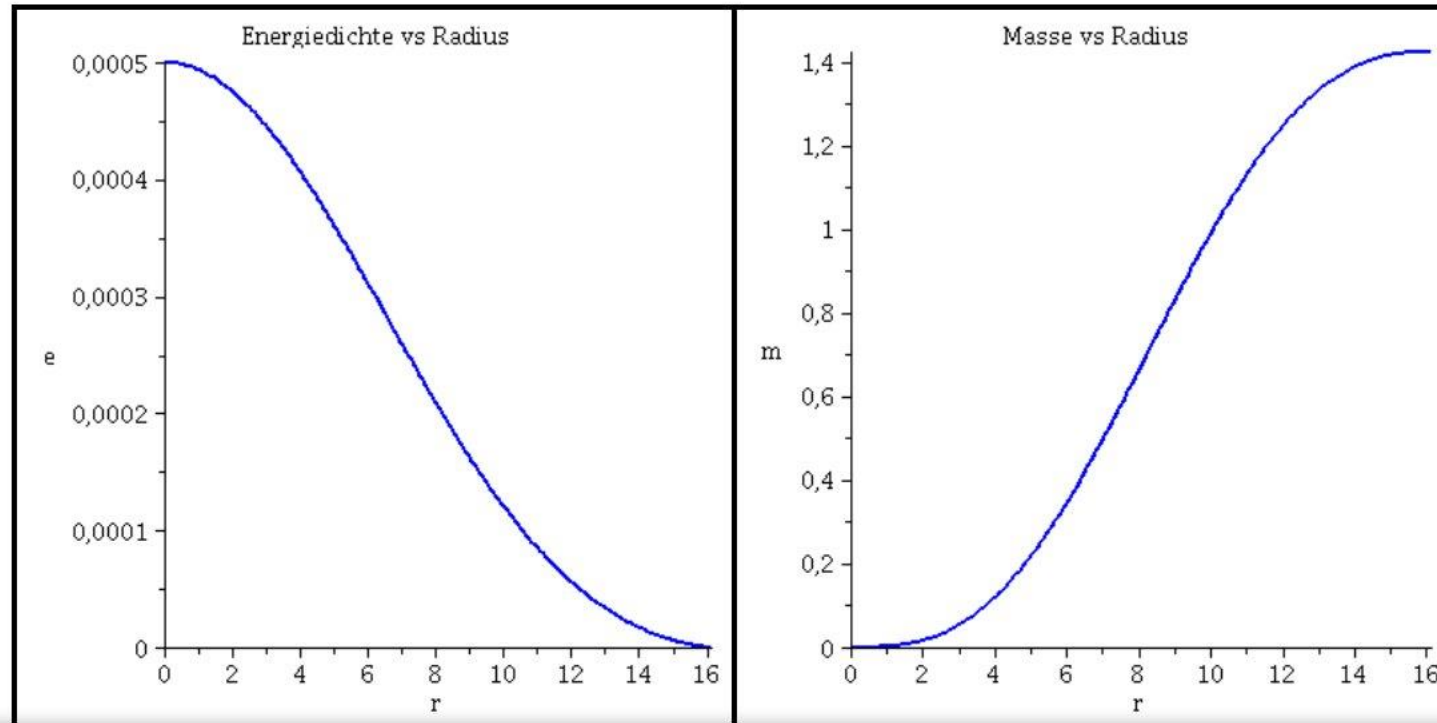
$$\begin{aligned} a &:= 10 \\ p(r) &:= 10 e(r)^{5/3} \\ TOV1 &:= \frac{50}{3} e(r)^{2/3} \left(\frac{d}{dr} e(r) \right) = \frac{(m(r) + 40 \pi r^3 e(r)^{5/3}) (10 e(r)^{5/3} + e(r))}{r (-r + 2 m(r))} \\ TOV2 &:= \frac{d}{dr} m(r) = 4 \pi e(r) r^2 \\ TOV3 &:= \frac{d}{dr} \phi(r) = -\frac{m(r) + 40 \pi r^3 e(r)^{5/3}}{r (-r + 2 m(r))} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Numerische Lösung der Gleichung mit fixierten Randbedingungen im Sternzentrum.

```
> r0:=10^(-14);  
e0:=0.0005;  
Loes:=dsolve({TOV1,TOV2,m(r0)=0,e(r0)=e0},  
{m(r),e(r)},type=numeric,output=listprocedure);
```

Darstellung der Energiedichte ($e(r)$) und der Sternmasse ($m(r)$) als Funktion des radialen Abstands r vom Sternzentrum:

```
> with(plots):  
  rend:=16.12487:  
  Plot1:=odeplot(Loes,[r,e(r)],r0..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Energiedichte vs Radius"):  
  Plot2:=odeplot(Loes,[r,m(r)],r0..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Masse vs Radius"):  
  display(Matrix(1,2,[Plot1,Plot2]));
```



Aufgrund des Birkov Theorems muss die Innenlösung der Metrik in die äussere Schwarzschildmetrik am Sternrand übergehen. Da wir nun die Gesamtmasse des Sterns kennen, können wir auch die innere g_{00} und g_{11} Komponente der Metrik angeben. Wir integrieren nun von der uns schon bekannten Sternoberfläche nach Innen bis $r=0$:

```
> Mass := subs(Loes,m(r)):  
M:=Mass(rend);  
Phi0:=(0.5*ln(1-2*Mass(rend)/rend)):  
Loes1:=dsolve({TOV1,TOV2,TOV3,m(rend)=Mass(rend),e(rend)=10^(-25),phi(rend)=Phi0},  
{m(r),e(r),phi(r)},type=numeric,output=listprocedure);
```

$$M := 1.42503619811206650$$

```
Loes1 := [r = proc(r) ... end proc, e(r) = proc(r) ... end proc, m(r) = proc(r)
```

...

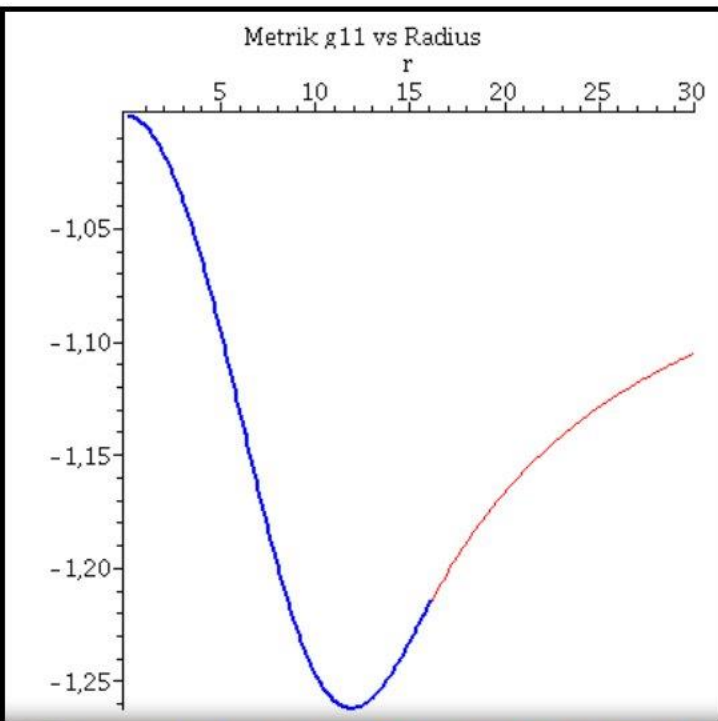
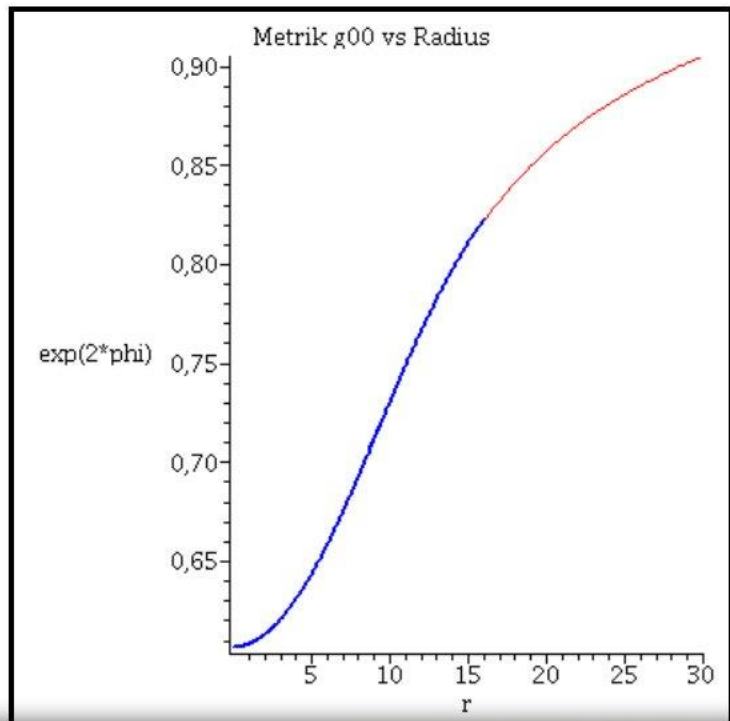
```
end proc, phi(r) = proc(r) ... end proc]
```

(2.2.3)

Veranschaulichung der g_{00} -Komponente (linke Abbildung) und g_{11} -Komponente (rechte Abbildung) der Innenraummetrik (blaue Kurven) und Außenraummetrik (rote Kurven).

Veranschaulichung der g_{00} -Komponente (linke Abbildung) und g_{11} -Komponente (rechte Abbildung) der Innenraummetrik (blaue Kurven) und Außenraummetrik (rote Kurven).

```
> ranf:=10^(-1):  
Plot3:=odeplot(Loes1,[r,exp(2*phi(r))],ranf..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Metrik g00 vs Radius"):  
Plot4:=odeplot(Loes1,[r,-1/(1-2*m(r)/r)],ranf..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Metrik g11 vs Radius"):  
Plot5:=plot(1-2*M/r,r=rend..30,color=red):  
Plot6:=plot(-1/(1-2*M/r),r=rend..30,color=red):  
display(Matrix(1,2,[[display(Plot3,Plot5),display(Plot4,Plot6)]]));
```



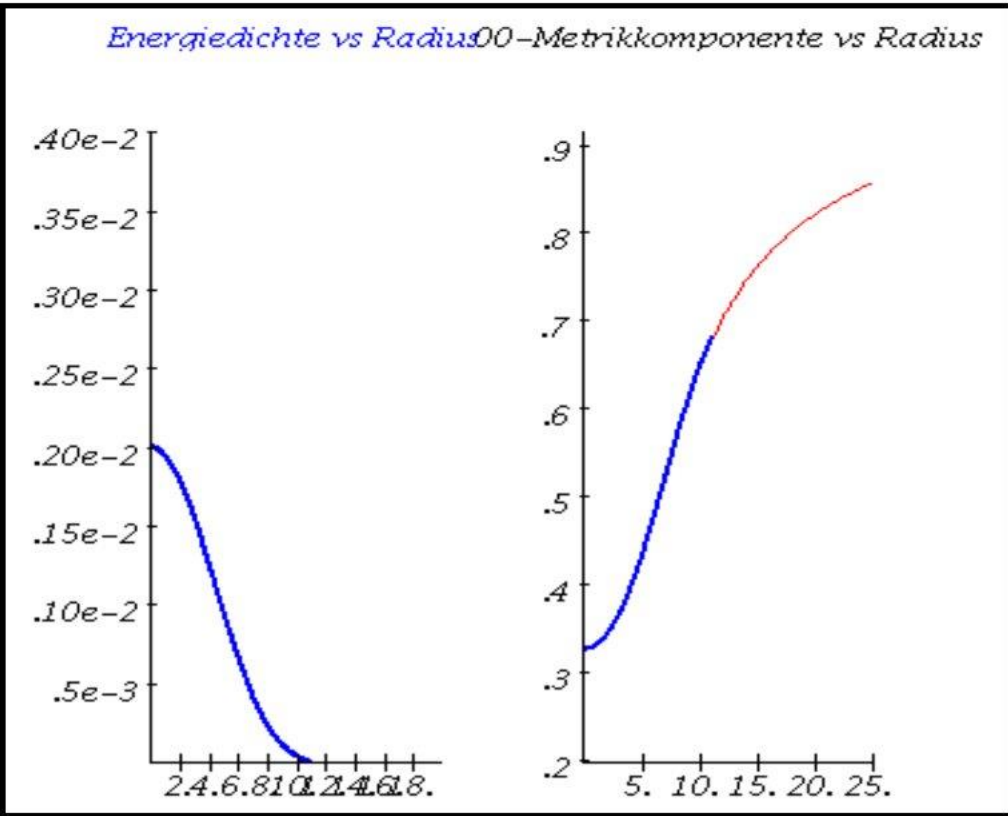
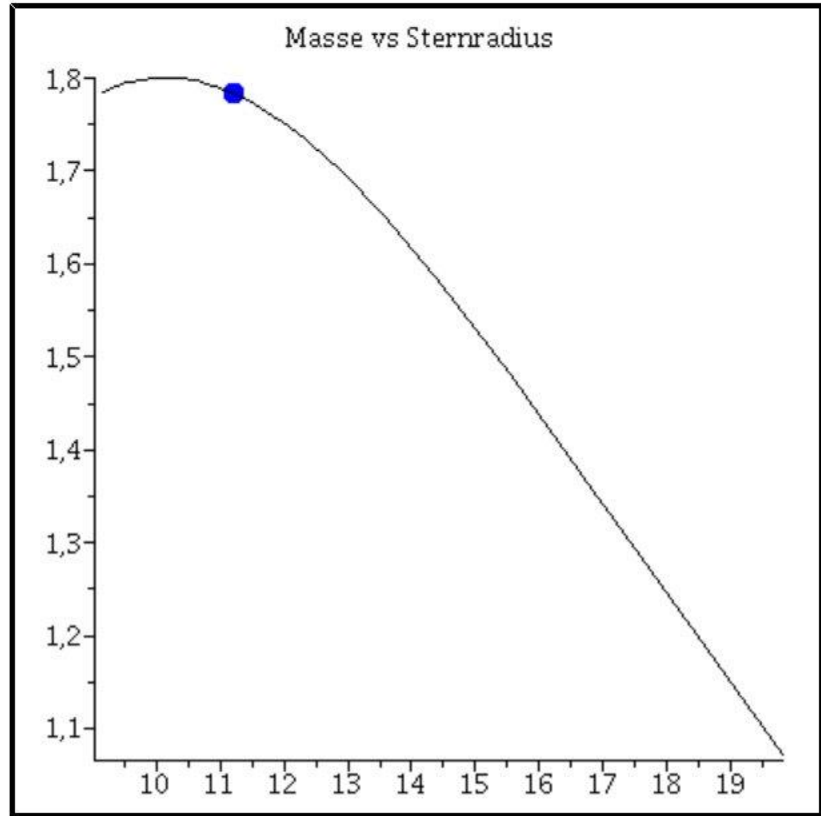
Masse-Radius Beziehung

Im folgenden wird eine Sequenz von Sternen mit unterschiedlichen zentralen Energiedichten-Werten berechnet. Trägt man die Gesamtmasse der einzelnen Sterne gegen deren Radius auf, so erhält man die Masse-Radius Beziehung. Jede Zustandsgleichung besitzt eine eigene Obergrenze, die sogenannte maximale Masse. Die Berechnung erfolgt durch eine for-Schleife über einen geeigneten zentralen Energiedichtebereich:

```
>
                                r0:=10^(-14):
                                ranf:=10^(-1):
                                frames:=20:
                                for i from 1 by 1 to frames do
                                    e0:=i*0.0002:
                                Loes:=dsolve({TOV1,TOV2,TOV3,m(r0)=0,e(r0)=e0,phi(r0)=0},{m(r),e(r),phi(r)},type=numeric,output=listprocedure):
                                    energiedichte := subs(Loes,e(r)):
                                    Mass := subs(Loes,m(r)):
                                    PPhi := subs(Loes,phi(r)):
                                    for rr from 1 by 0.0001 while energiedichte(rr)>10^(-10) do Radius[i]:=rr: end do:
                                    Masse[i]:=Mass(Radius[i]):
                                Plot1[i]:=odeplot(Loes,[r,e(r)],r0..Radius[i],numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Energiedichte vs Radius",view=
                                    [r0..20,0..0.004]):
                                    Phi0:=(0.5*ln(1-2*Masse[i]/Radius[i])):
                                    DPhi:=Phi0-PPhi(Radius[i]):
                                Plot3[i]:=odeplot(Loes,[r,exp(2*(phi(r)+DPhi))],r0..Radius[i],numpoints=200,color=blue,thickness=2,labels=[Radius,"00-
                                    Metrikkomponente"],labeldirections=[horizontal,vertical],title="00-Metrikkomponente vs Radius"):
                                    Plot5[i]:=plot(1-2*Masse[i]/r,r=Radius[i]..25,color=red):
                                    Ani1[i]:=display(Matrix(1,2,[[Plot1[i],display(Plot3[i],Plot5[i])]]));
                                PointA[i]:=pointplot({[Radius[i],Masse[i]]},symbol=solidcircle,symbolsize=23,color=blue):
                                    od:

> MR:=listplot([seq([Radius[i],Masse[i]],i=1..frames)],title="Masse vs Sternradius"):
                                for i from 1 by 1 to frames do
                                    Ani2[i]:=display(PointA[i],MR):
                                od:
```

```
> Animat:=display([seq(Ani1[i],i=1..frames)],insequence=true):  
  Animat1:=display([seq(Ani2[i],i=1..frames)],insequence=true):  
  display(Array([Animat1,Animat]));
```



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

(General Theory of Relativity on the Computer)

Vorlesung gehalten an der

J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Sommersemester 2020)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 23.05.2020

Python Jupiter Notebook

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Python

Die innere Schwarzschildlösung eines sphärisch symmetrischen, statischen Objektes (z.B. Erde, Neutronenstern)

Von der Einstein Gleichung zur Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung (TOV)

In den vorigen drei Vorlesungen wurde die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen numerisch analysiert. Die raumzeitliche Struktur, die Metrik, wurde hierbei als gegeben vorausgesetzt. In der folgenden Vorlesung betrachteten wir nun wie man die Metrik bei vorgegebener Materieverteilung berechnet. Die zugrundeliegende Gleichung die es hier zu lösen gilt ist die Einstein Gleichung.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Zunächst wird das Python Packet "GraviPy" eingebunden, welches auf dem Packet SymPy basiert und symbolische Berechnungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie relativ einfach möglich macht.