

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
11. MAI, 2017*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

5. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung:

Kurze Wiederholung der letzten Vorlesung: Geodätengleichung in der Schwarzschild-Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen eines Probekörpers mit Maple lösen, Klassifizierung der möglichen unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (ISCO) eines Probekörpers, Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch, die Photonensphäre eines schwarzen Loches

Die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

Maple Ausgabe bei festgelegter Schwarzschild-Raumzeit

$$\begin{aligned} \text{eqns} := & \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} \tau(\lambda) - \frac{2M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)}{r(-r+2M)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) \right. \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{r} + \frac{2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)}{\sin(\theta)} = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} \theta(\lambda) \\ & + \frac{2 \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)}{r} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0, \frac{d^2}{d\lambda^2} r(\lambda) \\ & - \frac{(-r+2M)M \left(\frac{d}{d\lambda} \tau(\lambda) \right)^2}{r^3} + \frac{M \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right)^2}{r(-r+2M)} + (-r+2M) \left(\frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda) \right)^2 + (\\ & \left. -r+2M) \sin(\theta)^2 \left(\frac{d}{d\lambda} \phi(\lambda) \right)^2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen

Zum Lösen des Systems von Differentialgleichungen müssen die Anfangsbedingungen des Probekörpers festgelegt werden

z.B. wo befindet sich der Probekörper zur Eigenzeit $\lambda=0$: $r(0)=10$

Die Anfangsbedingung für $t'(0)$ erhält man z.B. mittels der folgenden Bedingungen aus dem infinitesimalen Weglängenelement ds :

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=d\phi=0 \\ \text{bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Keine Anfangsgeschwindigkeit

Anfangsgeschwindigkeit in der äquatorialen Ebene:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \xRightarrow{\substack{dr=d\theta=0, \\ \theta=\pi/2 \text{ bei } t=0}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\lambda^2} - r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \sqrt{\frac{1 + r^2 \frac{d\phi^2}{d\lambda^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}$$

Während der Bewegung erhaltene Größen

Zwei Gleichungen der Geodätengleichung lassen sich wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = E = \text{const} \\ 2. \text{ Gleichung: } & \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{d\lambda} = l = \text{const} \quad , \end{aligned}$$

Die während der Bewegung erhaltenen Größen der Energie (E) und des Drehimpulses (l) lassen sich mittels des Viererimpulses definieren:

Viererimpulses $p_\mu = m u_\mu$ ergeben ($\lambda = \tau$):

$$\begin{aligned} p_0 &= m \frac{dx_0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} = m g_{00} \frac{dt}{d\tau} = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = m E \\ p_3 &= m \frac{dx_3}{d\tau} = m g_{33} \frac{dx^3}{d\tau} = m g_{33} \frac{d\phi}{d\tau} = -m \left(r^2 \sin^2(\theta) \right) \frac{d\phi}{d\tau} = -m l \end{aligned}$$

Das effektive Potential

Mittels der radialen Gleichung läßt sich das effektive Potential definieren:

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r} ,$$

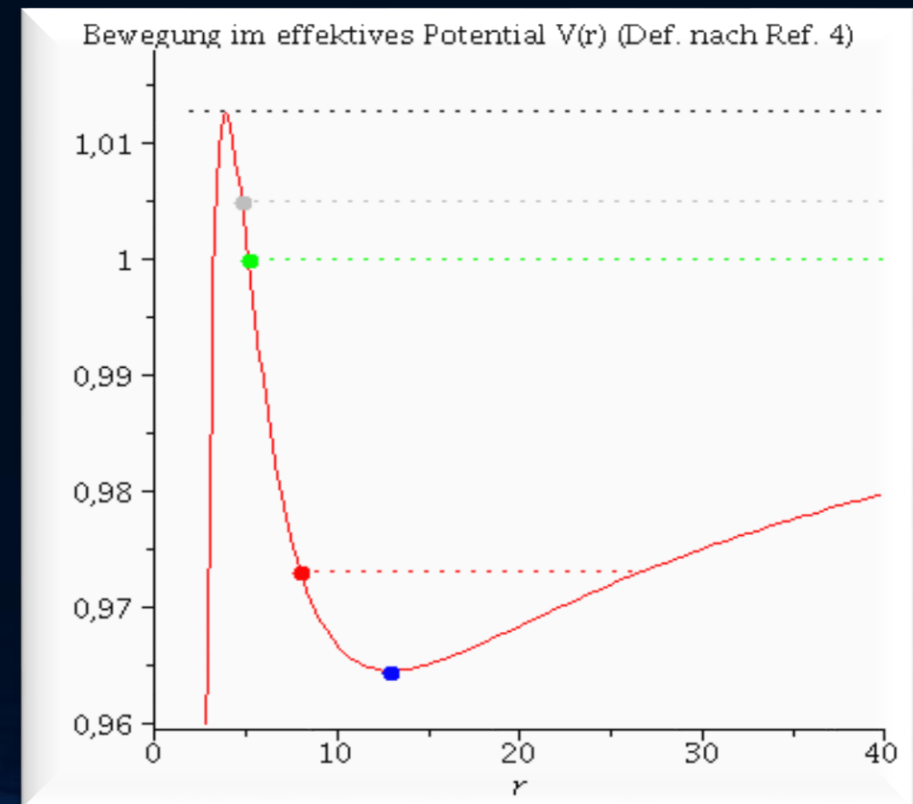
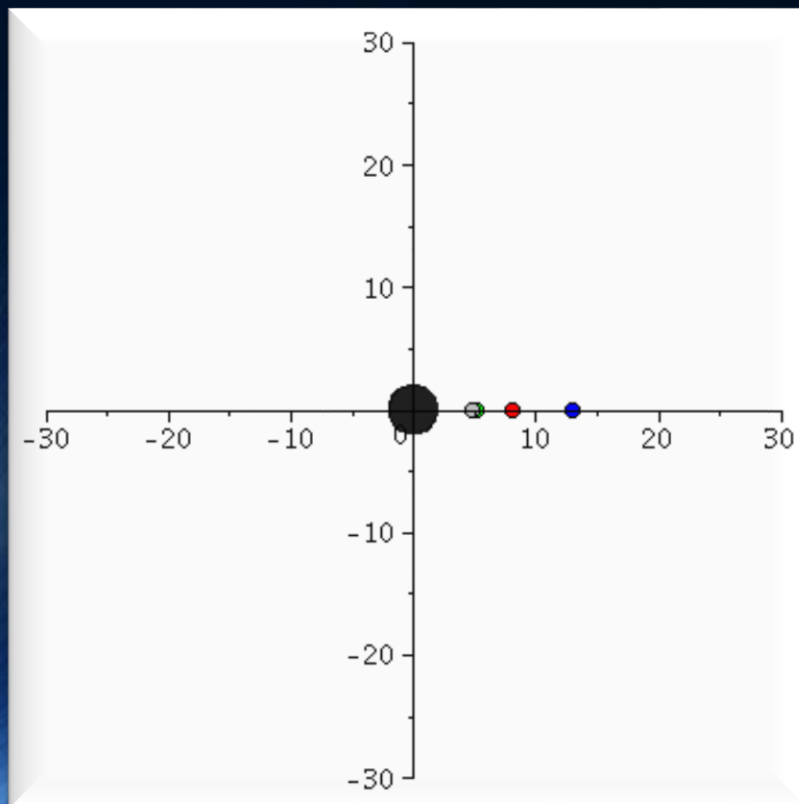
Alternative Definition (siehe Buch von Prof. Rezzolla):

$$4. \text{ Gleichung: } \rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$$

$$\text{wobei: } V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)} ,$$

Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch

Neben den gebundenen kreisförmigen (blau) und elliptischen (rot) Bahnen, den parabolischen (grün) und hyperbolischen (grau) Bahnverläufen ist auch eine durch das schwarze Loch eingefangene Bahn (schwarz: capture orbit) möglich



[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

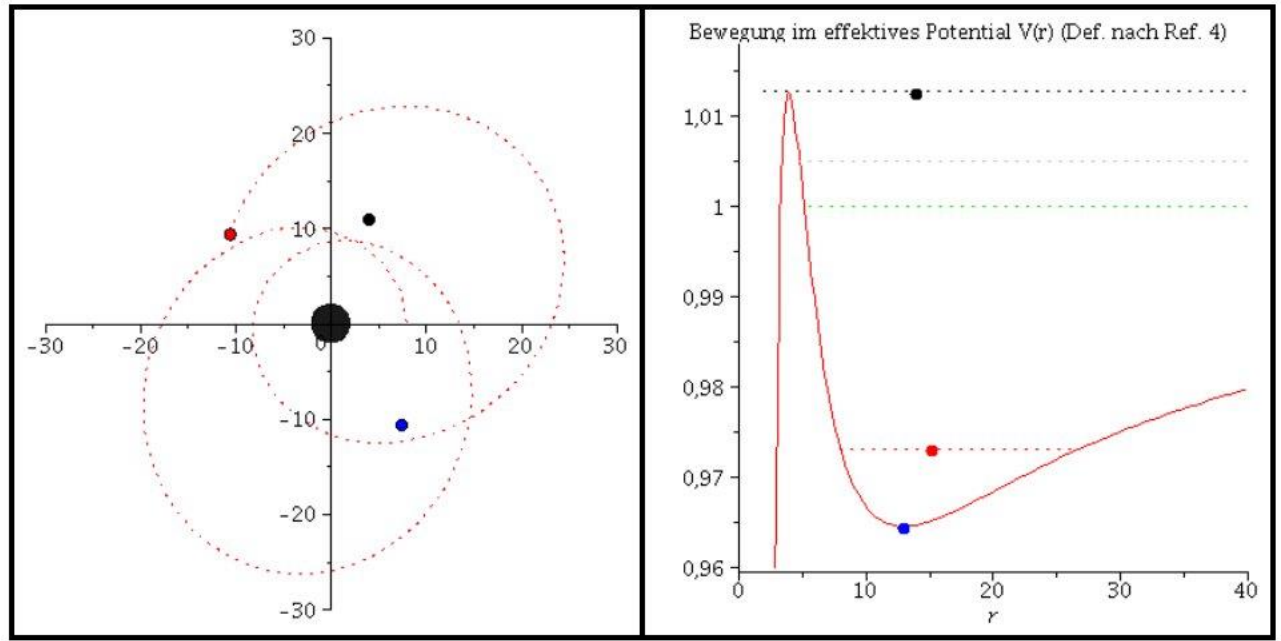
Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

3. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der zweiten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden eine Klassifizierung der Umlaufbahnen eines Probekörpers um ein schwarzes Loch vorgestellt und mit den Newtonschen Umlaufbahnen verglichen.

Bewegung eines Probekörpers um ein schwarzes Loch in der Ebene



>

Die unterschiedlichen Bahnbewegungen um ein schwarzes Loch (gebunden kreisförmige (A: blau) und elliptische (B: rot) Bahn, parabolische (C: grün) und hyperbolische (D: grau) Bahnverläufe bzw. eingefangene Bahn (E: capture orbit, schwarz)) sind in der obigen Abbildung dargestellt. Bei der elliptische, roten Bahn erkennt man hierbei gut den allgemeinrelativistem Effekt der Periheldrehung, d.h. der nächste Punkt (der Perihel) und der am weitesten entfernte Punkt (der Aphel) vom Zentrum des schwarzen Lochs betrachtet, ändert seine Position und rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn in ϕ -Richtung.

>

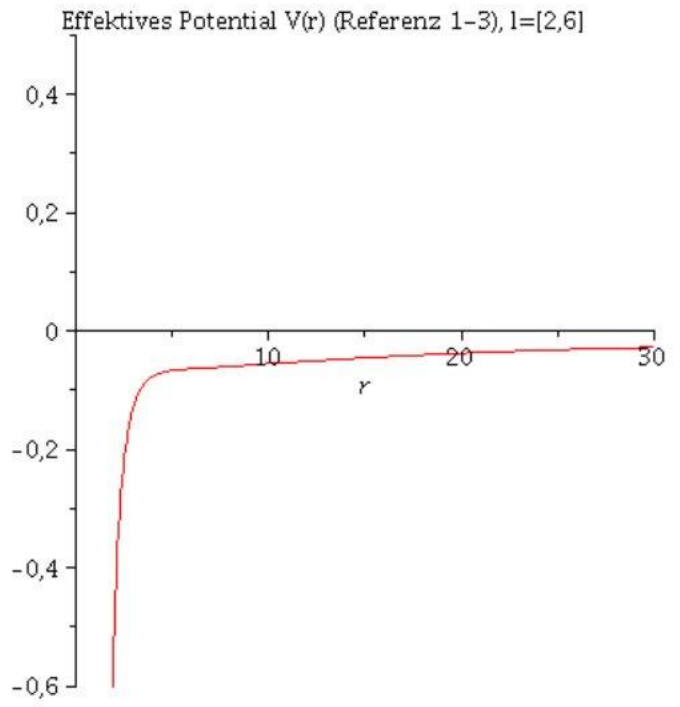
Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines

Die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)) eines Probekörpers

Wir berechnen die kreisförmigen Bahnbewegungen indem wir das Minimum des effektiven Potentials berechnen.

In der vorigen Animation der unterschiedlichen Bahnbewegungen wurde der Drehimpuls l fest auf den Wert 4.1 und die Masse des schwarzen Lochs auf 1 festgelegt. Das effektive Potential $V(r, M, l)$ war somit nur noch von r abhängig. Die folgende Animation zeigt wie sich die Form des effektiven Potentials bei Variation des Parameters l von $l=2$ bis $l=6$ verändert.

```
> animate(VeffFb(r,1,l),r=0..30,l=2..6,view=-0.6..0.5,title="Effektives Potential V(r) (Referenz 1-3), l=[2,6]",numpoints=500);
```



Wir benutzen nun die Potential-Nomenklatur der 1. bis 3. Literaturangabe (siehe weiter oben). Ist der Wert des Drehimpulses l oberhalb einer gewissen Grenze, so sind stabile Bahnen möglich, da ein Minimum im Potential vorhanden ist. Kreisförmige Bahnbewegungen sind dadurch charakterisiert, dass der Wert des Radiuses sich im Laufe der Zeit nicht verändert und somit sich der radiale Abstand des Probekörpers vom schwarzen Loch gerade im Minimum des effektiven Potentials befindet. Es muss somit gelten:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{Bedingung für kreisförmige Bahnverläufe}$$

> `Diff(V(r,M,l),r)=0;`
`ExtremaV:=diff(Veff(r,M,l),r)=0;`

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} V(r, M, l) &= 0 \\ \text{ExtremaV} &= \frac{M}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{3Ml^2}{r^4} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

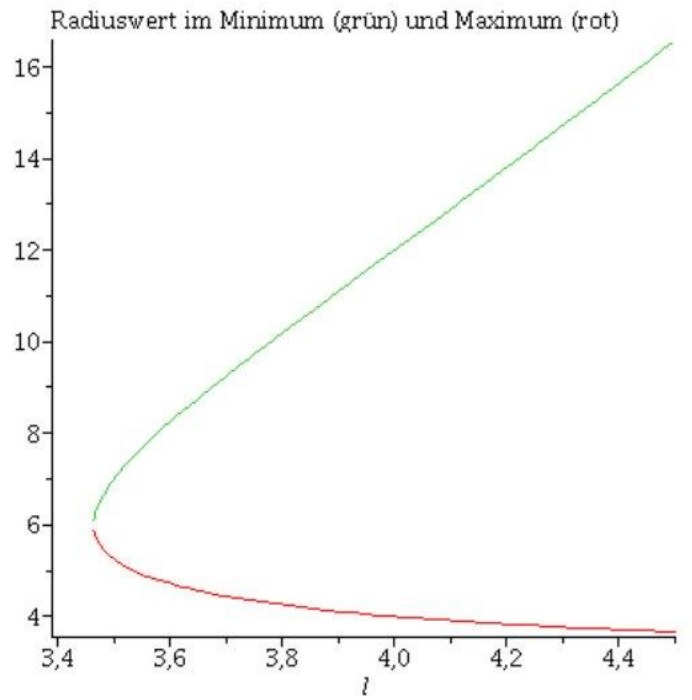
Lösen wir diese Gleichung nach r auf, so erhalten wir die folgenden Lösungen, wobei der erste (positives Vorzeichen) Wert dem Minimum und der zweite (negatives Vorzeichen) dem Maximum entspricht:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\pm} = \frac{l}{2M} \left(l \pm \sqrt{l^2 - 12M^2} \right)$$

$$r_{extr} := \frac{1}{2} \frac{(l + \sqrt{l^2 - 12 M^2}) l}{M}, -\frac{1}{2} \frac{(-l + \sqrt{l^2 - 12 M^2}) l}{M} \quad (2.3.2)$$

Darstellen des Radiuswertes im Minimum (grün) und Maximum (rot) des effektiven Potentials

```
> plot({subs(M=1, rextr[1]), subs(M=1, rextr[2])}, l=3.4..4.5, title="Radiuswert im Minimum (grün) und Maximum (rot)");
```



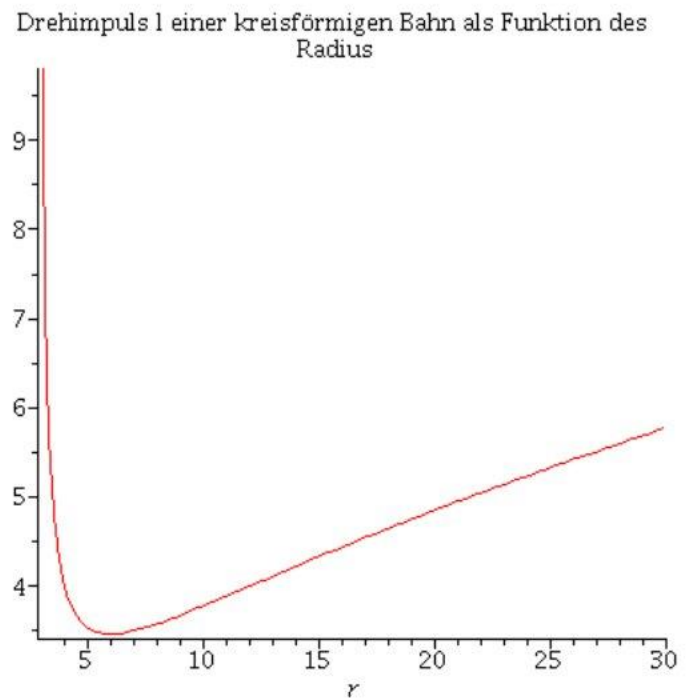
Der Drehimpuls l für eine kreisförmige Bahnbewegung ergibt sich durch Auflösen von V'=0 nach l:

Die beiden Lösungen entsprechen rechts und links rotierenden Probekörpern. Kreisförmige Bahnbewegungen sind somit durch die folgende Bedingung an das effektive Potential charakterisiert:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow l = \pm \frac{\sqrt{Mr}}{\sqrt{r-3M}}$$

Man erkennt an dieser Stelle schon, dass stabile kreisförmige Bahnbewegungen nur möglich sind, falls $r \geq 3M$. Darstellung einer Lösung:

```
> plot(subs(M=1,lextr[2]),r=3.1..30,title="Drehimpuls l einer kreisförmigen Bahn als Funktion des Radius");
```



Die innerste stabile Kreisbahn hat die Eigenschaft: $V'=0$ und $V''=0$. Der Drehimpuls l muss somit einen Wert annehmen, dass das effektive Potential einen Sattelpunkt bei einem speziellen Radiuswert annimmt:

$$\frac{dV}{dr} = 0, \quad \frac{d^2V}{dr^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r = 6M, \quad l = 2\sqrt{3}M}_{\text{ISCO}}$$

```
> ExtremaV2:=diff(VeffFb(r,M,l),r,r)=0;  
lISCO:=solve(simplify(subs(r=rextr[1],ExtremaV2)),l);  
rISCO:=solve(simplify(subs(l=lextr[2],ExtremaV2)),r);
```

$$\text{ExtremaV2} := -\frac{2M}{r^3} + \frac{3l^2}{r^4} - \frac{12Ml^2}{r^5} = 0$$

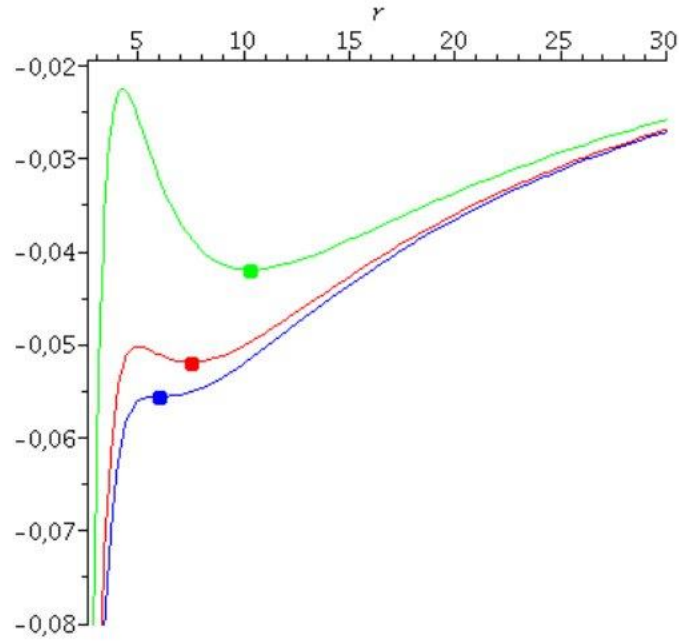
$$l_{\text{ISCO}} := 2\sqrt{3}M, -2\sqrt{3}M$$

$$r_{\text{ISCO}} := 6M$$

(2.3.4)

Definition der Anfangswerte der innersten stabilen Kreisbahn und zweier weiterer stabilen kreisförmigen Bahnbewegungen.

Effektives Potential $V(r)$ (Def. nach Ref. 1-3) für drei verschiedene Drehimpulse



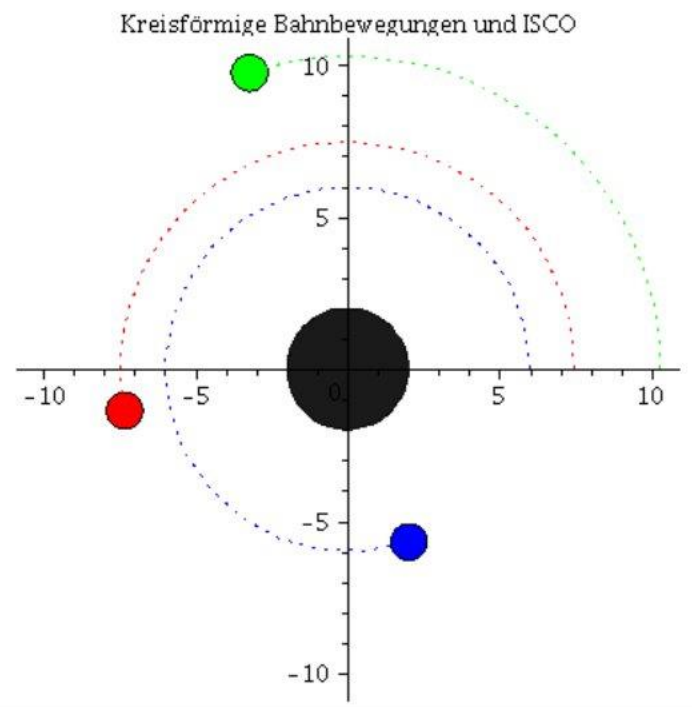
Numerische Lösung der drei Bahnbewegungen:

```
> LoesA:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0A,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0A,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0A},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesB:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0B,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0B,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0B},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):  
LoesC:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0C,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0C,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0C},  
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

Animation der Bewegungen: Der ISCO ist die blaue Kurve

```
[4])*sin(rhs(LoesC(i*lend/frames)[2])),0.6,color=green)):
TrajA[i]:=listplot([seq([rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesA(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesA(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=blue,linestyle=dot):
TrajB[i]:=listplot([seq([rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesB(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesB(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=red,linestyle=dot):
TrajC[i]:=listplot([seq([rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*cos(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])),rhs(LoesC(j*lend/frames)[4])*sin(rhs(LoesC(j*lend/frames)[2])), j = 0 .. i]),color=green,linestyle=dot):
Ani[i]:=display({KoerperA[i],KoerperB[i],KoerperC[i],TrajA[i],TrajB[i],TrajC[i],BH});
od:
```

```
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bahnbewegungen und ISCO");
```



>

Bewegung von Licht (Photonen) um ein schwarzes Loch in der Ebene (Die Photonensphäre)

In der Literatur wird die Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert:

1. General relativity : An introduction for physicists by M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby
2. Gravity : An introduction to Einstein's general relativity by James B. Hartle
3. Allgemeine Relativitätstheorie by Torsten Fließbach
4. Relativistic hydrodynamics by Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti

Mittels der Eigenschaft für Photonen ($ds^2 = 0$) vereinfacht sich die radiale Gleichung der Geodätengleichung und man kann ein effektives Potential definieren, welches allein von der Masse des schwarzen Lochs abhängt.:

$$\frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{b^2}$$
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) ,$$

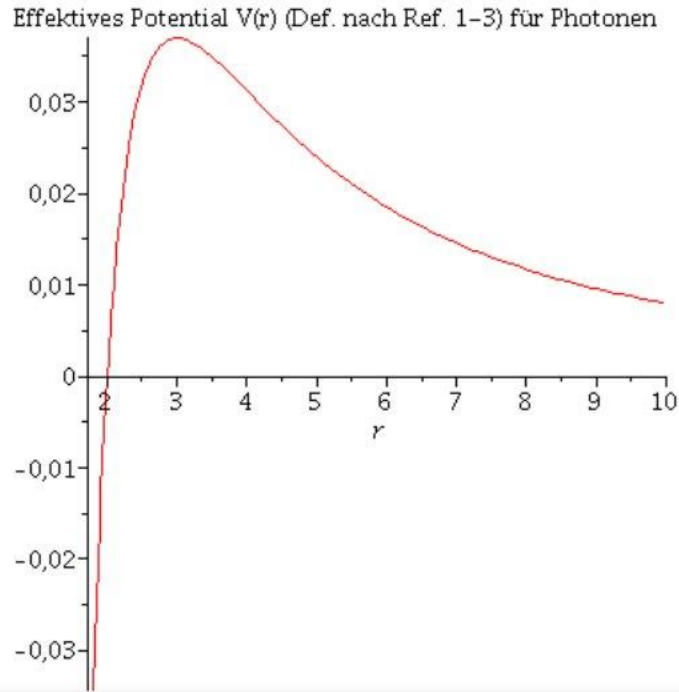
wobei der Parameter b der Impaktparameter der Photonenbahn darstellt. Die folgende Abbildung zeigt das effektive Potential (Definition nach Buch 1. bis 3.) als Funktion des Radius bei einer Masse von $M=1$:

>

```
setM=1;
VeffPhotonHobson:=(r,M)->1/r^2*(1-2*M/r);
Pot:=plot(VeffPhotonHobson(r,setM),r=1.8..10);
display(Pot,title="Effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 1-3) für Photonen");
```

```
> setM=1:  
VeffPhotonHobson:=(r,M)->1/r^2*(1-2*M/r);  
Pot:=plot(VeffPhotonHobson(r,setM),r=1.8..10):  
display(Pot,title="Effektives Potential V(r) (Def. nach Ref. 1-3) für Photonen");
```

$$V_{\text{effPhotonHobson}} := (r, M) \rightarrow \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2}$$



Mittels $ds^2=0$ (für Photonen) kann man die folgenden Anfangswerte für eine Photonenkreisbahn bei $r=3$ berechnen:

```
> setM=1:
  t0:=0:
  phi0:=0:
  theta0:=Pi/2:
  dtheta0:=0:
  dr0:=0:
  r0:=3:
  dphi0:=(1/9)*sqrt(3):
  dt0:=1:
```

Der Anfangswert für $dphi0$ wurde hierbei mittels des infinitesimalen Weglängenelements $ds^2=0$ berechnet:

```
> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):
  ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1])):
  ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]):
  subs({dr=0,dtheta=0,cos(theta)=0},ds2)=0;
  dphi=solve(subs({dr=0,dtheta=0,cos(theta)=0,M=setM,r=r0},ds2)=0,dphi);
```

$$-\frac{(r^2 - 4 r M + 4 M^2) dt^2}{r (-r + 2 M)} - \frac{(-r^4 + 2 r^3 M) d\phi^2}{r (-r + 2 M)} = 0$$

$$d\phi = \left(\frac{1}{9} \sqrt{3} dt, -\frac{1}{9} \sqrt{3} dt \right)$$

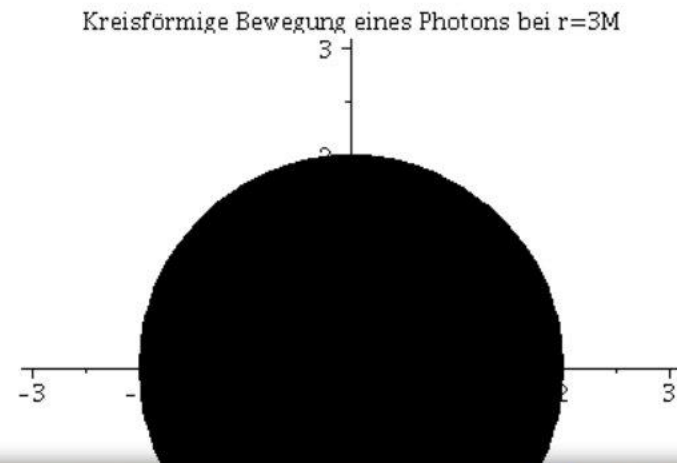
(2.4.1)

```
> Loes:=dsolve({eq1,eq2,eq4,t(0)=t0,r(0)=r0,D(r)(0)=dr0,D(t)(0)=dt0,phi(0)=phi0,D(phi)(0)=dphi0},
              {r(lambda),t(lambda),phi(lambda)},type=numeric,output=listprocedure):
```

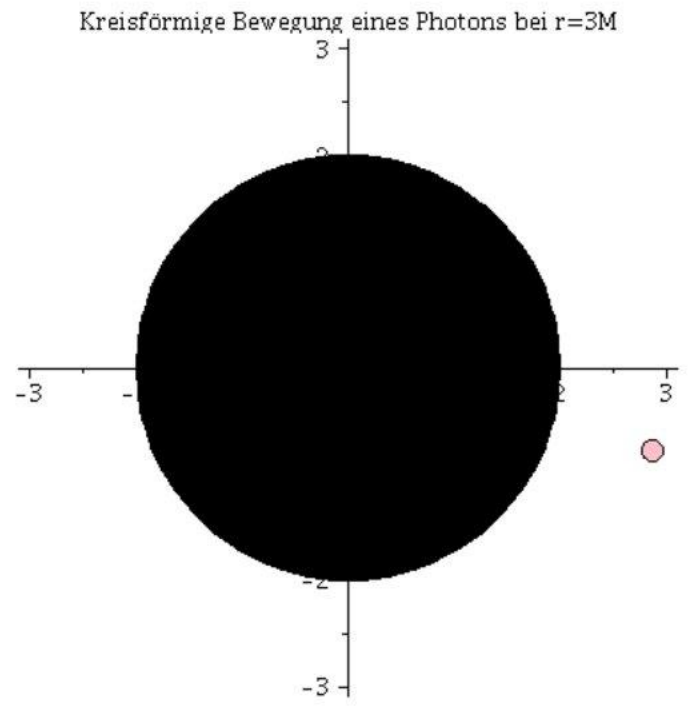
Animation der Kreisbahn des Photons:

```
> frames:=250:
   lend:=200:
   BH:=display(disk([0,0],2,color=black)):
   for i from 0 by 1 to frames do
   Photon[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]),
   rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.1,color=pink)):
   Ani[i]:=display({Photon[i],BH});
   od:

> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bewegung eines Photons bei r=3M");
```



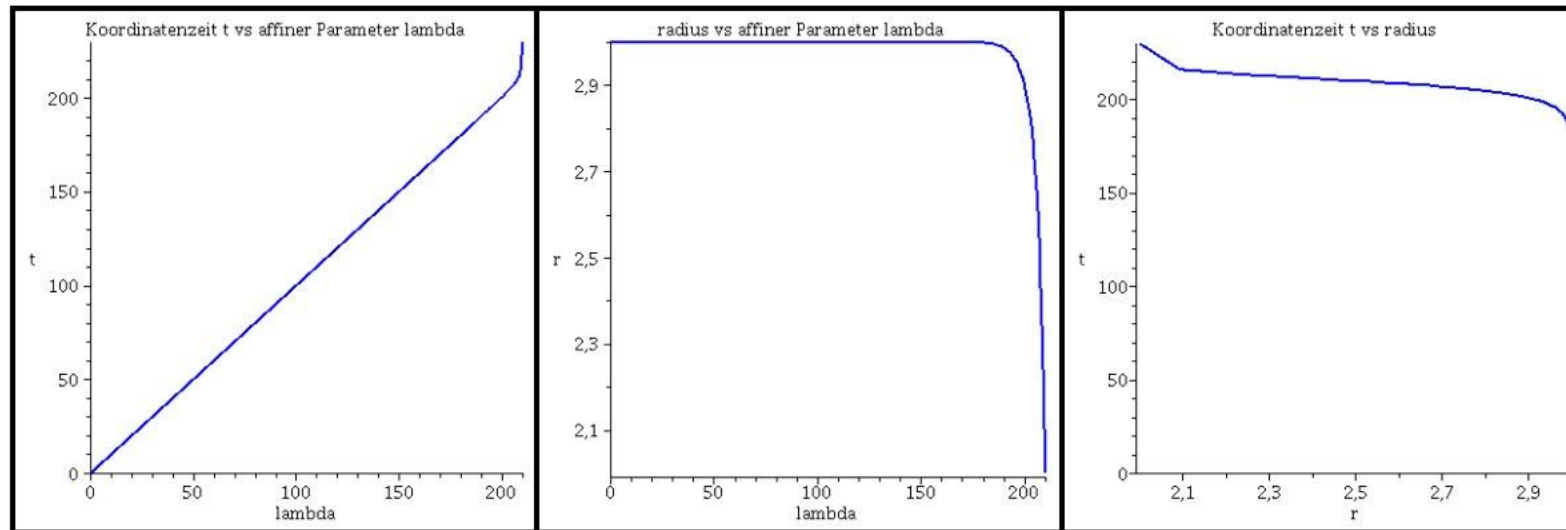
```
BH:=display(disk([0,0],2,color=black));  
  for i from 0 by 1 to frames do  
Photon[i]:=display(disk([rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*cos(rhs(Loes(i*lend/frames)[2])),rhs(Loes(i*lend/frames)[4])*sin(rhs(Loes(i*lend/frames)[2]))],0.1,color=pink));  
  Ani[i]:=display({Photon[i],BH});  
  od:  
  
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Kreisförmige Bewegung eines Photons bei r=3M");
```



Numerischer Beweis der Instabilität der Lösung:

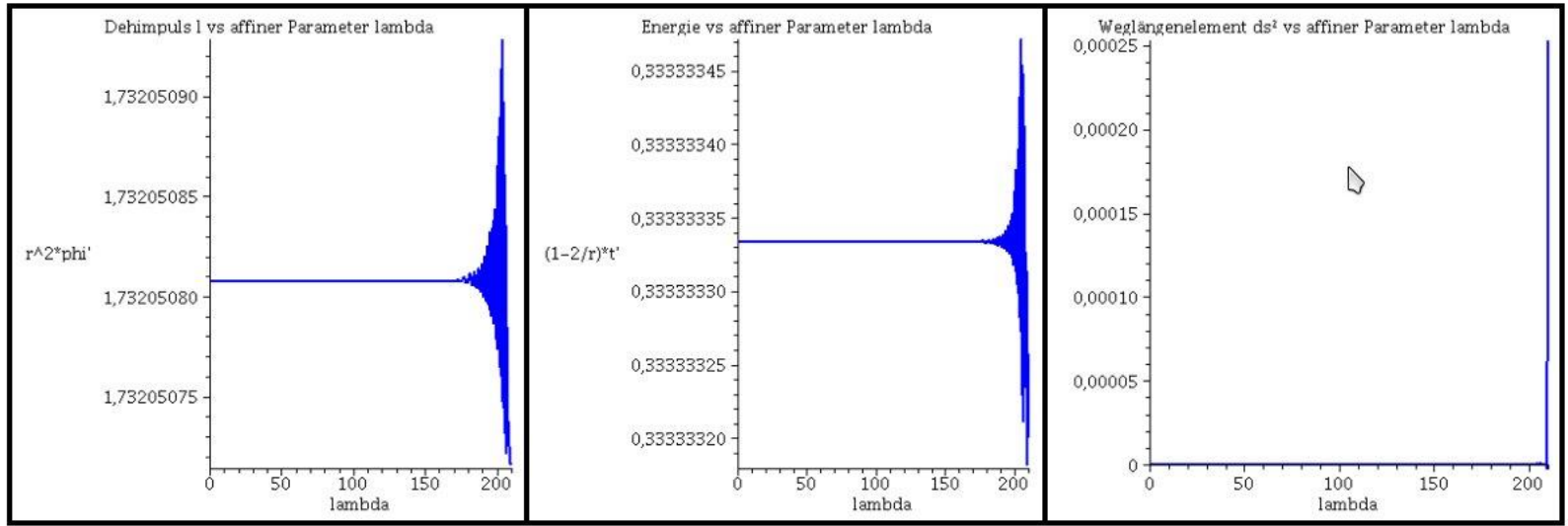
Numerischer Beweis der Instabilität der Lösung:

```
> lend:=210.098:  
Plot1:=odeplot(Loes, [lambda, t(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs affiner Parameter lambda"):  
Plot2:=odeplot(Loes, [lambda, r(lambda)], 0..lend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="radius vs affiner Parameter lambda"):  
Plot3:=odeplot(Loes, [r(lambda), t(lambda)], 0..lend, numpoints=700, color=blue, thickness=2, title="Koordinatenzeit t vs radius"):  
display(Matrix(1,3, [Plot1,Plot2,Plot3]));
```



Während der Bewegung erhaltenen Größen (l: Drehimpuls pro Masse m, E: Energie pro Masse und Weglängenelement ds^2):

```
> Plot4:=odeplot(Loes,[lambda,r(lambda)^2*diff(phi(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Dehimpuls l vs affiner Parameter lambda");  
Plot5:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*diff(t(lambda), lambda)],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Energie vs affiner Parameter lambda");  
Plot6:=odeplot(Loes,[lambda,(1-2/r(lambda))*(diff(t(lambda), lambda))^2 - 1/(1-2/r(lambda))*(diff(r(lambda), lambda))^2 - r(lambda)^2*(diff(phi(lambda), lambda))^2],0..lend,numpoints=700,color=blue,thickness=2,title="Weglängenelement ds^2 vs affiner Parameter lambda");  
display(Matrix(1,3,[Plot4,Plot5,Plot6]));
```



>

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

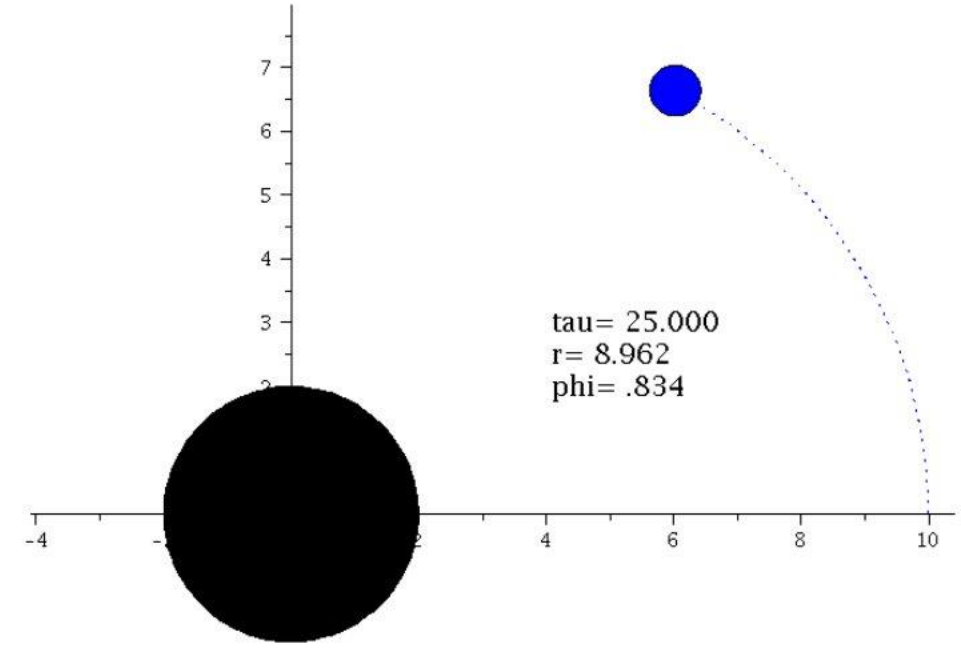
$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} ,$$

wobei τ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die Schwarzschildkoordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen. Lösen Sie, unter Verwendung des Computeralgebra-Systems Maple, die Geodätengleichung numerisch und wählen Sie dabei die folgenden Anfangsbedingungen. Zur Eigenzeit $\tau=0$ sei der Probekörper bei $r=15.4$, $\theta=0$ und $\phi=0$; die Anfangsgeschwindigkeiten seien: $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\theta}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0.031$ und die Masse des schwarzen Lochs betrage $M=1$. Berechnen Sie wo sich der Probekörper bei $\tau=50$ befindet und geben Sie den Radius r und die polare Koordinate ϕ an.

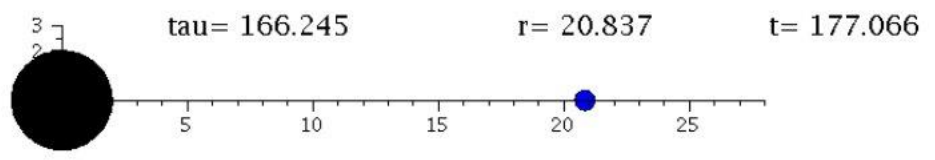


$r =$, $\phi =$

Submit Answer Tries 0/20

Main Menu Contents Grades
← → Course Contents » ... » Aufgaben » Radialer Wurf eines Probekörpers in der Nähe eines nichtrotierenden schwarzen Lochs Notes Evaluate Feedback Print Info

Sie befinden sich im Abstand von 10 km von einem nichtrotierenden schwarzen Loch der Masse $M=1$. Sie möchten ein wichtiges Paket zu Ihrem Begleiterraumschiff abschicken, welches Sie jedoch nur mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $\frac{dr}{d\tau} = 0.265$ radial nach außen abschießen können. Das Raumschiff kann dem schwarzen Loch nur bis zu einer Entfernung von 20 km nahe kommen und Ihr Paket ausschließlich im Umkehrpunkt (wenn das Paket gerade $\frac{dr}{d\tau}(r) = 0$ hat) auffangen. Können Sie Ihr Paket dem Raumschiff zusenden? Geben Sie an in welchem Abstand vom schwarzen Loch sich Ihr Begleiterraumschiff befinden muss, damit das Paket heil ankommt.



Submit Answer Tries 0/20

Die Bewegung eines Probekörpers um ein nichtrotierendes schwarzes Loch wird mittels der Geodätengleichung beschrieben. Die Art und Weise wie sich der Probekörper um das schwarze Loch bewegen wird mithilfe der radialen Komponente der Geodätengleichung und der Definition eines effektiven Potentials charakterisiert werden:

Maximum des Potentials bei r =

Minimum des Potentials bei r =

Submit Answer Tries 0/20

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$$

wobei:
$$V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r}$$

Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l: Drehimpuls pro Masse m und E: Energie pro Masse) charakterisiert. Die Masse des schwarzen Loches sei M=1 und der Drehimpuls des Probekörper sei l=4.72. Geben Sie an bei welchem Abstand r sich das Maximum und das Minimum des Potentials befindet. Was bedeutet das Minimum des Potentials?

Kommenden Montag: Allgemeine Relativitätstheorie einfach dargestellt

14. Mai 2018, 19.30 Uhr: Vortrag in der Denkbar
www.denkbar-frankfurt.de

Allgemeine Relativitätstheorie *Einsteins schönster Geniestreich auf dem Prüfstand*

Als Albert Einstein im Jahre 1915 die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) an der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften vorstellte, glaubten noch wenige Physiker an seine neue, revolutionäre Theorie. Die ART besagt, dass die Ursache der Gravitationskraft in einer Verformung der raumzeitlichen Struktur begründet ist und heutzutage bezeichnen viele Physiker Einsteins mathematisch elegant formulierte Idee als "die schönste Gleichung der Physik". Während einer Sonnenfinsternis im Jahre 1919 gelang es die Ablenkung von Licht in der gekrümmten Raumzeit der Sonnenumgebung zu beobachten und Einstein wurde schlagartig berühmt. Weitere Vorhersagen der ART konnten in den folgenden Jahrzehnten überprüft und bestätigt werden, wobei eine der grundlegenden Folgerungen der ART, die Existenz von Raumzeit-Wellen (Gravitationswellen), lange Zeit nicht direkt nachgewiesen werden konnte. Schließlich, im Jahre 2015 konnte die erste Raumzeit-Welle mittels zweier hochempfindlicher Gravitationswellendetektoren nachgewiesen werden und im Jahre 2017 wurde diese Sensation mit dem Nobelpreis für Physik geehrt. Die grundlegenden Konzepte und Folgerungen der ART sollen in diesem Vortrag in allgemeinverständlicher, unterhaltsamer Weise illustriert werden. So werden z.B. die einzelnen Phasen einer Gravitationswellen erzeugende Neutronensterne-Kollision anhand eines Sammelsuriums einzelner Gesellschaftstänze veranschaulicht und die Eigenschaften von schwarzen Löchern mittels des Reichstagsgebäudes illustriert.

08. Juni 2018: Night of Science 2018
Tanz der Neutronensterne