Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
24. MAY, 2019

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

5. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

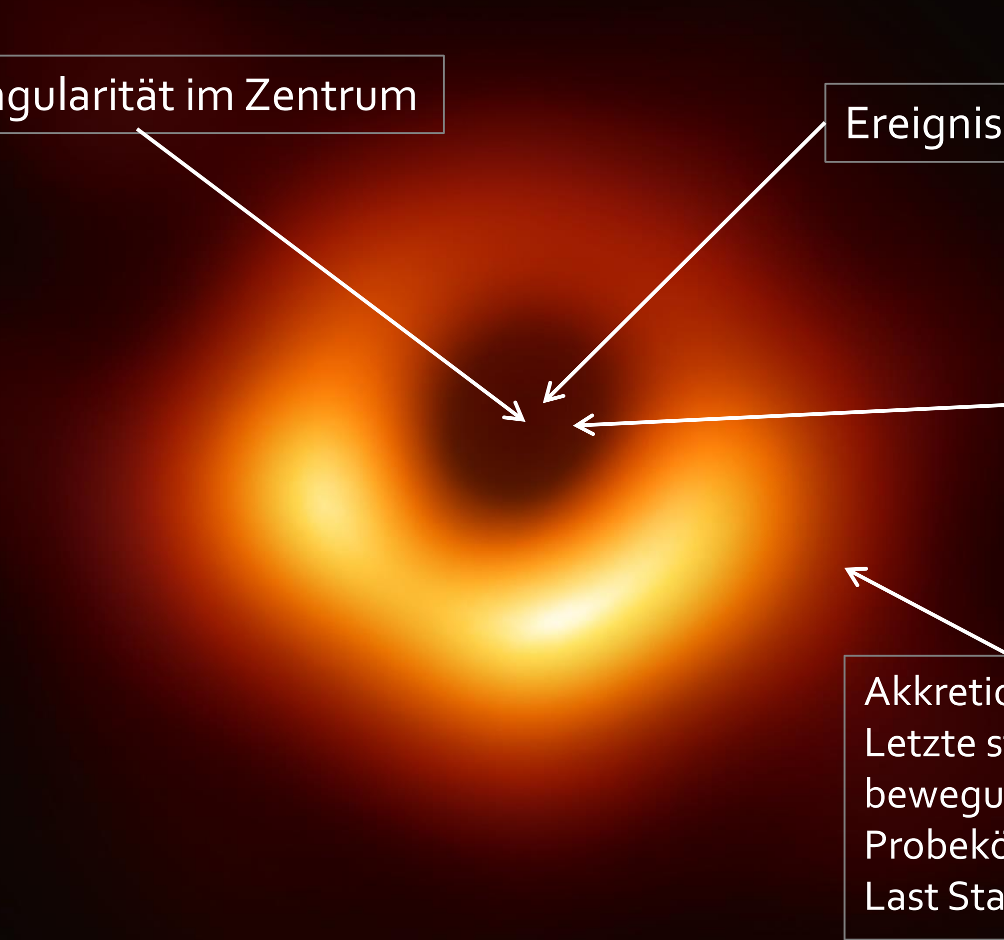
- Ort und Zeit:
  PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Übungstermine:
  Zusätzlich zur Vorlesung werden ab dem 03.05.2019 freiwillige Übungstermine eingerichtet, die jeweils freitags, eine Stunde vor der Vorlesung im PC-Pool 01.120 stattfinden (Fr. 14-15.00 Uhr).
- Vorlesungs-Materialien:
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VARTC/
- Kurs auf der Online-Lernplatform Lon Capa:
  http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/
- Kurze Wiederholung der letzten Vorlesung:
  Klassifizierung der möglichen unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials, die innerste stabile kreisförmige Bahnbewegung (ISCO) eines Probekörpers Bewegung von Licht um ein schwarzes Loch, die Photonensphäre eines schwarzen Loches, Beispiel: Das supermassive schwarze Loch im Zentrum von M87, Aufgaben auf der Lernplatform bearbeiten

Plan für die heutige Vorlesung

- Einführung in die Kerr-Metrik eines rotierenden schwarzen Loches, Ereignishorizonte und Flächen der stationären Grenze (bzw. der unendlichen Rotverschiebung), der Mitführungseffekt der Raumzeit (“Frame-Dragging”), geodätische Bewegung eines Probekörpers in der Kerr Metrik), Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen um ein rotierendes schwarzes Loch (Kerr Metrik) mittels eines effektiven Potentials, Kreisförmige Bewegungen in der äquatorialen Ebene
- Der “Innermost Stable Circular Orbit” für einen Probekörper der mit und entgegen der Rotationsrichtung des schwarzen Loches bewegt
- Der gravitomagnetische Effekt

Beispiel: Das schwarze Loch in M87

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der *Allgemeine Relativiätstheorie* der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde (erstes Bild eines schwarzen Lochs, siehe rechte Abbildung).



YouTube Video: https://www.youtube.com/watch?v=Zh5p9Sro_VU&list=PLn5gYfEKIag8nps1GKLqUW35AOgQY7aM2

Anlässlich der bahnbrechenden Aufnahme des ersten Bildes eines schwarzen Lochs im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87, wurde am 17. April 2019 um 20 Uhr ein öffentlicher, populärwissenschaftlicher Abendvortrag im Otto Stern Zentrum (OSZ H1) am Campus Riedberg der Goethe Universität gehalten. Es sprachen die drei Principal Investigators des europäischen Black Hole Cam-Projekts (L.Rezzolla, M.Kramer und H.Falke).

Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 01.05.2019

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

Das Schwarze Loch in M87

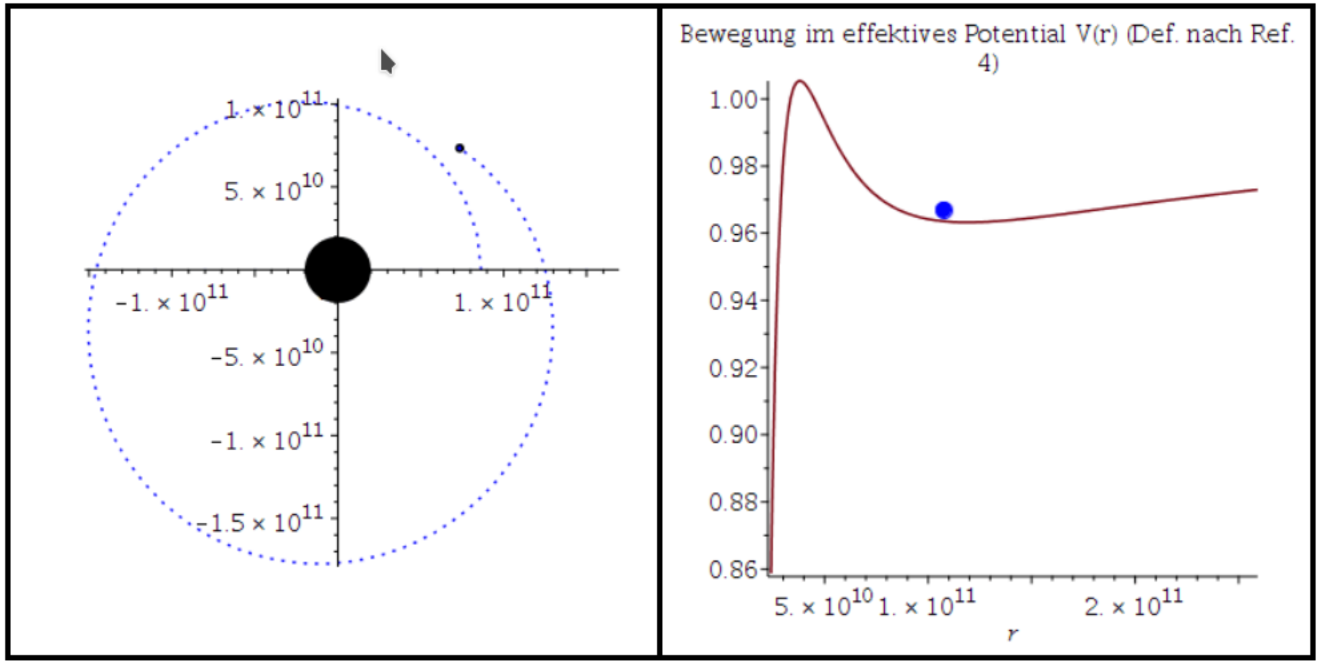
(ohne Rotation)

Einführung

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativiätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit

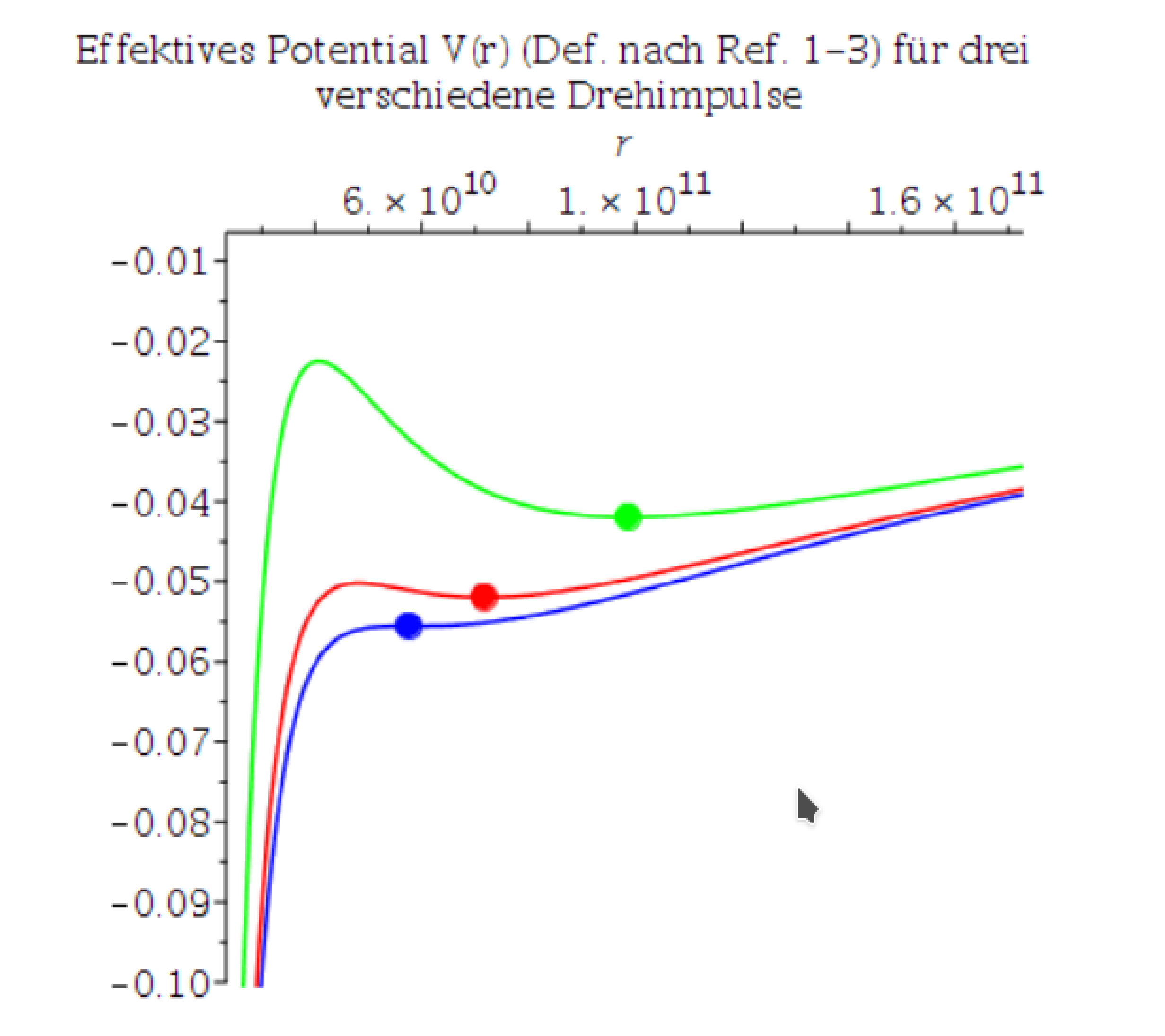
```
Ref. 4)"):
display(Array([Animat1,Animat2]));
```

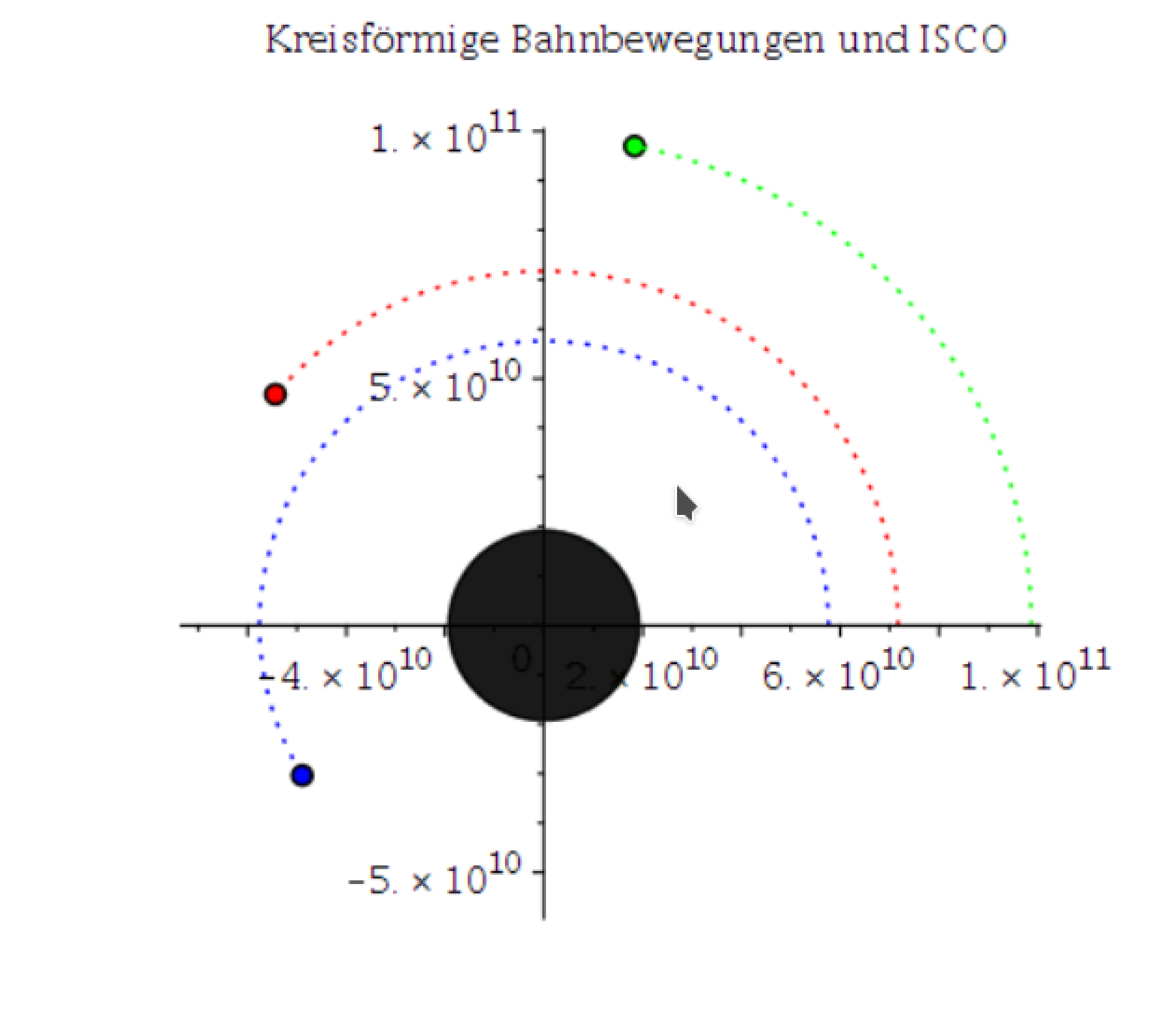
Beispiel:
Elliptische Bahn eines Probekörpers



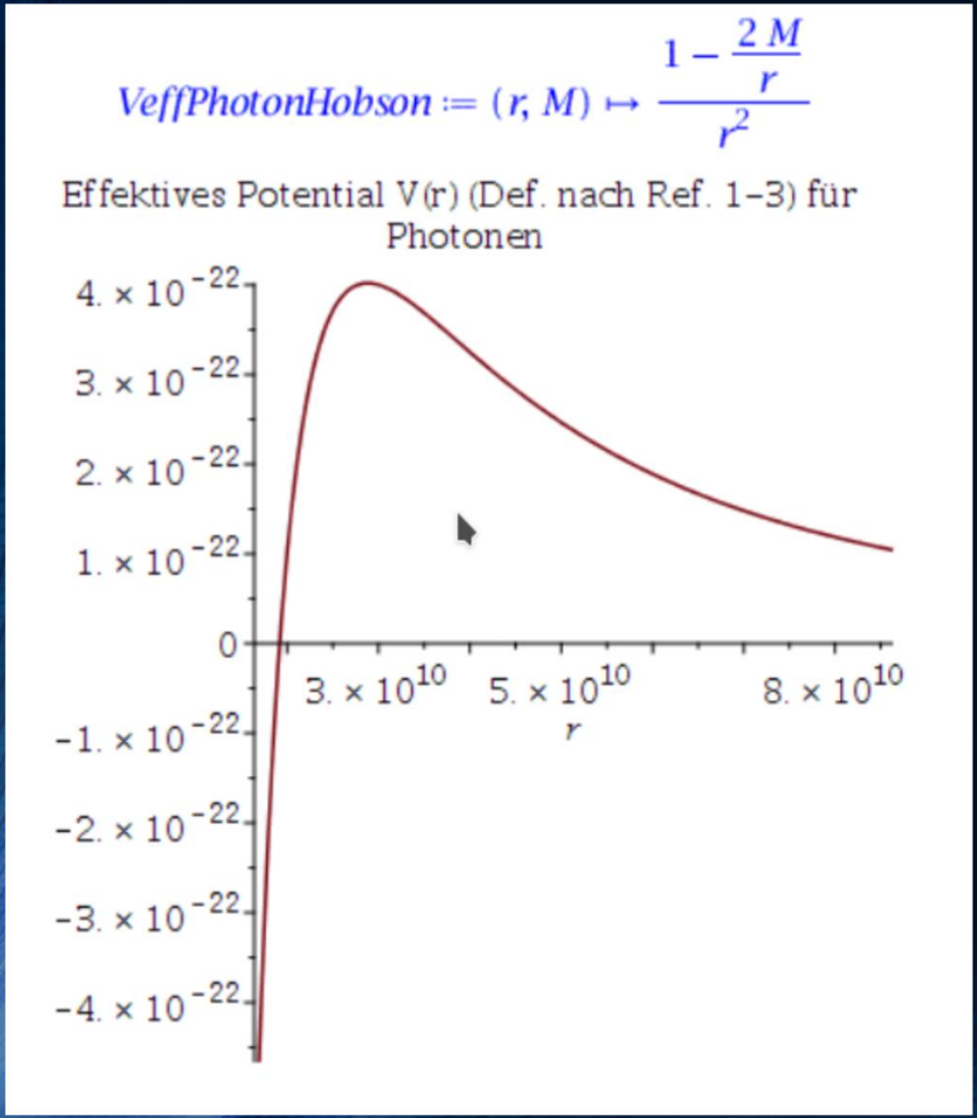
EW_Sonne:=evalf(arctan(R_Sonne/A_ESonne)):
convert(evalf(round((i*lend/frames/(c*60*60))*1000)*0.001),string),"Stunden"])]

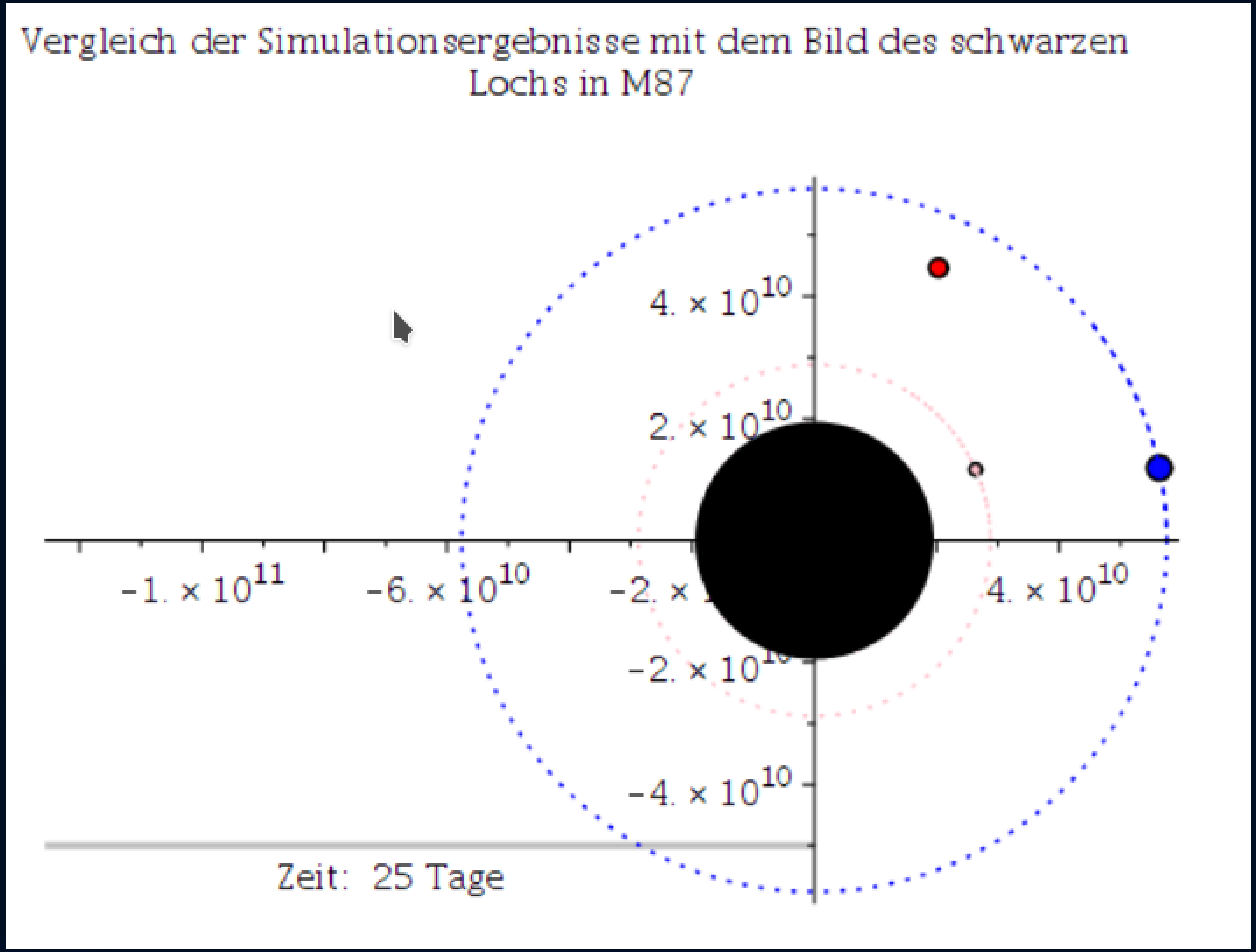
Das effektive Potential eines Probekörpers am ISCO hat eine Sattelpunktseigenschaft





Masselose Teilchen (Photonen):
Das effektive Potential und die Photonensphäre bei 3M





Blau: ISCO , Pink: Photonensphäre

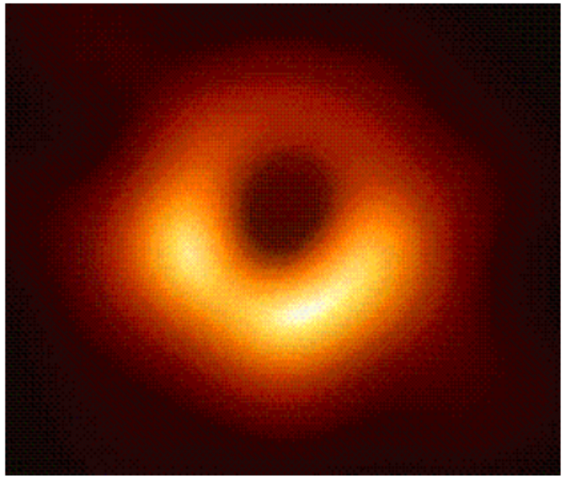
Teil I: Das Schwarze Loch in M87 (ohne Rotation) - Mozilla Firefox

Wetter Frankfurt am Main | Webmail at FIAS | General relativistic formulatio | Matthias Hanauske | Teil I: Das Schwarze Loch in

https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VARTC/T1/BHinM87/SL-M87-noRot.html

Meistbesucht | Getting Started

Ein wenig mehr als hundert Jahre nachdem Albert Einstein seine Feldgleichungen der Allgemeine Relativiätstheorie der Öffentlichkeit präsentierte, und er damit die Grundlage für Gravitationswellen und schwarzer Löcher formulierte, ist seit einigen Wochen ein Meilenstein in der Geschichte der Astronomie in aller Munde:



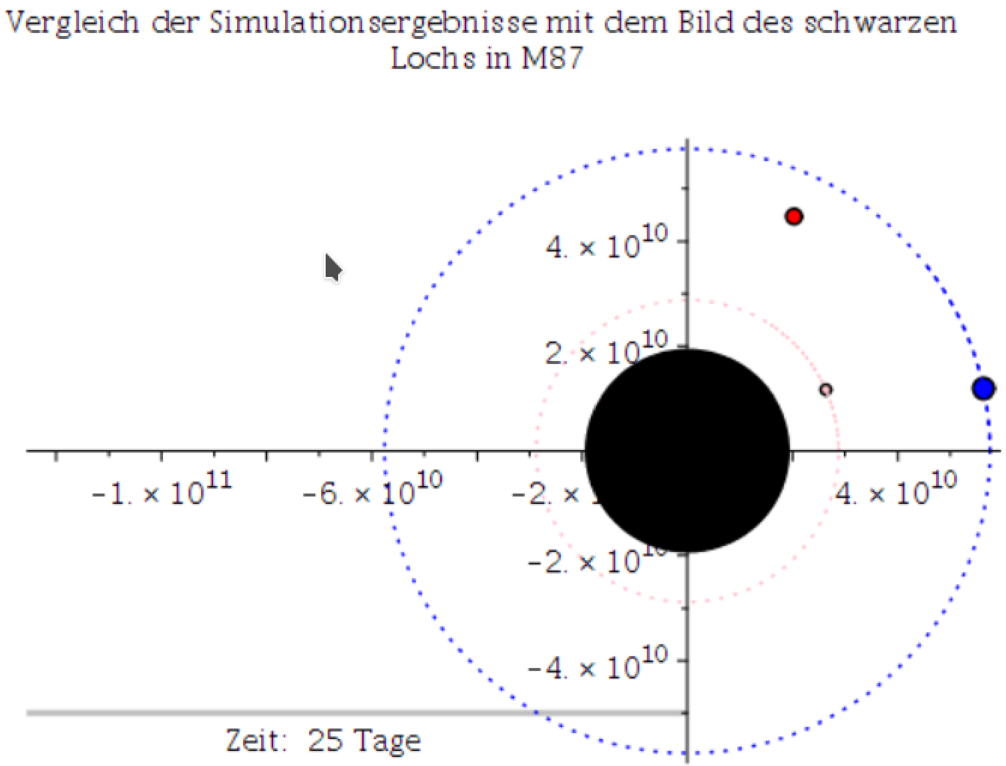
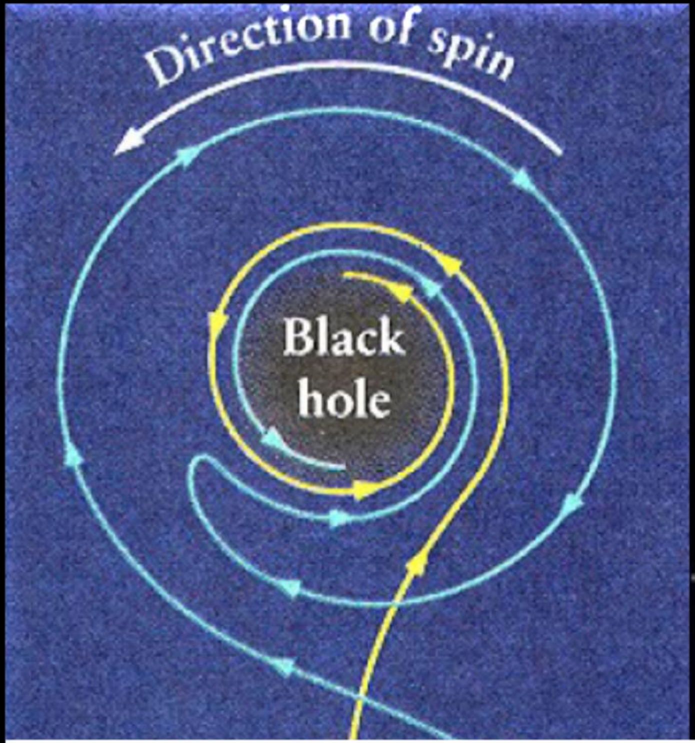


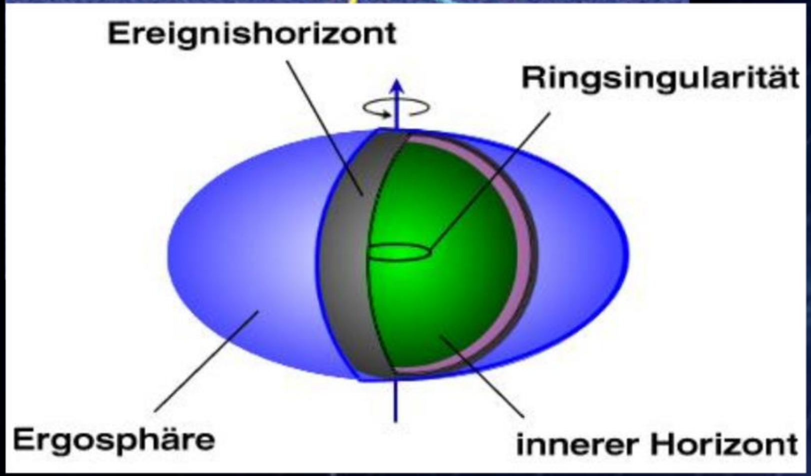
Abb. 1: Erstes Bild eines schwarzen Lochs im Vergleich mit den Simulationsergebnissen des Maple- Worksheets.

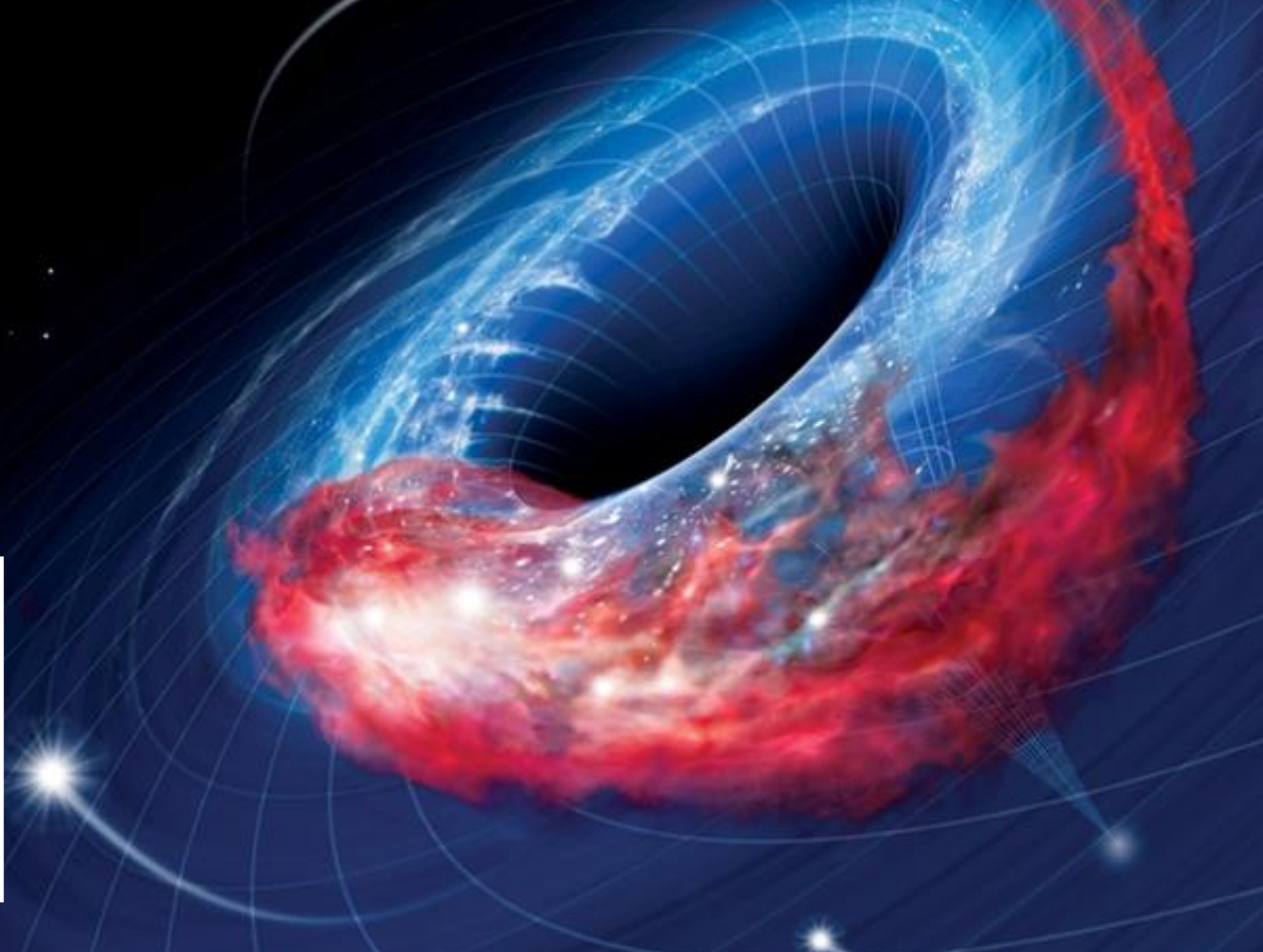
Das Bild zeigt das schwarze Loch im Zentrum unserer Nachbargalaxie M87; bzw. ein wenig genauer, die um ein schwarze Loch entstehende Radiostrahlung (das Bild wurde mittels eines weltweiten Verbunds von Radiowellenteleskopen (EHT: Event Horizon Teleskop) sichtbar gemacht). In Kürze (voraussichtlich im Sommer 2019) werden die aufgenommenen

11:33

Rotierende schwarze Löcher und die Kerr Metrik



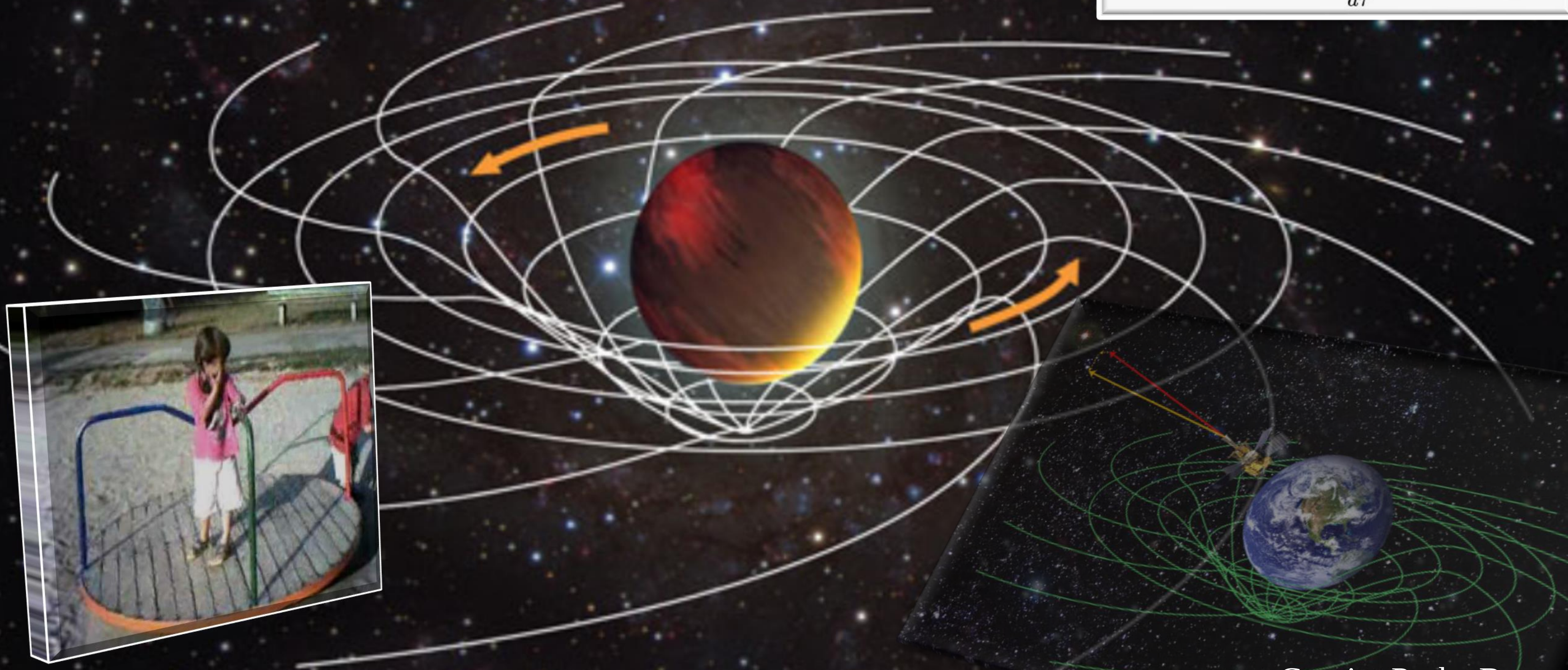




Der Mitführungseffekt der Raumzeit (“Frame-Dragging”)

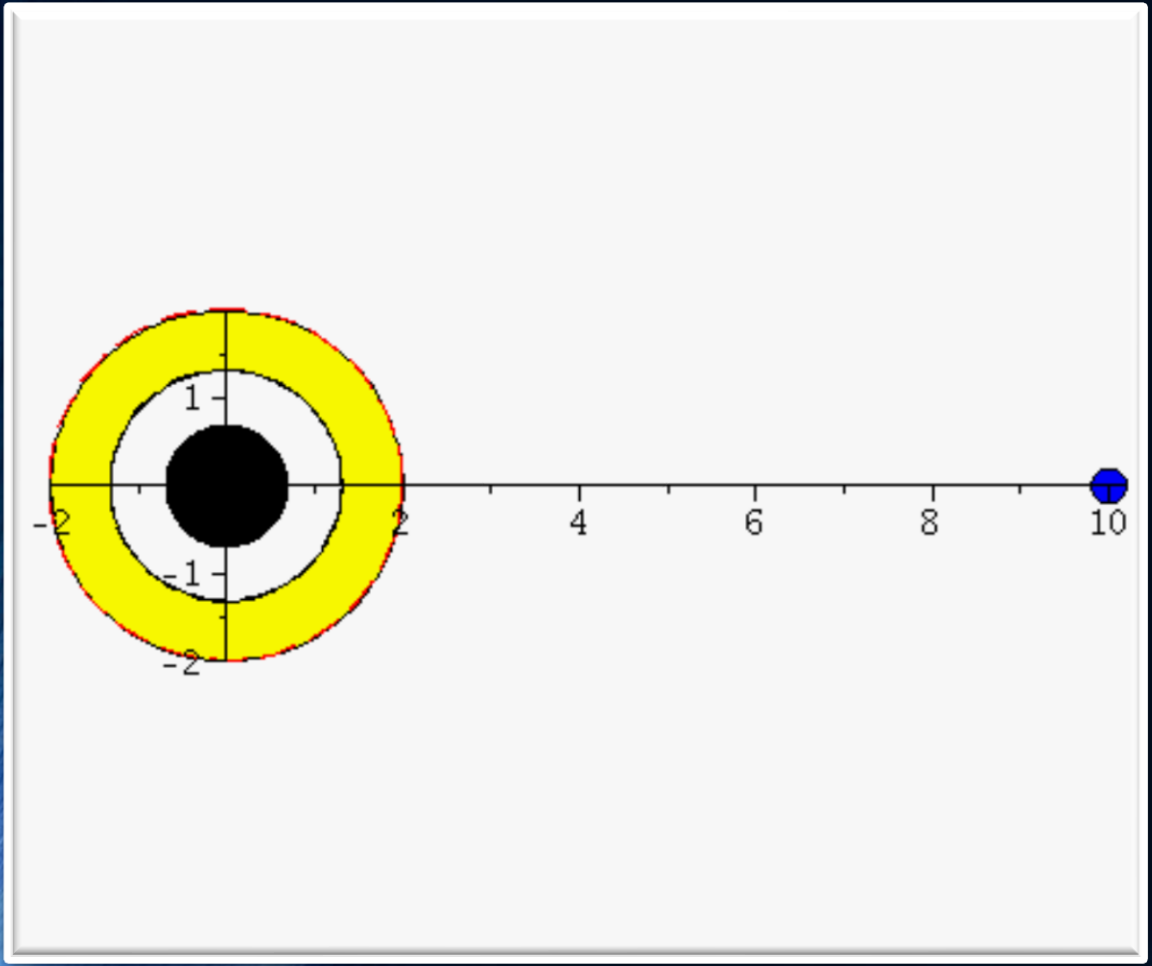
Experimente zur Bestätigung des Effektes: LARES, Gravity Probe B

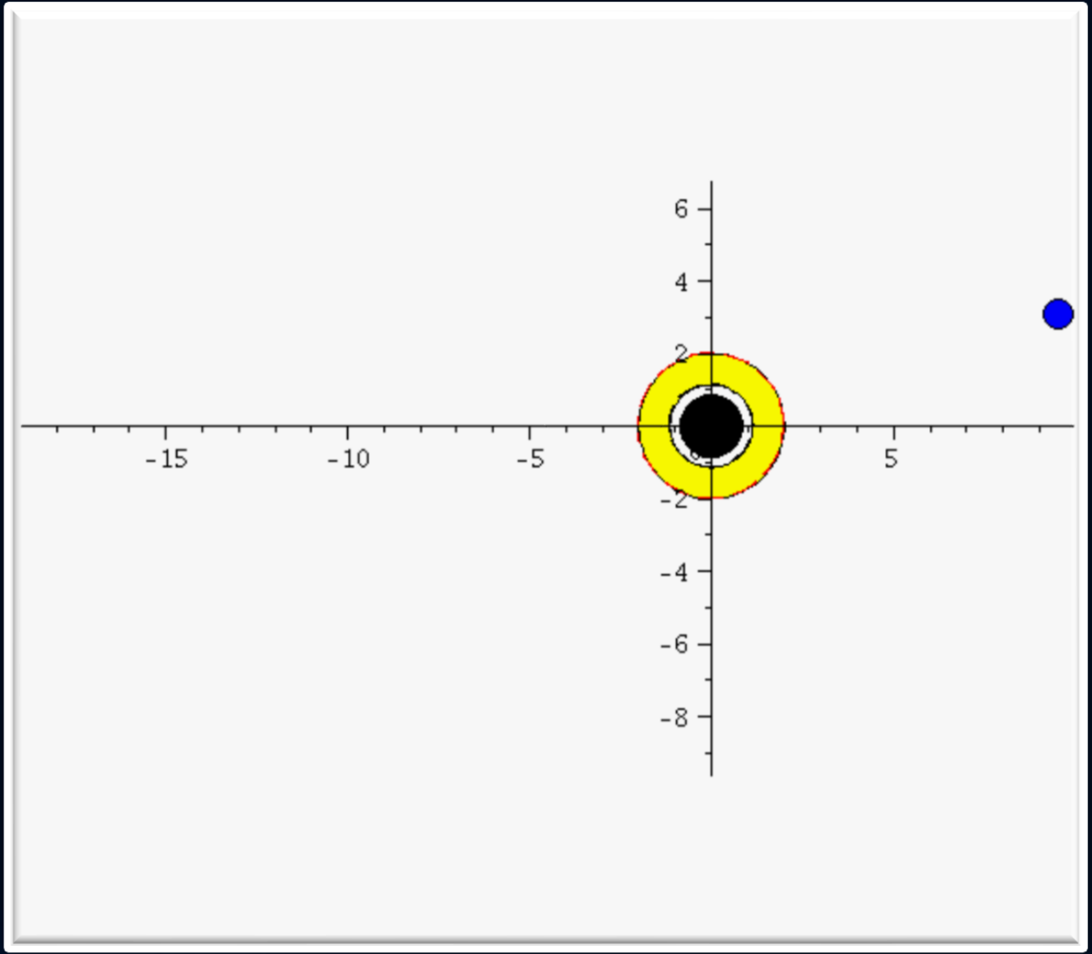
$$\omega(r,\theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$



Gravity Probe B

Der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging") und der Gravitomagnetische Effekt

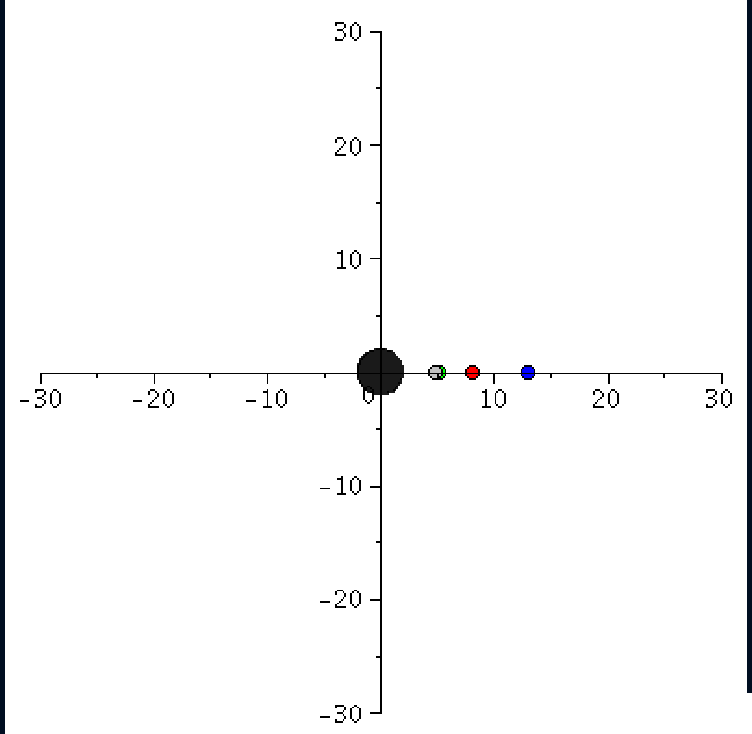


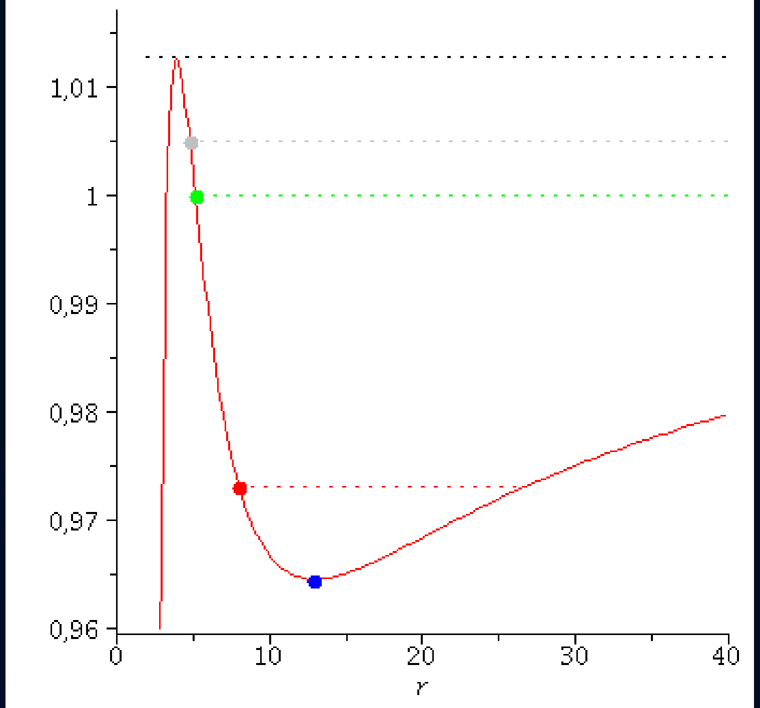


Geodätische Bewegung um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

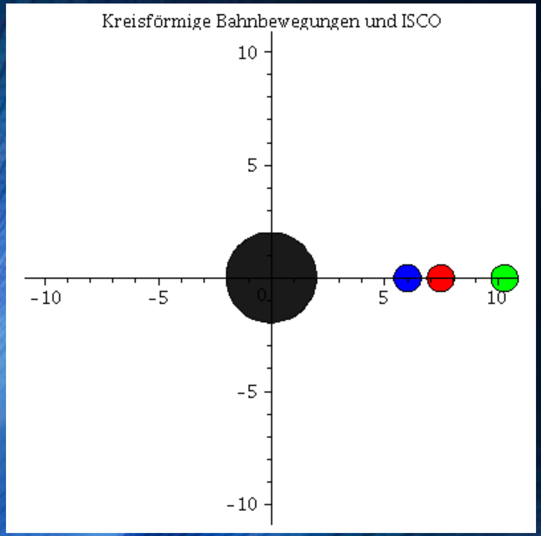
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

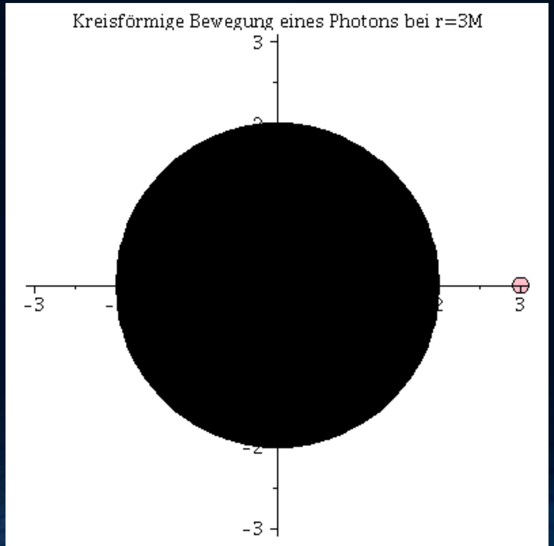
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$





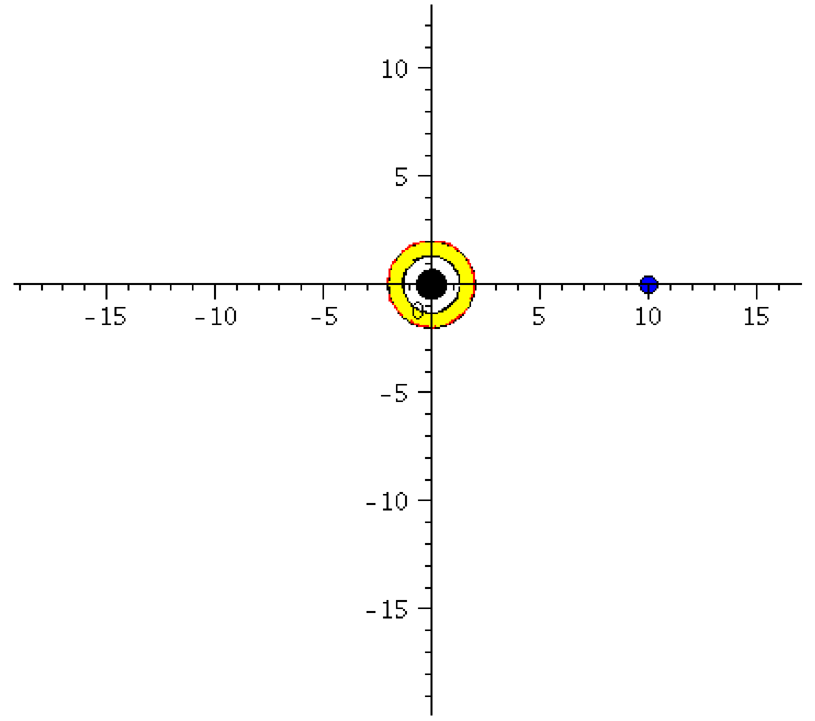
The *ISCO* and the *photon sphere*

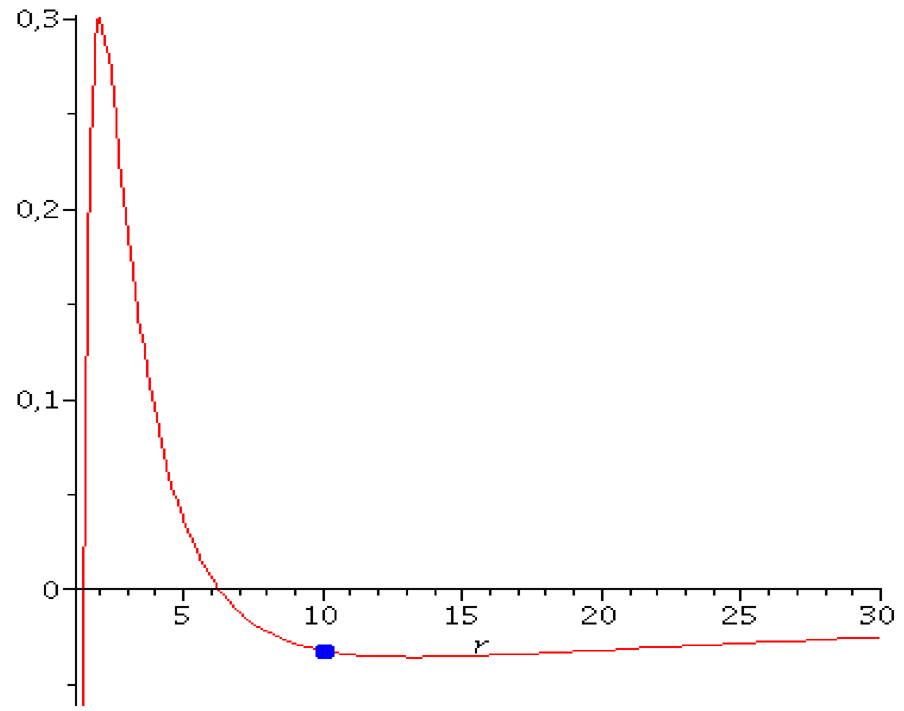




Kerr Metrik: Effektives Potential

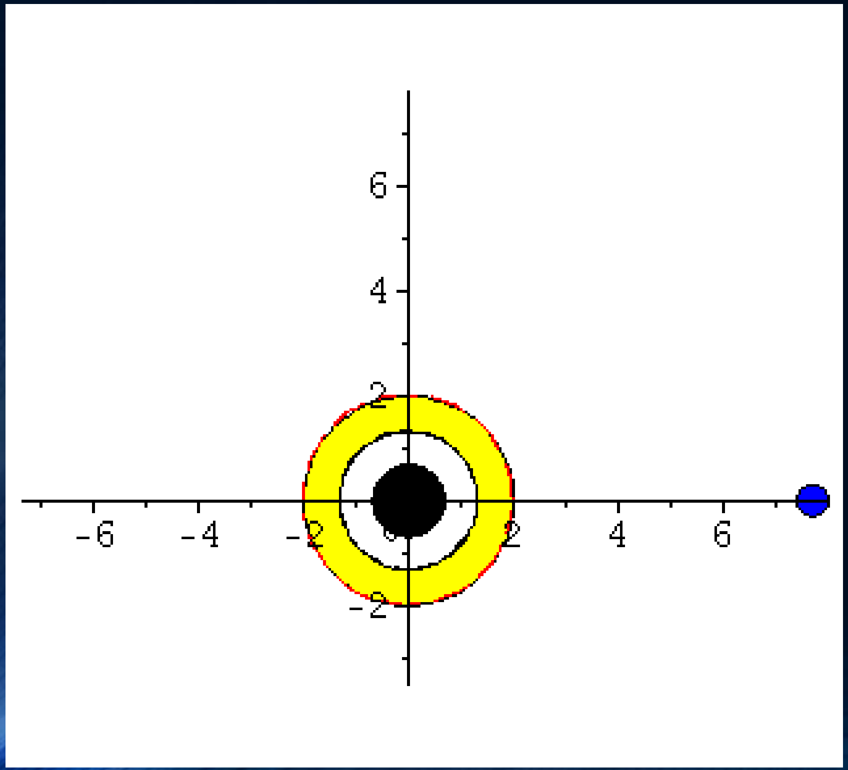
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$

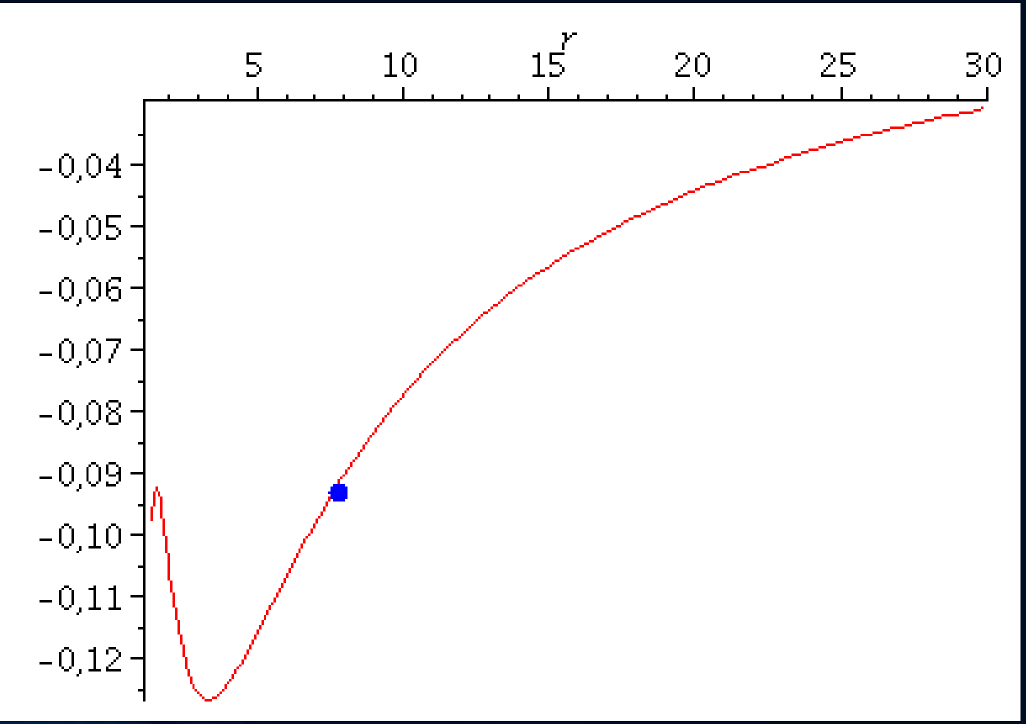




Kerr Metrik: Effektives Potential

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$

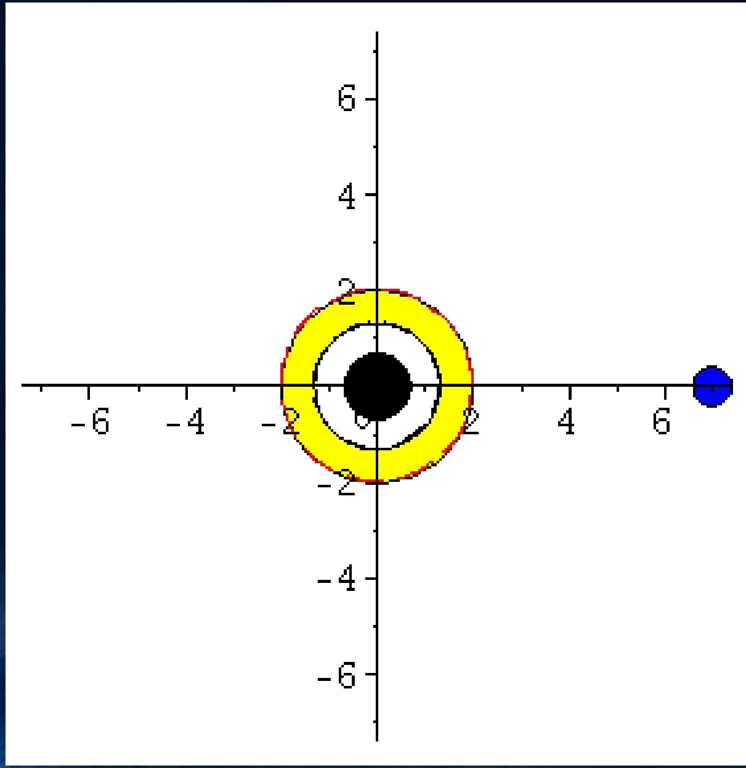


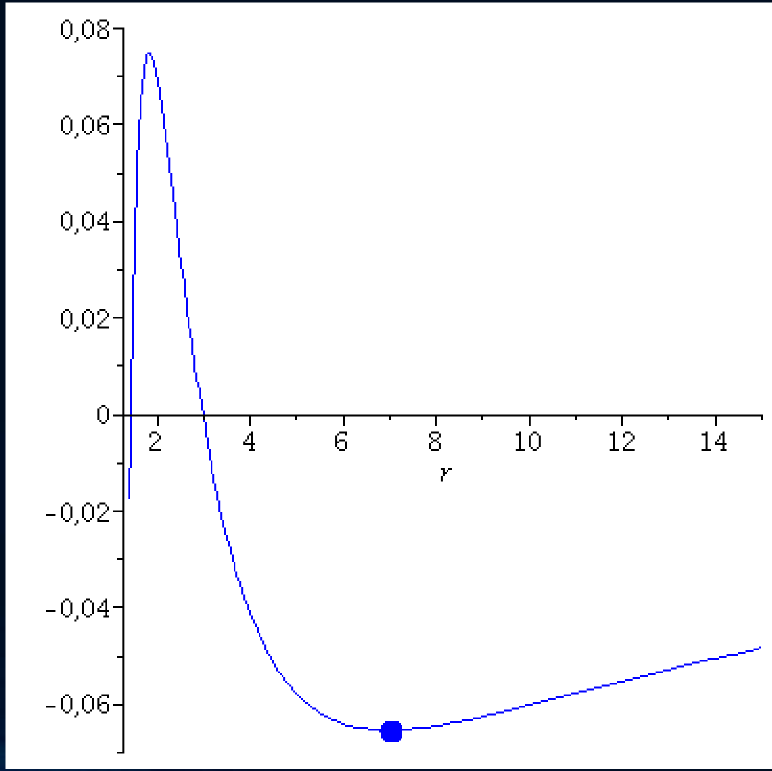


Kerr Metrik: Effektives Potential

Kreisförmige Bahnbewegungen

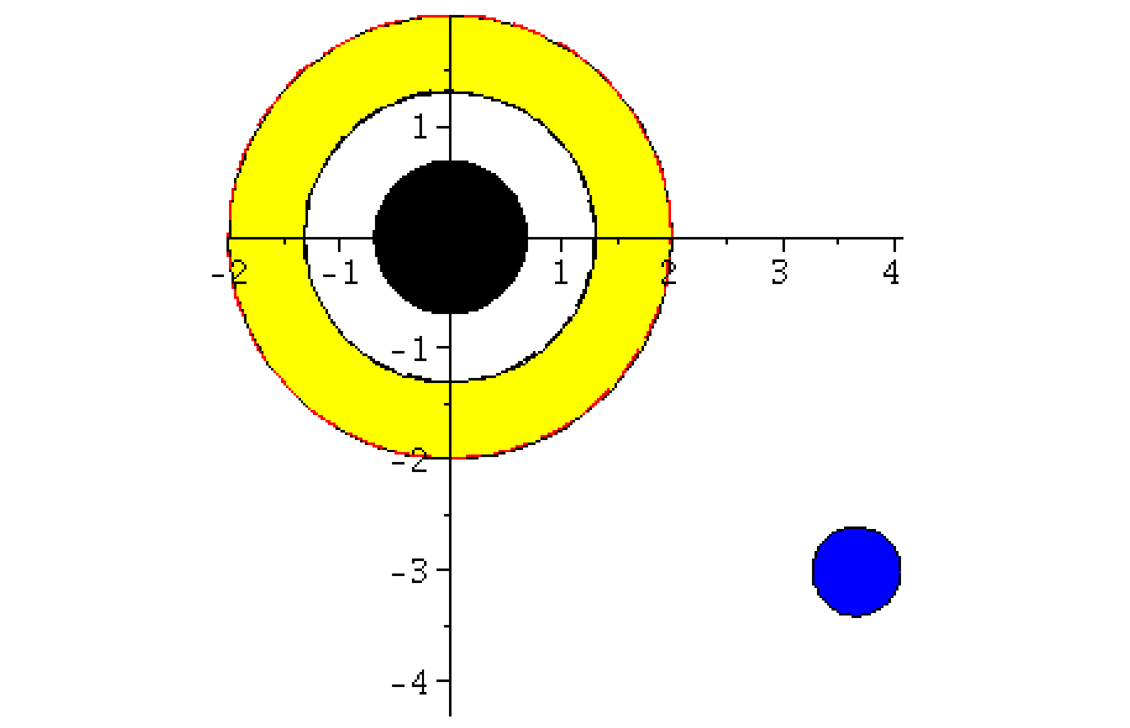
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$

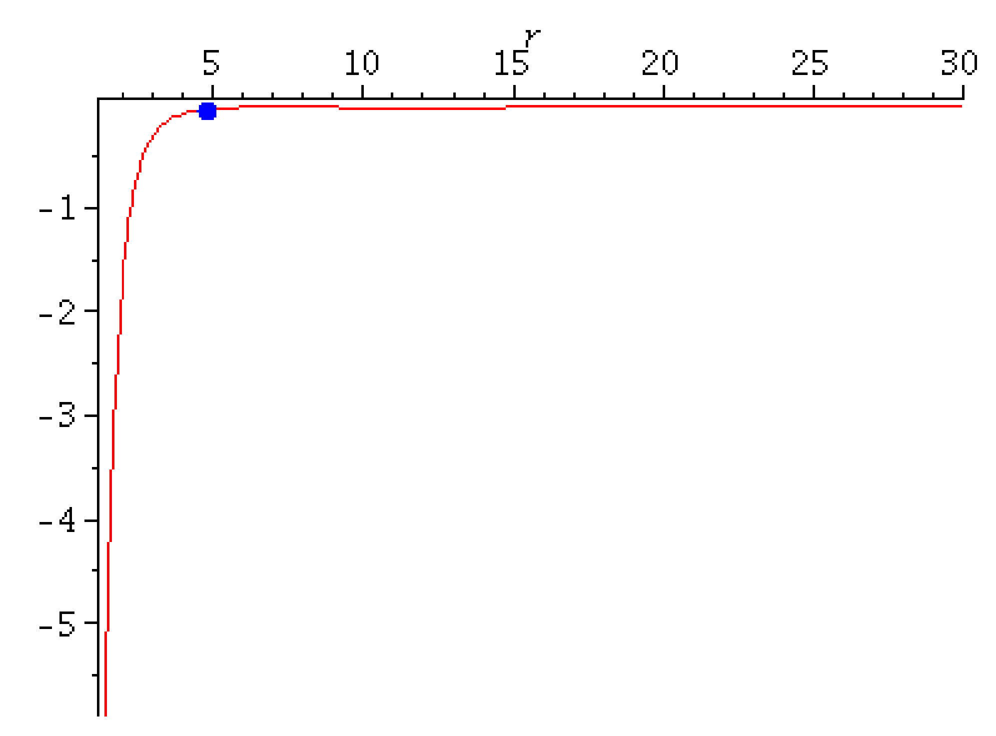




Kerr Metrik:
Bewegungen innerhalb der Ergosphäre

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$





Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

5. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der dritten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden die Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch vorgestellt.

Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Kerr-Raumzeit (in Boyer-Lindquist Koordinaten) betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein

Eigenschaften der Kerr-Metrik

```
>    restart:
  with( tensor ):
    with(plots):
 with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a in Boyer-Lindquist Koordinaten (a ist ein spezifischer Drehimpuls a=J/M und wird als der sogenannte Kerr-Rotationsparameter bezeichnet). Die Kerr Metrik besitz folgendes Aussehen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt}(r,\theta) & 0 & 0 & g_{t\phi}(r,\theta) \\ 0 & g_{rr}(r,\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}(r,\theta) & 0 \\ g_{\phi t}(r,\theta) & 0 & 0 & g_{\phi\phi}(r,\theta) \end{pmatrix} \quad \text{, wobei:}$$

$$g_{tt}(r,\theta) = \left(\frac{1-2\,M\,r}{\rho^2}\right) \;,\; g_{t\phi}(r,\theta) = \frac{2aMr\sin^2(\theta)}{\rho^2} \;,\; g_{rr}(r,\theta) = -\frac{\rho^2}{\Delta} \;,$$

$$g_{\theta\theta}(r,\theta) = -\rho^2 \;,\; g_{\phi\phi}(r,\theta) = -\left(\frac{r^2 + a^2 + 2Mra^2\sin^2(\theta)}{\rho^2}\right)\sin^2(\theta) \;,$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2(\theta) \;,\; \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

Struktur der Ereignishorizonte, Flächen der stationären Grenze und Flächen unendlicher Rotverschiebung

Die Flächen der stationären Grenze (stationary limit surfaces) und die der unendlichen Rotverschiebung sind durch $g_{tt} = 0$ bestimmt. Man erhält zwei Lösungen, die man gewöhnlich mit den Symbolen r_{S^+} und r_{S^-} bezeichnet.

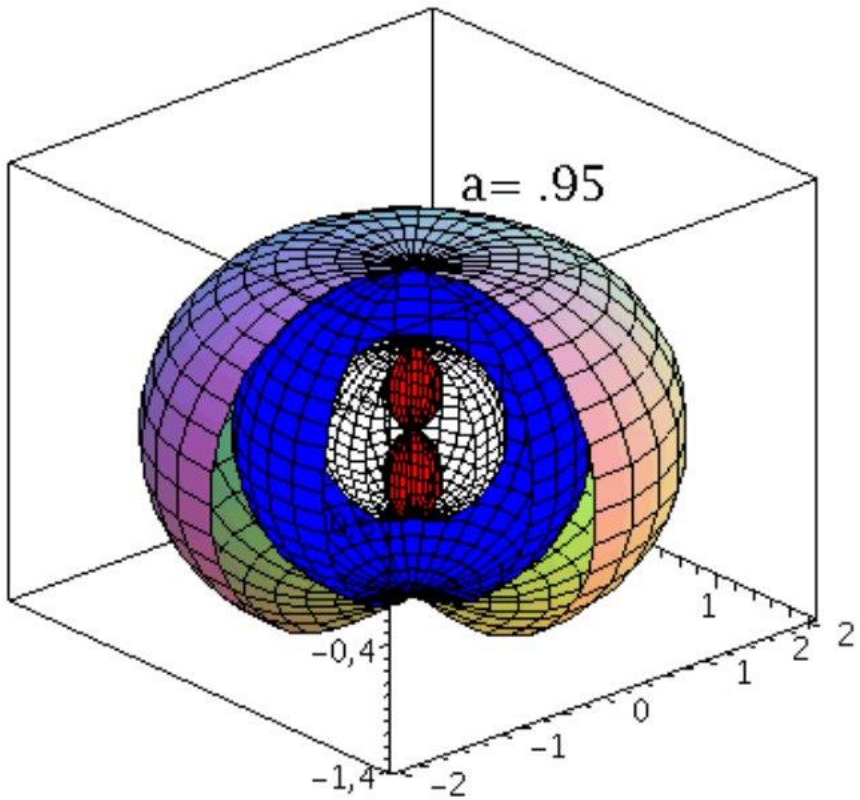
```
> UnRot:=solve(get_compts(g)[1,1]=0,r);
```

$$UnRot := M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos(\theta)^2}, M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos(\theta)^2} \tag{2.1.1.1}$$

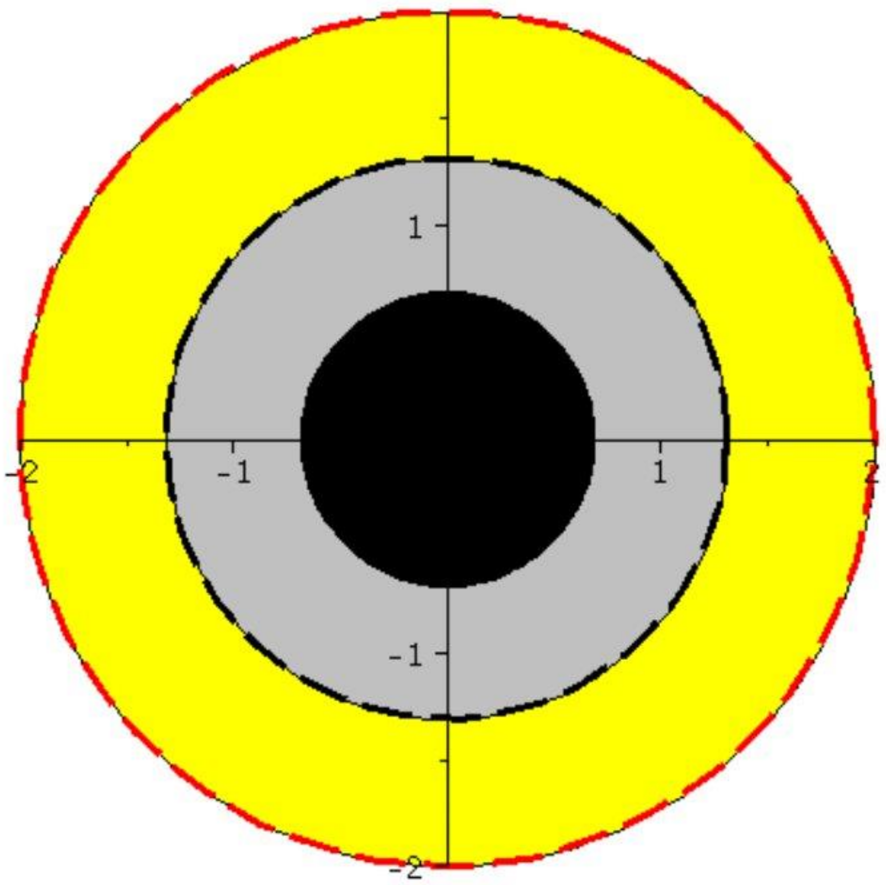
Die Ereignishorizonte sind durch $g^{rr} = 0$ (bzw. $g_{rr} \rightarrow \infty$) bestimmt. Man erhält wieder zwei Lösungen, die man gewöhnlich mit den Symbolen r_+ und r_- bezeichnet.

```
> Horizon:=solve(get_compts(ginv)[2,2]=0,r);
```

$$Horizon := M + \sqrt{M^2 - a^2}, M - \sqrt{M^2 - a^2} \tag{2.1.1.2}$$

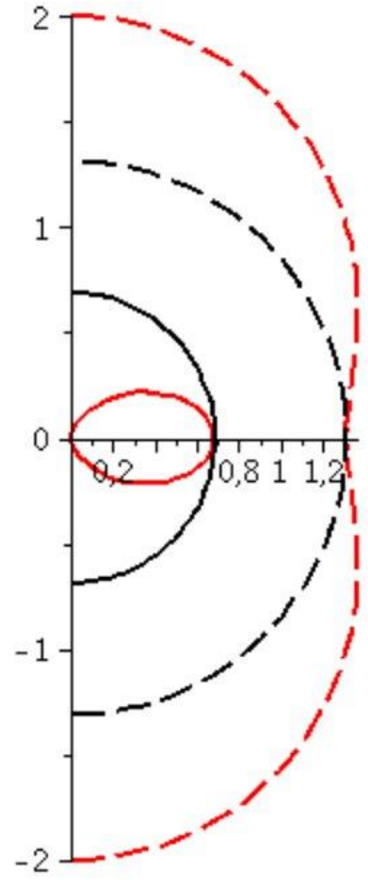


Horizontstruktur in der äquatorialen Ebene (Gelb: Ergosphäre, grau: Bereich zwischen äußerem und innerem Ereignishorizont, a=0.95):



Horizontstruktur in der polaren Ebene (a=0.95):

```
display({A,B,C,DD},scaling=constrained);
```



Animation der Horizontstruktur bei ansteigender Rotation des schwarzen Lochs:

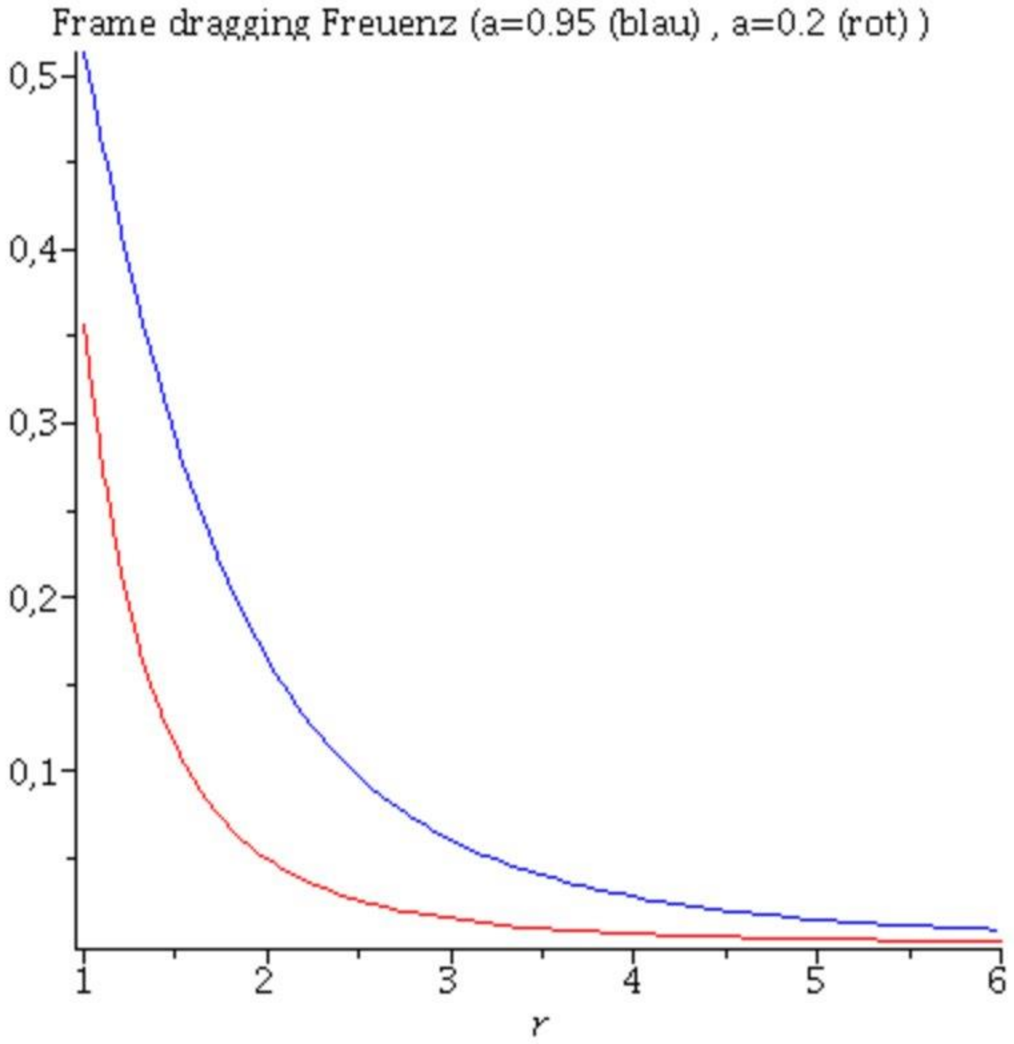
1 −3	1 −3	1 −3

Die Rotation der raumzeitlichen Struktur um das schwarze Loch (das Frame dragging)

Ein rotierendes schwarzes Loch zieht die Raumzeit mit sich mit. Die Rotationsfrequenz mit der die Raumzeit mitgeführt wird nennt man "Frame dragging" Frequenz; sie quantisiert, mit welcher Frequenz ein im Eigensystem "ruhender" Probekörper von der ihm zugrundeliegenden Raumzeit mitgezogen wird:

$$\omega(r) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$

```
> FrameDrag:=get_compts(ginv)[1,4]/get_compts(ginv)[1,1];
   #FrameDrag:=-get_compts(g)[1,4]/get_compts(g)[4,4];
```


Frame dragging Freuenz (a=0.95 (blau) , a=0.2 (rot))
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1
2
3
4
5
6
r

Radial in ein rotierendes schwarzes Loch einfallender Probekörper

Wir betrachten nun einen Probekörper der radial in ein rotierendes schwarzes Loch fällt.

```
>     restart:
  with( tensor ):
   with(plots):
 with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a in Kerrschildkoordinaten:

```
>                   coord := [t, r, theta, phi]:
                     rho2:=r^2+(a*cos(theta))^2:
 Delta:=r^2-2*M*r+a^2:Sig2:=(r^2+a^2)^2-a^2*Delta*(sin(theta))^2:
        g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
                g_compts[1,1] := (1-2*M*r/rho2):
        g_compts[1,4] := +(2*a*M*r*(sin(theta))^2)/rho2:
                  g_compts[2,2] :=-rho2/Delta:
                     g_compts[3,3] := -rho2:
```

Anfangswerte:

Zur Zeit t=0 sei der fallende Körper an der folgenden Position: (r=10,theta=Pi/2,phi=0), die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0. Wir beschreiben den Fall aus der Sichtweise eines im Unendlichen ruhenden Beobachters.Bemerkung: Der Anfangswert dt0 ergibt sich hierbei aus dem infinitesimalen Weglängenelements $ds^2=1$ eines massiven Probekörpers:

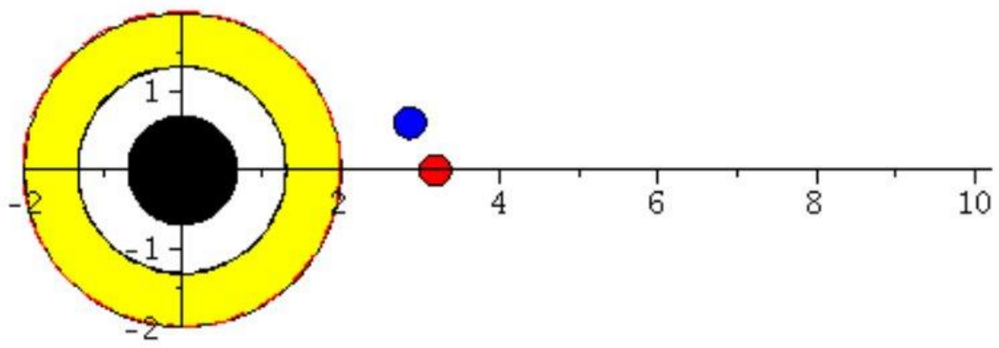
```
> dt=solve(evalf(subs({M=setM,a=seta,theta=Pi/2,dr=0,dtheta=0,dphi=0,r=10},ds2=1)),dt);
```

$$dt = (1.118033989, -1.118033989) \tag{2.2.4}$$

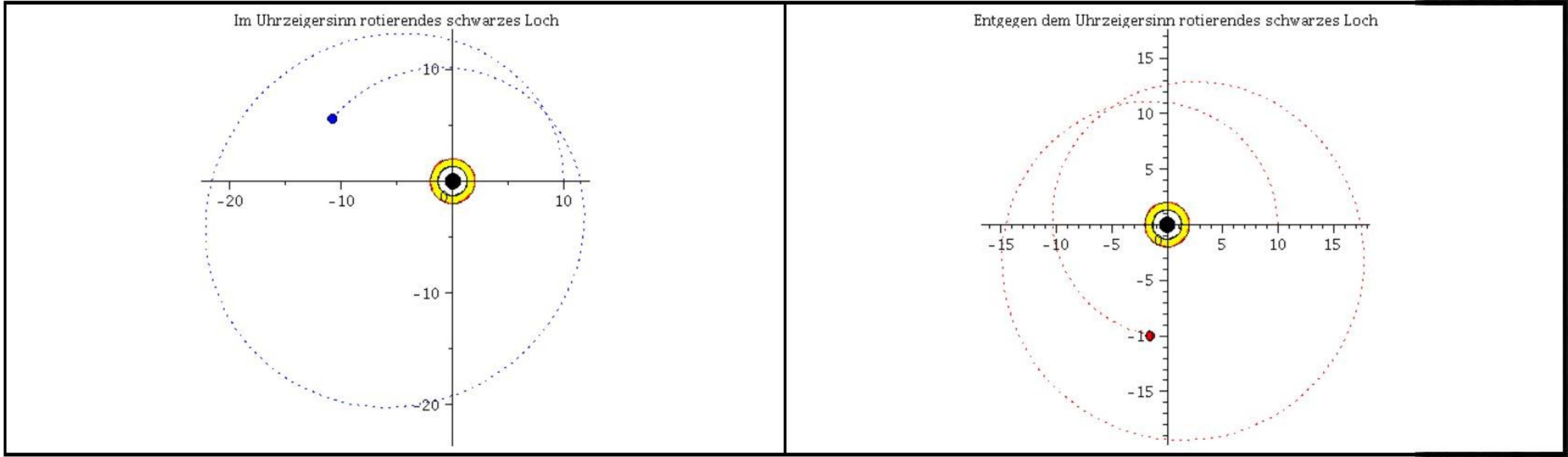
```
>           r0:=10:
            t0:=0:
        theta0:=Pi/2:
           phi0:=0:
           dr0:=0:
 dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)):
         dtheta0:=0:
           dphi0:=0:
```

Numerisches Lösen der Geodätengleichung:

```
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true);
```



```
> Animat1:=display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Im Uhrzeigersinn rotierendes schwarzes Loch"):
  Animat2:=display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true,title="Entgegen dem Uhrzeigersinn rotierendes schwarzes Loch"):
  display(Array([Animat1,Animat2]));
```




```
>
>
```

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

6. Vorlesung

Die Kerr Metrik: Effektives Potential, kreisförmige Bewegungen, die innerste stabile Kreisbahn und der gravitomagnetische Effekt

Basierend auf den Ergebnissen der geodätischen Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes Kerr schwarzes Loch (siehe Vorlesung 5), werden die möglichen Bewegungen mittels eines definierten effektiven Potential näher verstanden. Zusätzlich wird der durch den Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging" bzw. Lense-Thiring Effekt) verursachte, gravitomagnetische Effekt an einem speziellen Beispiel veranschaulicht.

Bahnbewegungen in der Ebene und das effektive Potential V(r)

ähnlich wie im nichtrotierenden Fall (siehe Vorlesung 3) charakterisieren wir die unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials:

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ: Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma^0_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\
\frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma^1_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\
\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma^2_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\
\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma^3_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t, r, θ und ϕ die sphärischen Koordinaten und $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

```
> eqns:=geodesic_eqns( coord, lambda, Cf2 );
```

$$
eqns := \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) - \left(2 \sin(\theta)^2 M a \left(-r^2 + a^2 \cos(\theta)^2\right) \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda)\right)\right) \Big/ \right.
$$

$$
\left(a^6 \cos(\theta)^4 + a^4 \cos(\theta)^4 r^2 + 2\, r^2 a^4 \cos(\theta)^2 + 2\, r^4 a^2 \cos(\theta)^2\right.
$$

$$
- 4\, M r^3 a^2 \cos(\theta)^2 + r^6 + r^4 a^2 - 2\, M r^5 - 4\, M^2 r^2 a^2 \cos(\theta)^2 - 2 \cos(\theta)^4 M r a^4
$$

```
eq1:=simplify(subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda),theta(lambda)(lambda)=theta(lambda)},eq1)):
eq2:=simplify(subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda),theta(lambda)(lambda)=theta(lambda)},eq2)):
eq3:=simplify(subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda),theta(lambda)(lambda)=theta(lambda)},eq3)):
eq4:=simplify(subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda),theta(lambda)(lambda)=theta(lambda)},eq4)):
```

Infinitesimales Weglängenelement ds^2:

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

```
>          dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi])):
         ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1])):
       ds2:=collect( simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]):
               ds2a:=simplify(coeff(ds2, dt, 2)):
               ds2b:=simplify(coeff(ds2, dr, 2)):
             ds2c:=simplify(coeff(ds2, dtheta, 2)):
              ds2d:=simplify(coeff(ds2, dphi, 2)):
            ds2e:=simplify(coeff(ds2, dphi, 1)/dt):
 ds2:=ds2a*dt^2+ds2e*dt*dphi+ds2b*dr^2+ds2c*dtheta^2+ds2d*dphi^2;
```

$\frac{(-r^2 - a^2 \cos(\theta)^2 + 2\, M\, r)\, dt^2}{\ldots} \quad \frac{4\, a\, M\, r \sin(\theta)^2\, dt\, dphi}{\ldots}$

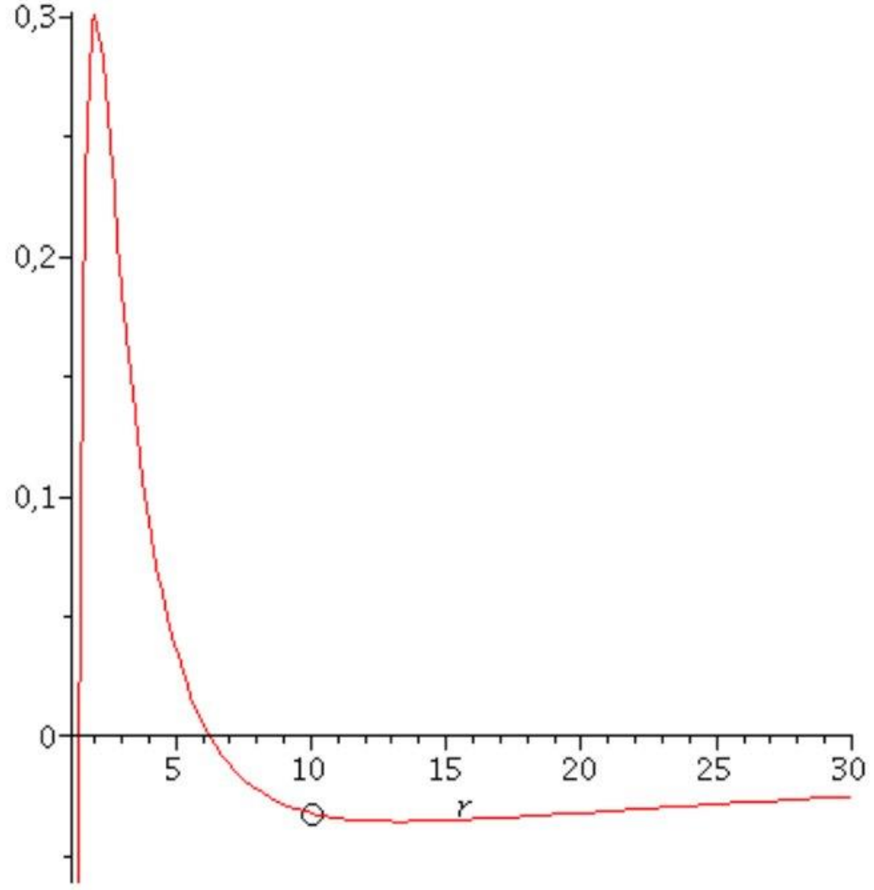
Festlegung der Anfangswerte:

```
> setM:=1:
  seta:=0.95:
  r0:=10:
  t0:=0:
  theta0:=Pi/2:
  phi0:=0:
  dr0:=0:
  dtheta0:=0:
  dphi0:=0.041:
  dt0:=solve(subs({theta=theta0,dphi=dphi0,dr=dr0,dtheta=dtheta0,M=1,a=0.95,r=10},ds2)=1,dt)[1]:
```

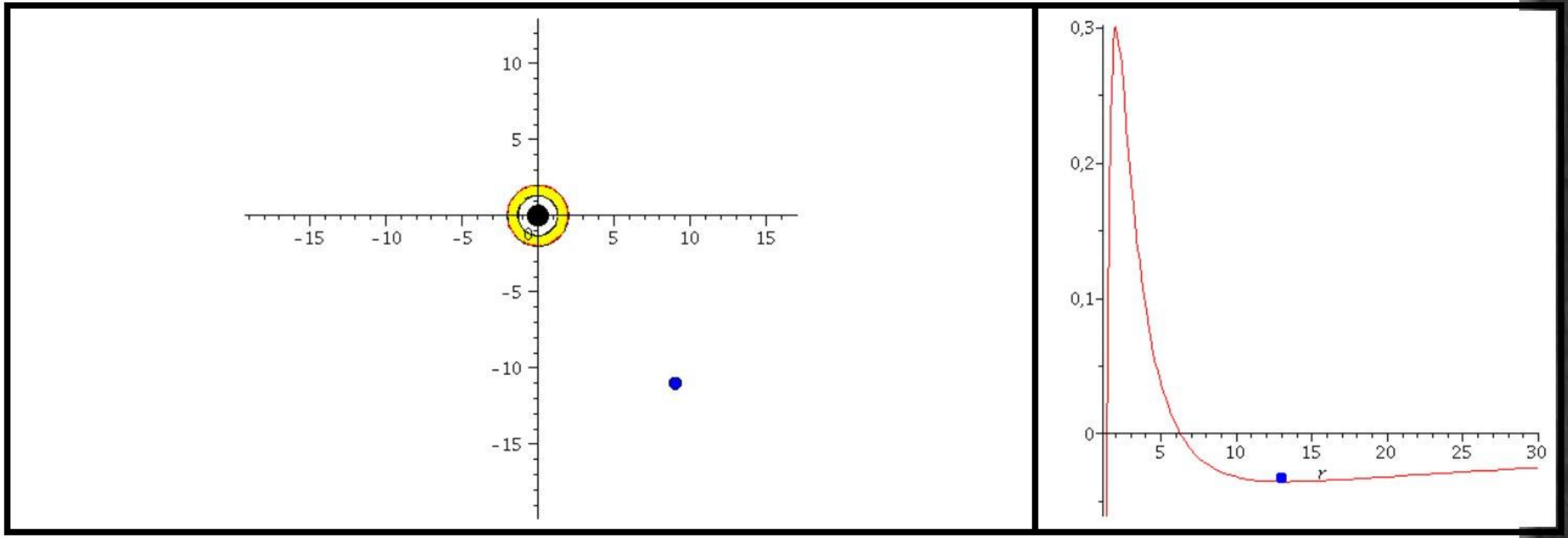
In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert (siehe z.B. Hartle- bzw. Hobson Buch). Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenem Drehimpuls pro Masse m und der Probekörper-Energie pro Masse ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l: Drehimpuls pro Masse m und E: Energie pro Masse) charakteriesiert. Die folgende Abbildung zeigt (in der Nomenklatur vom Hartle-Buch) das effektive Potential als Funktion des Radius bei den obigen gewählten Anfangswerten:

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$

$$VeffHartleRot := (r, M, l, a, en) \rightarrow -\frac{M}{r} + \frac{1}{2}\,\frac{l^2 - a^2\,(en^2 - 1)}{r^2} - \frac{M\,(l - a\,en)^2}{r^3}$$



Numerische Lösung bei vorgegebenen Anfangswerten:

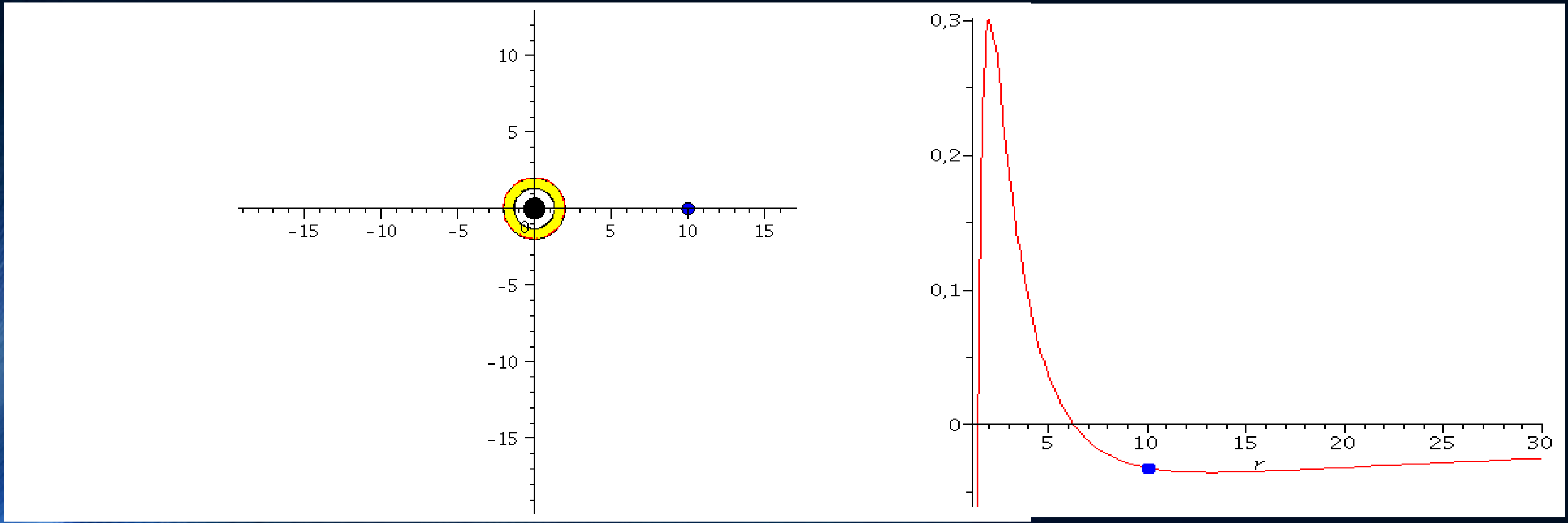


>

Kreisförmige Bewegung eines Probekörper und der ISCO

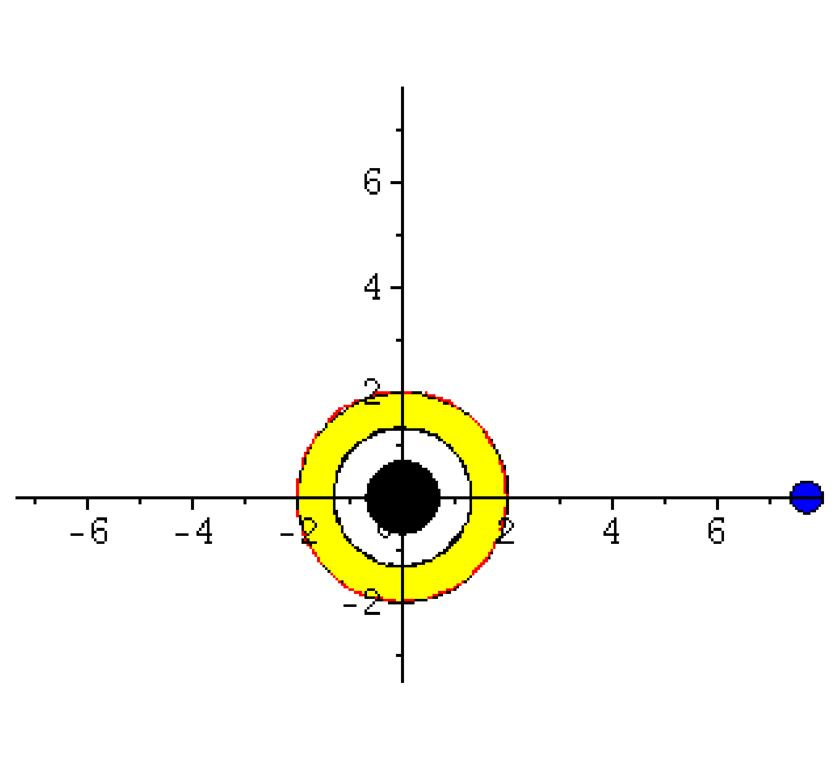
Kerr Metrik: Effektives Potential

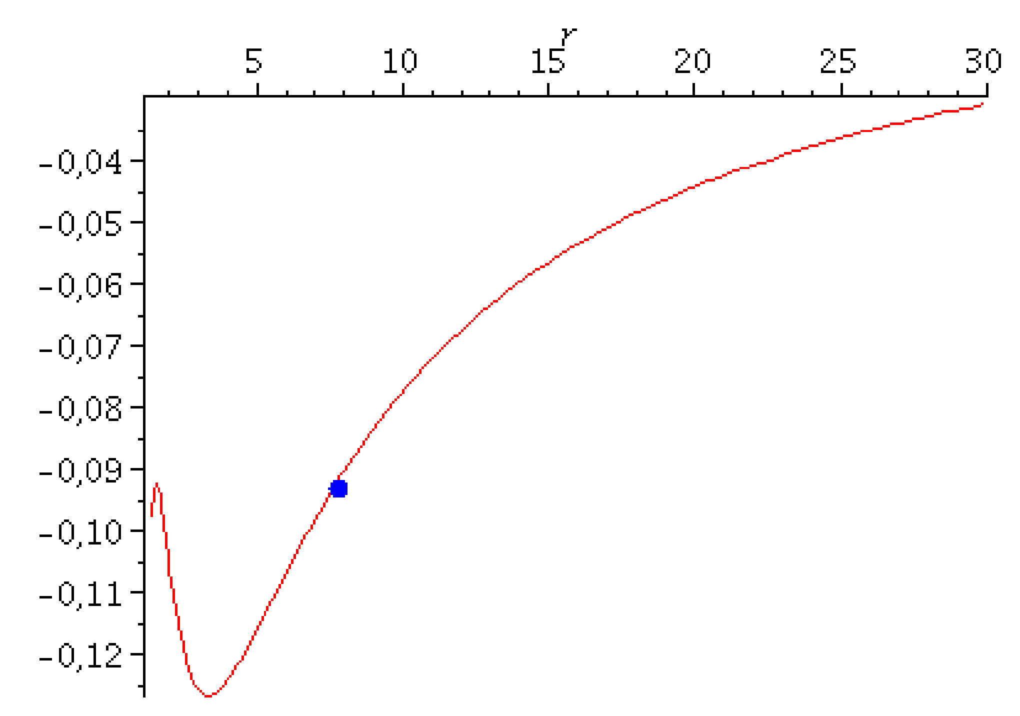
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$



Kerr Metrik: Effektives Potential

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$

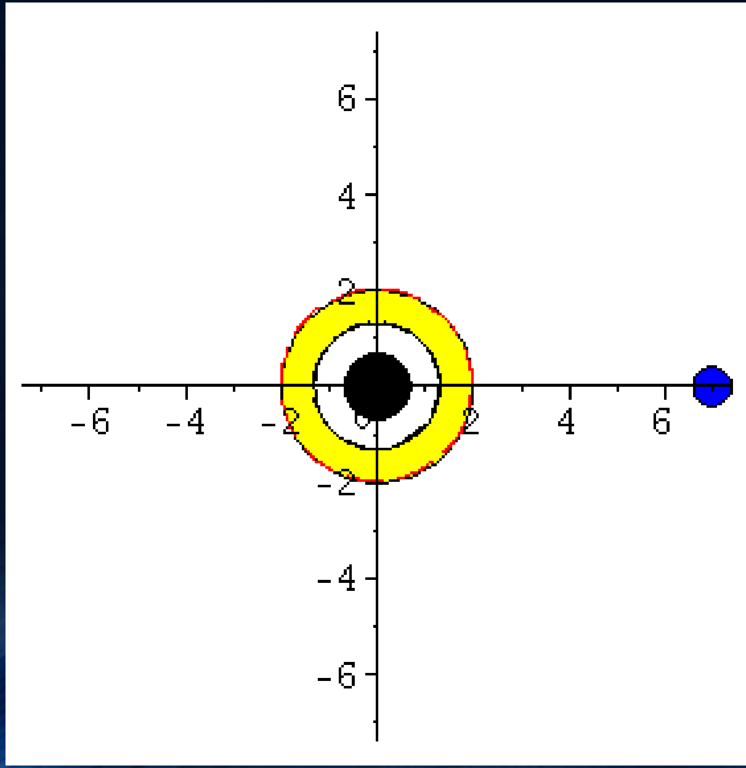


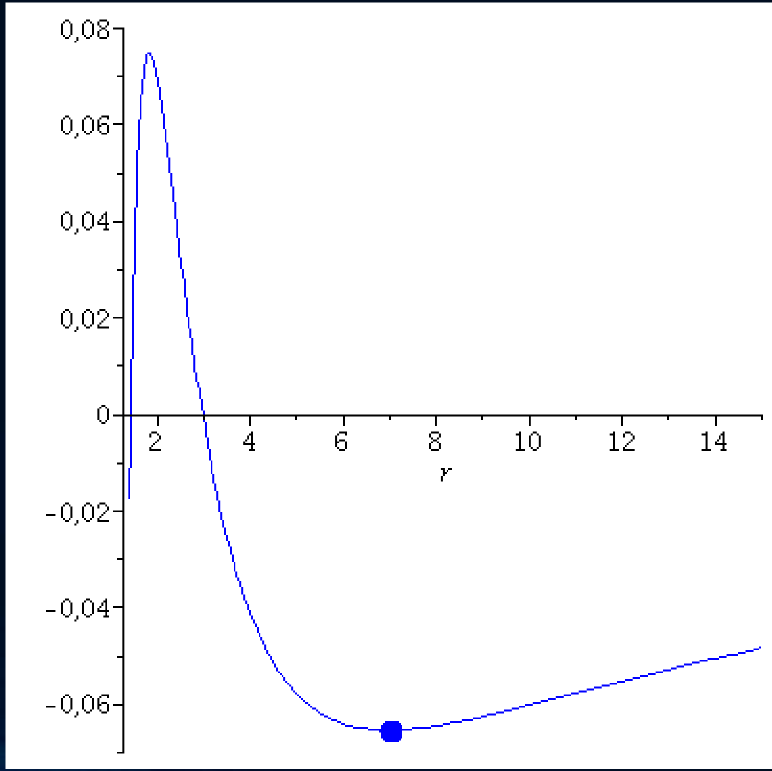


Kerr Metrik: Effektives Potential

Kreisförmige Bahnbewegungen

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$

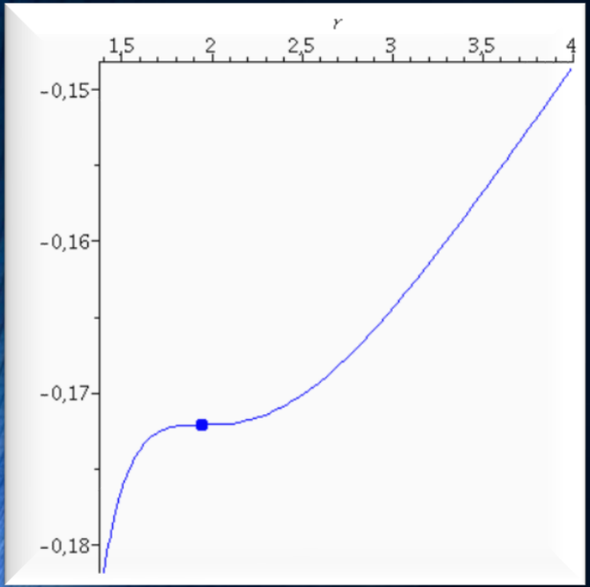




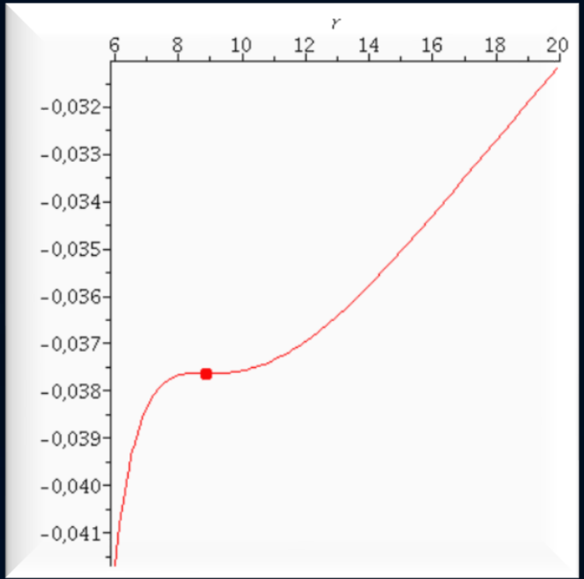
Kerr Metrik: Effektives Potential

Innerste „stabile" kreisförmige Bahnbewegungen (ISCOs)

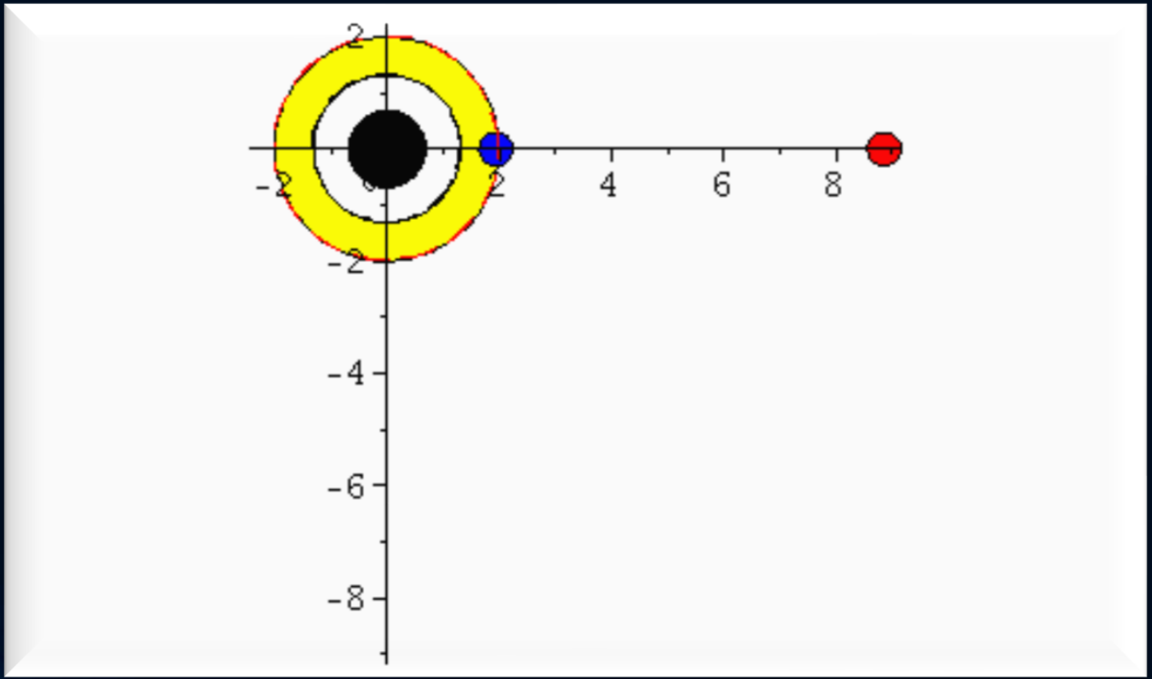
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$



Probekörper rotiert mit der Rotationsrichtung des schwarzen Loches

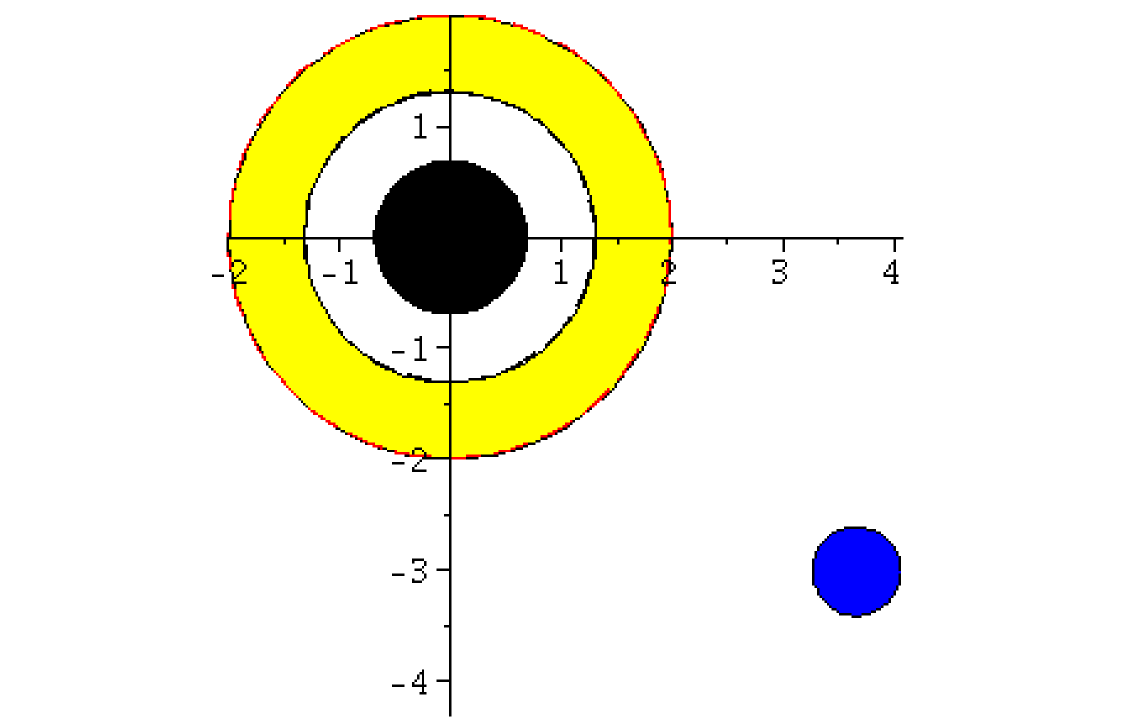


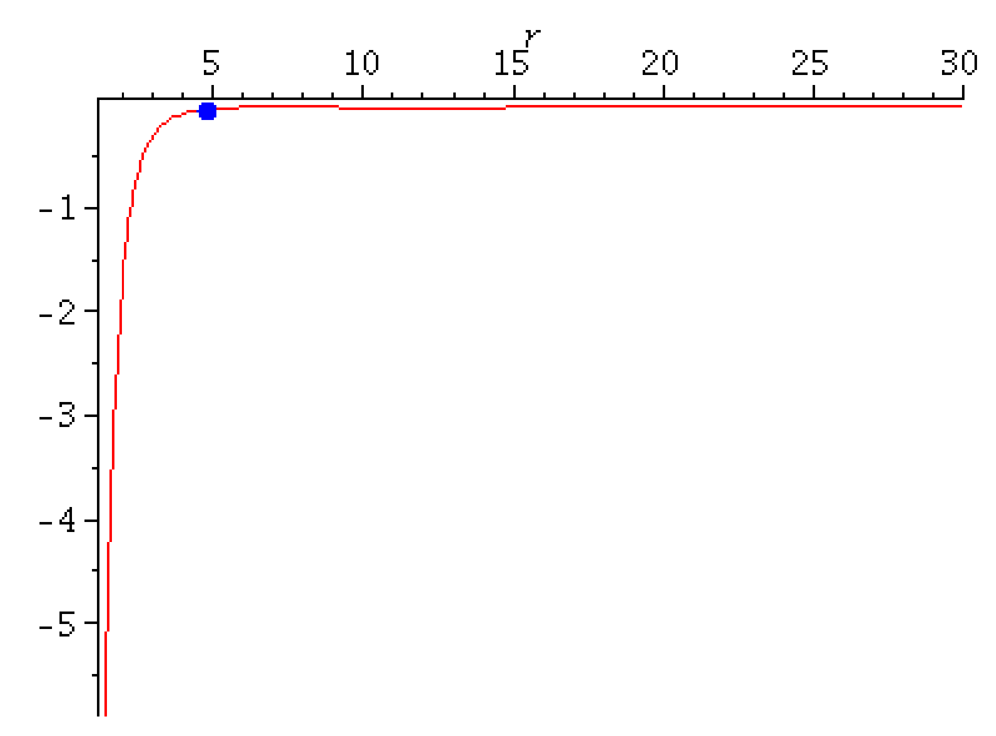
Probekörper rotiert entgegen der Rotationsrichtung des schwarzen Loches



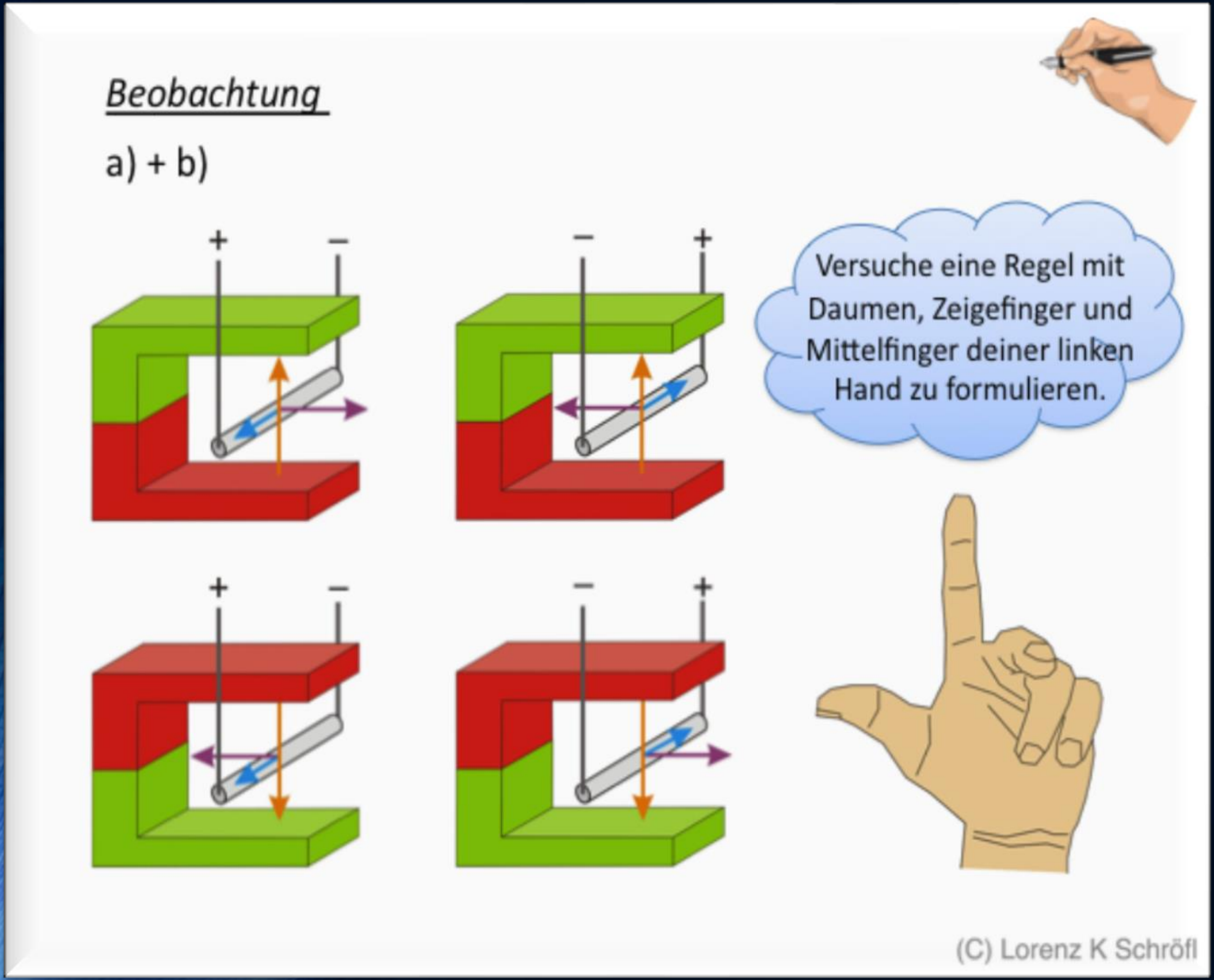
Kerr Metrik:
Bewegungen innerhalb der Ergosphäre

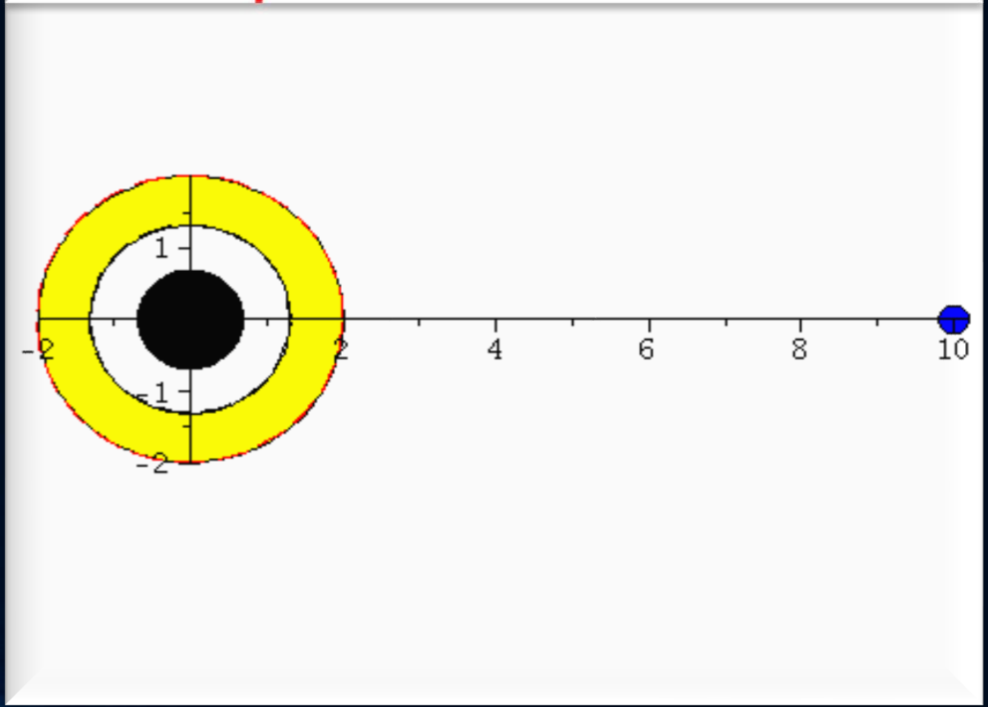
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$



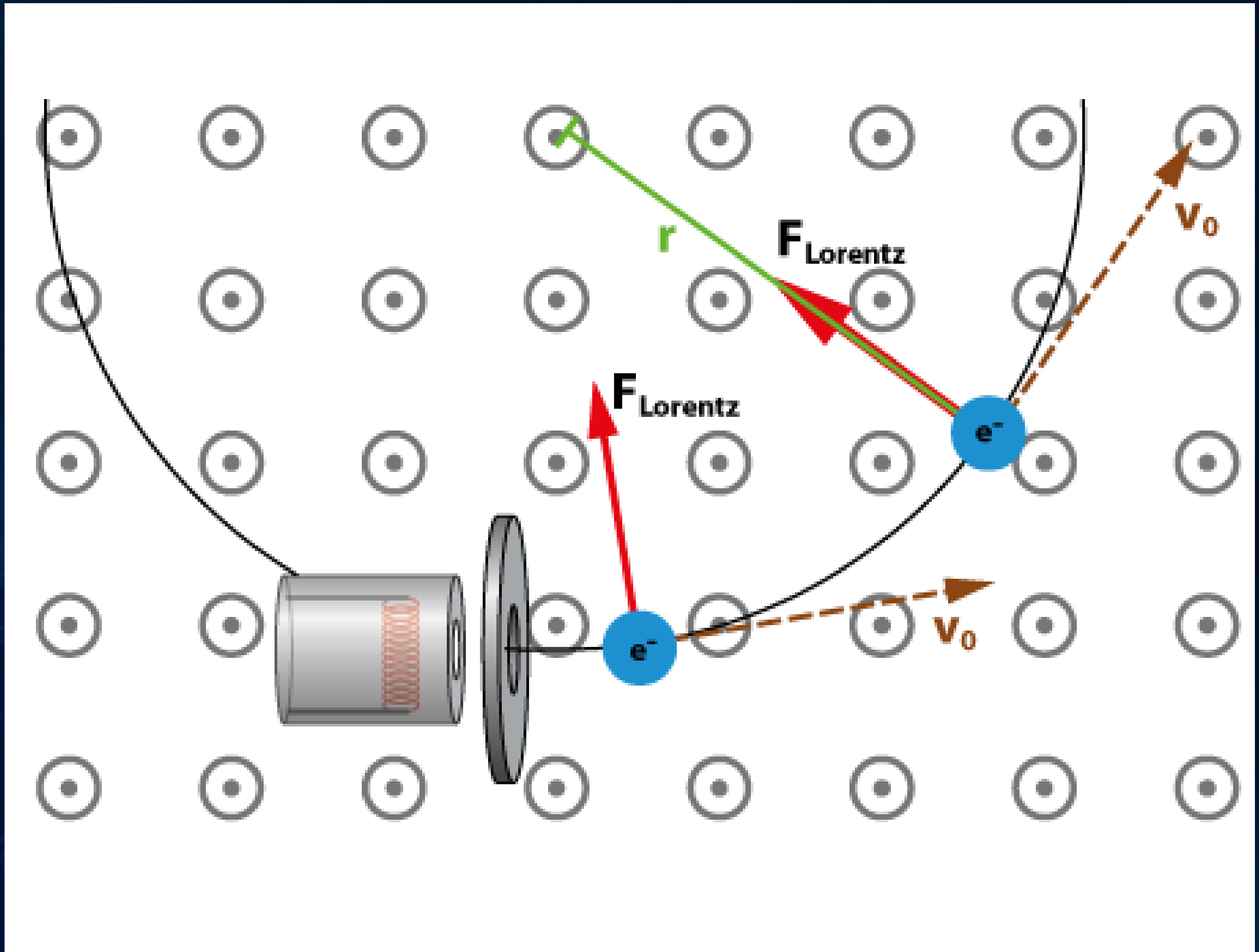


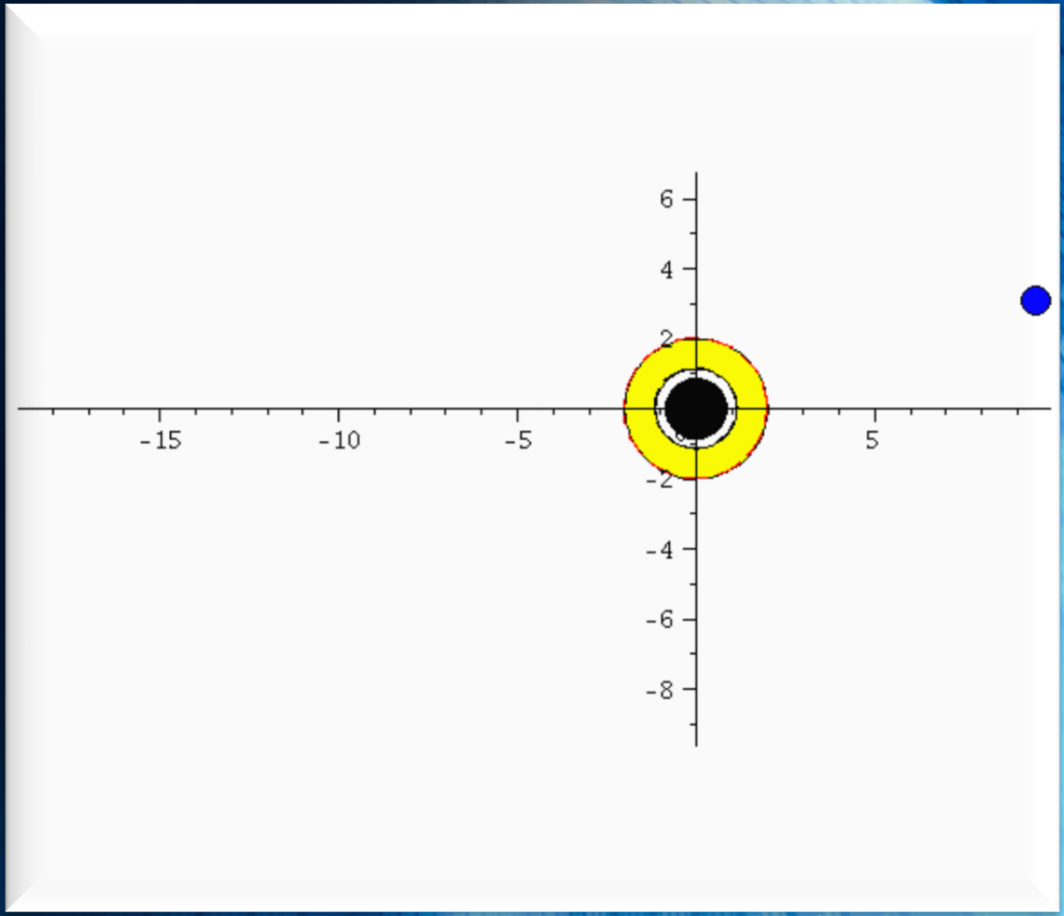
Der gravitomagnetische Effekt





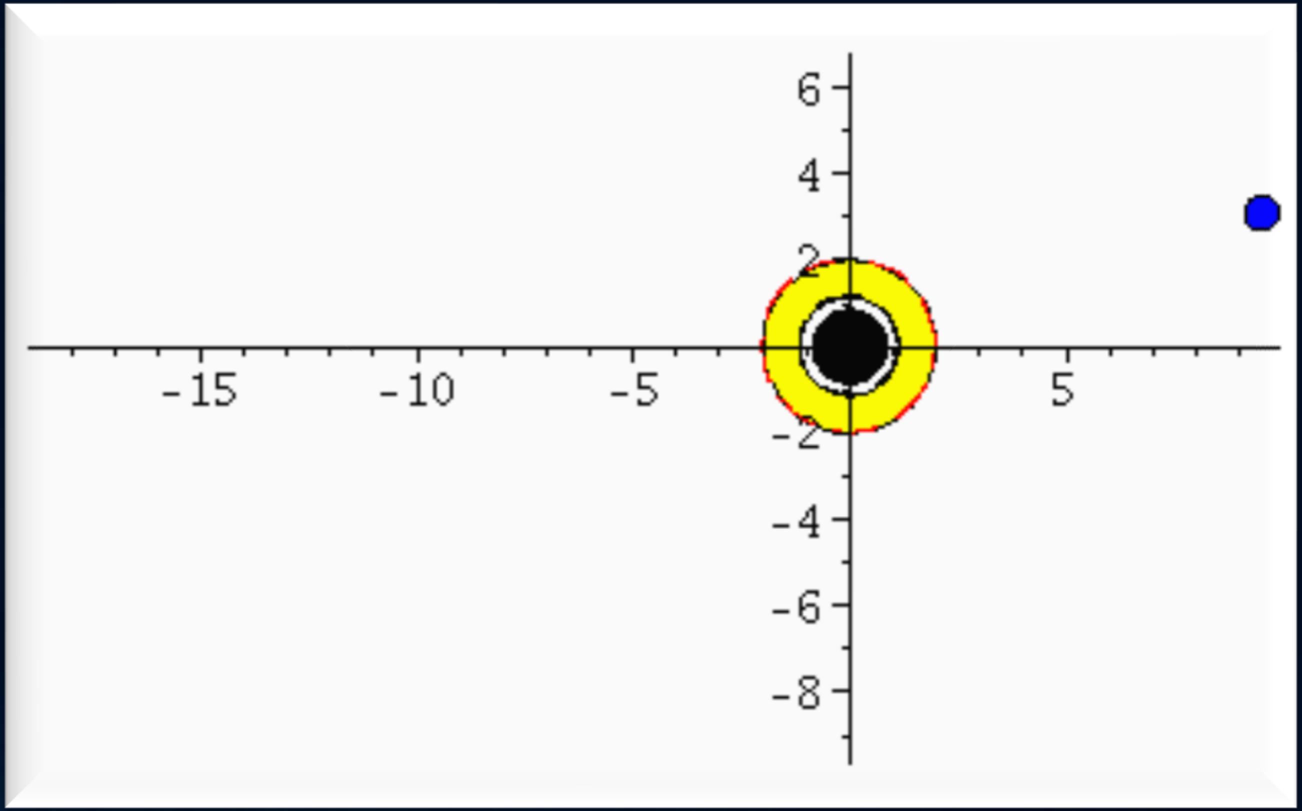
Der gravitomagnetische Effekt





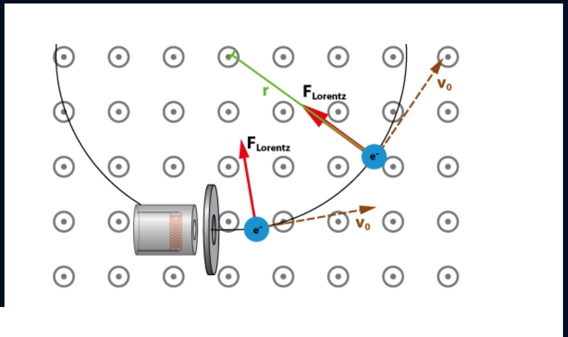
Kerr Metrik: Der gravitomagnetische Effekt

Die grüne Kurve entspricht einer Situation ohne Magnetfeld (nur Coulombkraft = nur gravitative Anziehung, keine Rotation), die blaue Kurve entspricht einer Situation wo das gravitomagnetische Feld in +z-Richtung (schwarzes Loch rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn) zeigt und bei der roten Kurve zeigt das gravitomagnetische Feld in -z-Richtung (schwarzes Loch rotiert im Uhrzeigersinn).



Der gravitomagnetische Effekt

Elektromagnetischer Effekt der Lorentzkraft:



Gravito-magnetischer Effekt:

$$\omega(r,\theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$

Diese "Frame dragging" Frequenz wirkt in ähnlicher Weise auf die Geschwindigkeit von Probekörpern, wie das Magnetfeld in der Elektrodynamik die Lorentzkraft verursacht. Im Fall1 (grün) ist das gravitomagnetische Feld Null, im Fall 2 (blau) ist es aus der äquatoriellen Ebene nach oben gerichtet und im Fall 3 zeigt es nach unten. In erster Näherung (siehe Fließbach Buch, S:172) ist die gravitomagnetische Lorentzkraft gleich $\sim 2\,(\omega \times \mathbf{v})$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt, ω der axiale Vektor der "Frame dragging" Frequenz und $\mathbf{v}$ der Geschwindigkeitsvektor des Probekörpers ist. Die Änderung des Geschwindigkeitsvektors nimmt in Schwachfeldnäherung dann die folgende Gestalt an:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \underbrace{-\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})}_{\text{gewoehnlicher Teil der gravitativen Kraft}} + \underbrace{2\,\omega(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}}_{\text{gravitomagnetische Lorentzkraft}} + \mathcal{O}(v^2/c^2)\ ,$$

wobei $\Phi(\mathbf{r})$ das Newtonsche Gravitationspotential und $\mathbf{v} = (v^r, v^\theta, v^\phi)$ der Geschwindigkeitsvektor des Probekörpers ist. Die unten abgebildete Grafik zeigt die "Frame dragging" Frequenz $\omega = \omega_z(r)$ für die Kerr Metrik, wobei bei der schwarzen Kurve a=0, bei der blauen Kurve a=0.99 und bei der roten Kurve a=-0.99 ist.