

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
18. MAI, 2017*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

6. Vorlesung

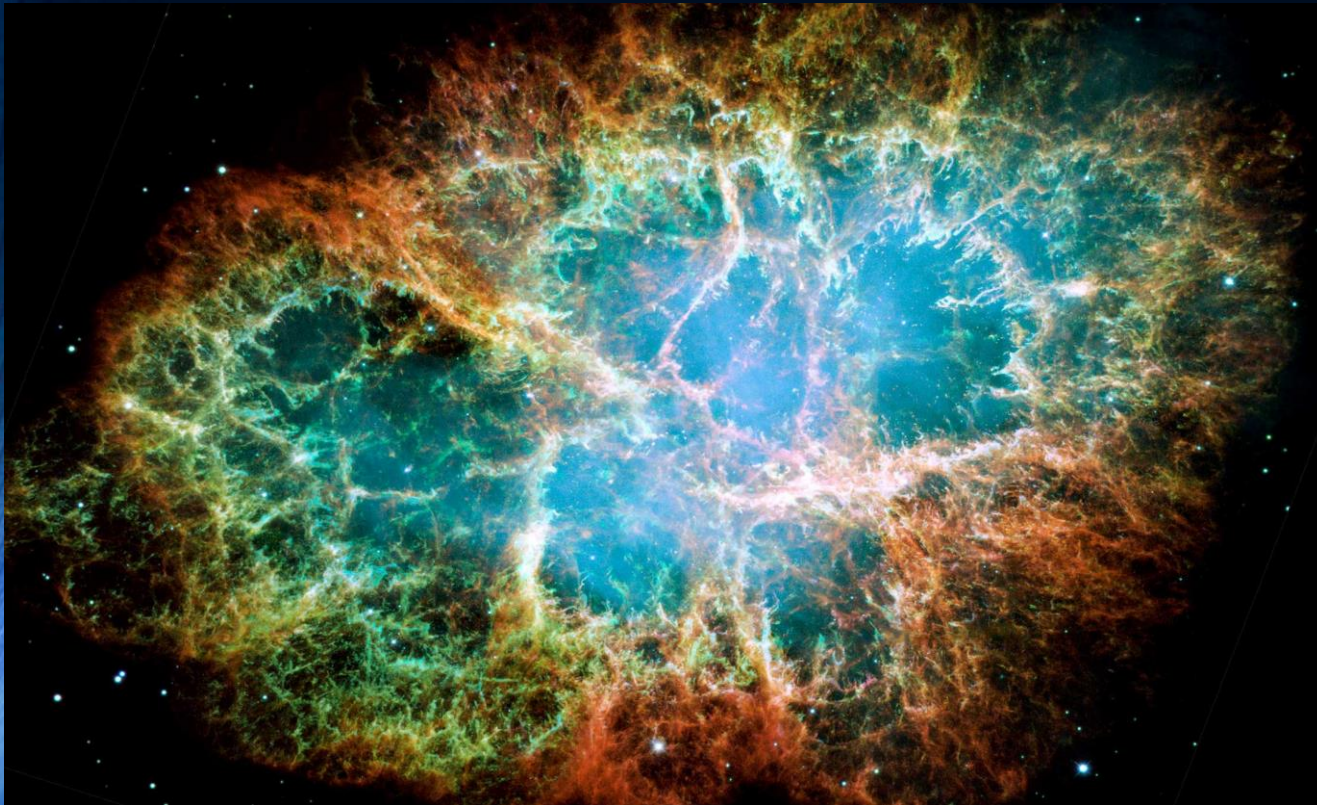
Plan für die heutige Vorlesung

Eigenschaften und theoretische Beschreibung von Neutronensternen

Maple: Von der Einsteingleichung zur Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung, numerisches Lösen der TOV-Gleichung in Maple

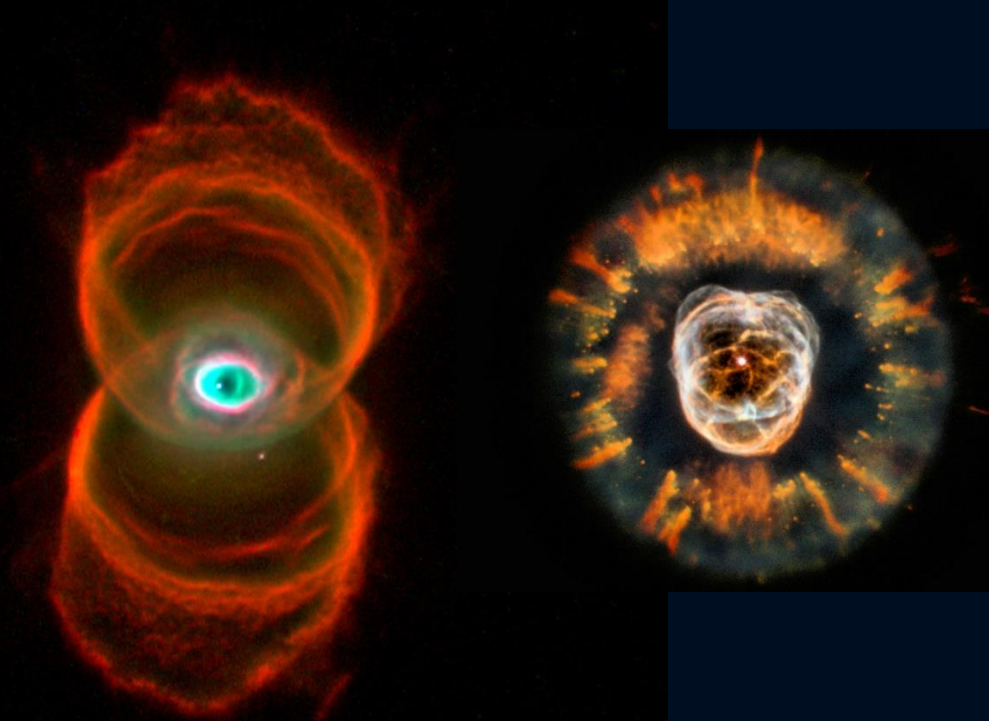
Was sind Neutronensterne?

Neutronensterne entstehen in einer Supernova Explosion.
Sonnensysteme, die mindestens 8-mal schwerer als unsere Sonne sind explodieren
am Ende ihrer Lebenszeit in einer Supernova Explosion –
im Zentrum bleibt ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch zurück.



Supernova Explosion, Krabben-Nebel

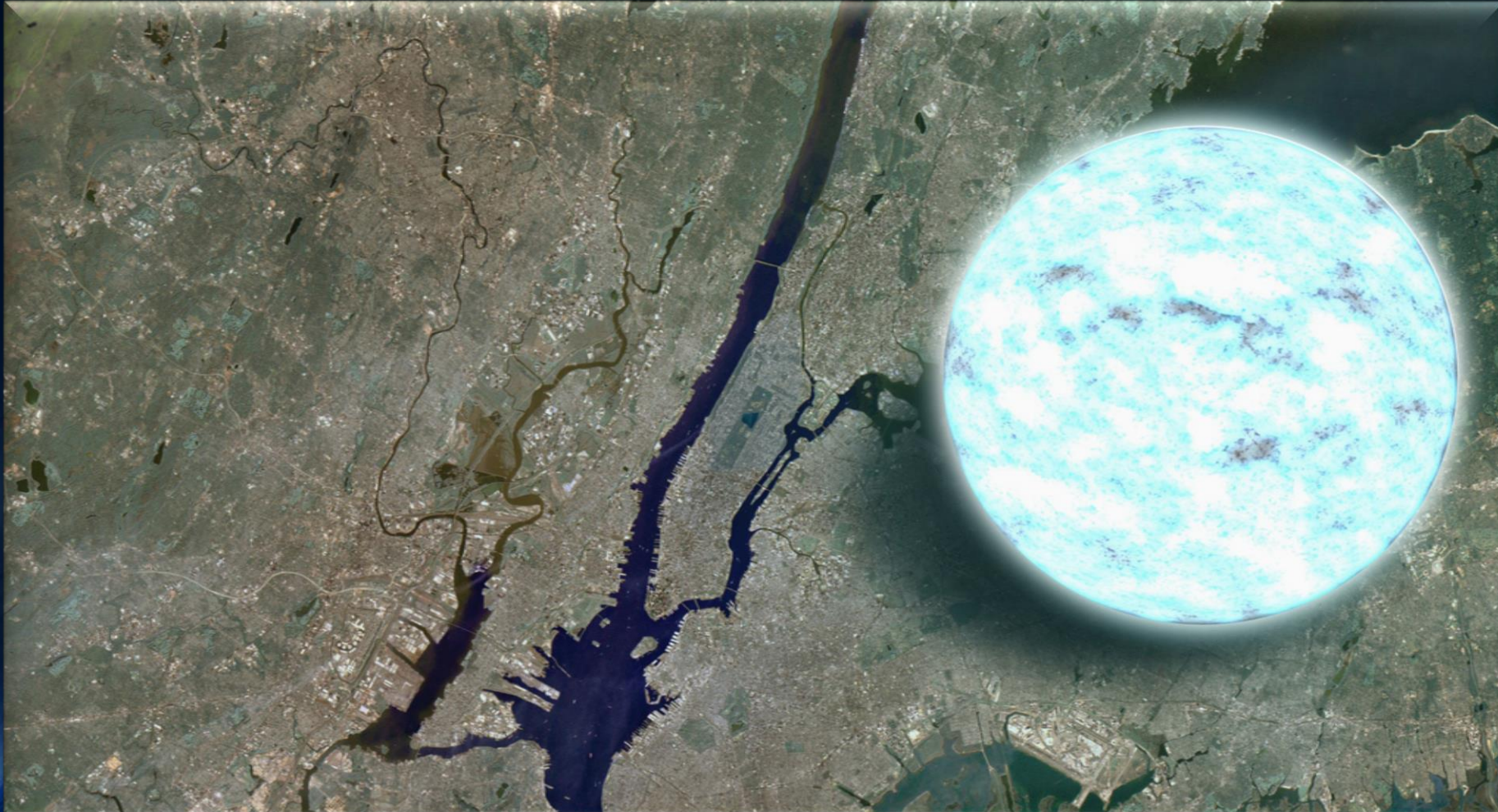
Zwei planetarische Nebel
Endstadium leichter Sonnen (weißer Zwerg)



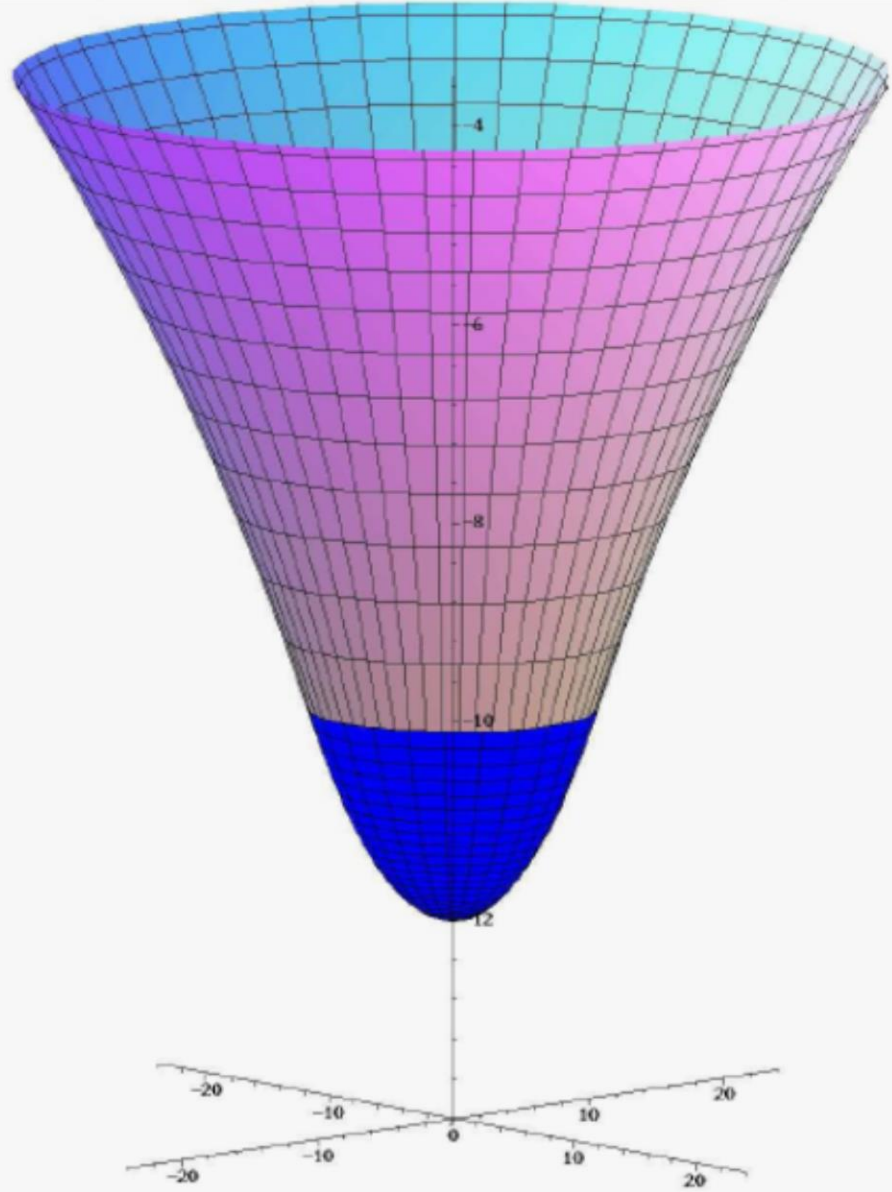
Was sind Neutronensterne?

Radius ~ 10 km, Masse ~ 1 -2 Sonnenmassen

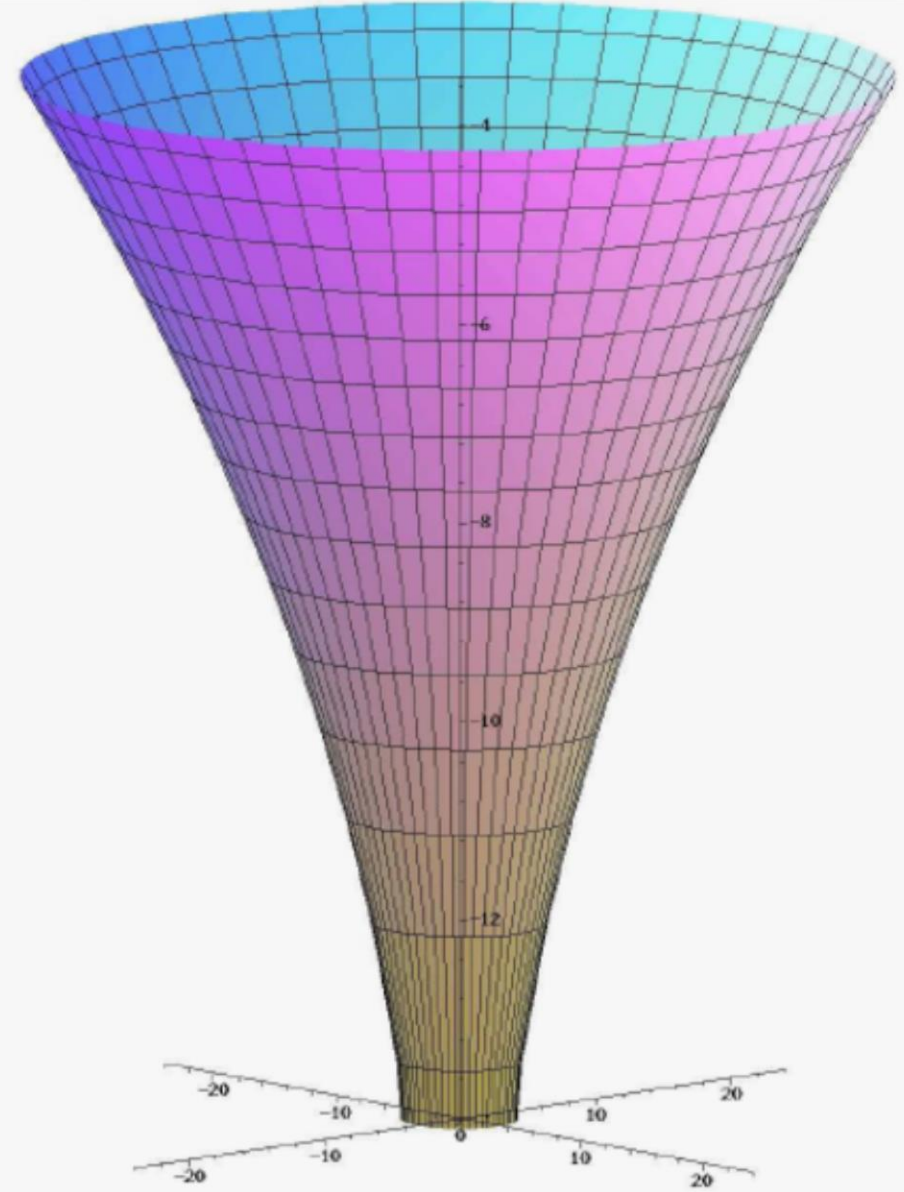
Riesige Magnetfelder $\sim 10^{11}$ Tesla, schnell rotierend (bis zu 716 Hz)



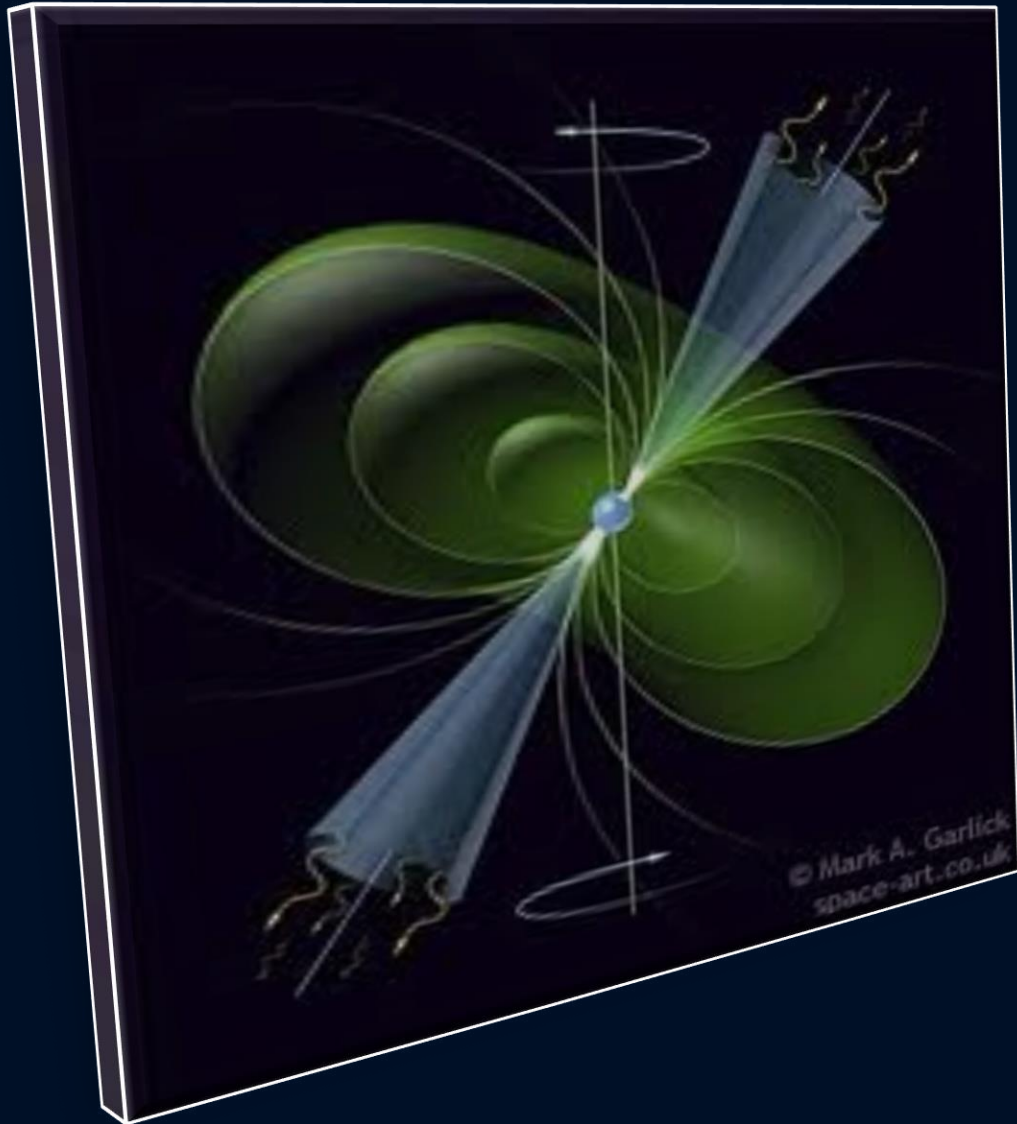
Neutronenstern



Schwarzes Loch



Pulsare := Rotierende Neutronensterne mit starkem Magnetfeld



In den letzten 50 Jahren konnten mittels Radioteleskopen ca. 3000 rotierende Neutronensterne (Pulsare) gefunden werden.

Der erste Pulsar wurde im Jahre 1967 entdeckt (PSR 1919+21, Bell)

Man unterscheidet Sekundenpulsare und Millisekunden-Pulsare



PSR B0329+54 (0.715 s)



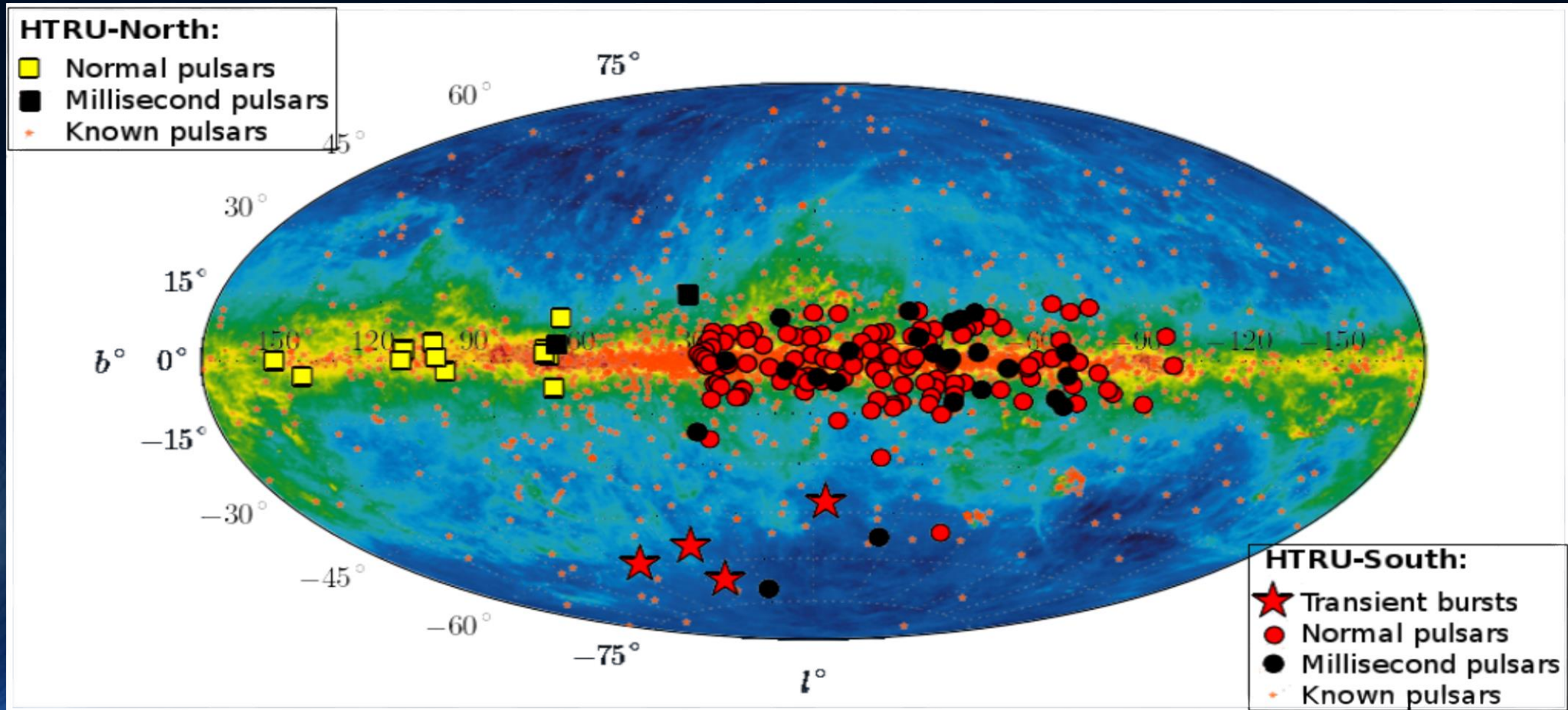
PSR B0531+21 (33.5 ms)



PSR B1937+21 (1.56 ms)

Pulsare sind rotierende Neutronensterne

Zurzeit kennen wir ca. 3000 Neutronensterne



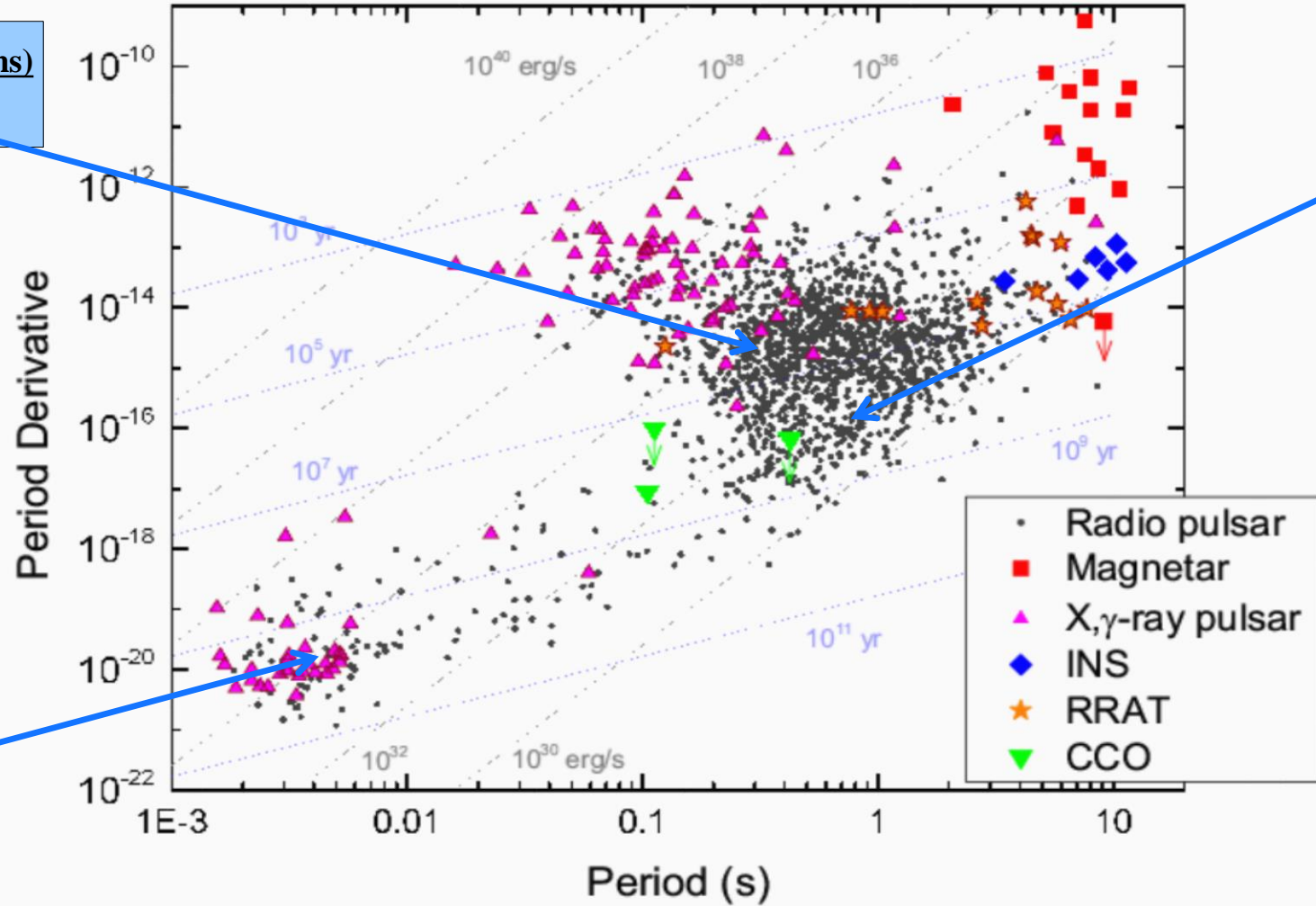
Millisekunden und Sekunden Pulsare



PSR B0531+21 (33.5 ms)
Crab Pulsar



PSR B0329+54 (0.715 s)



PSR B1937+21 (1.56 ms)

Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen

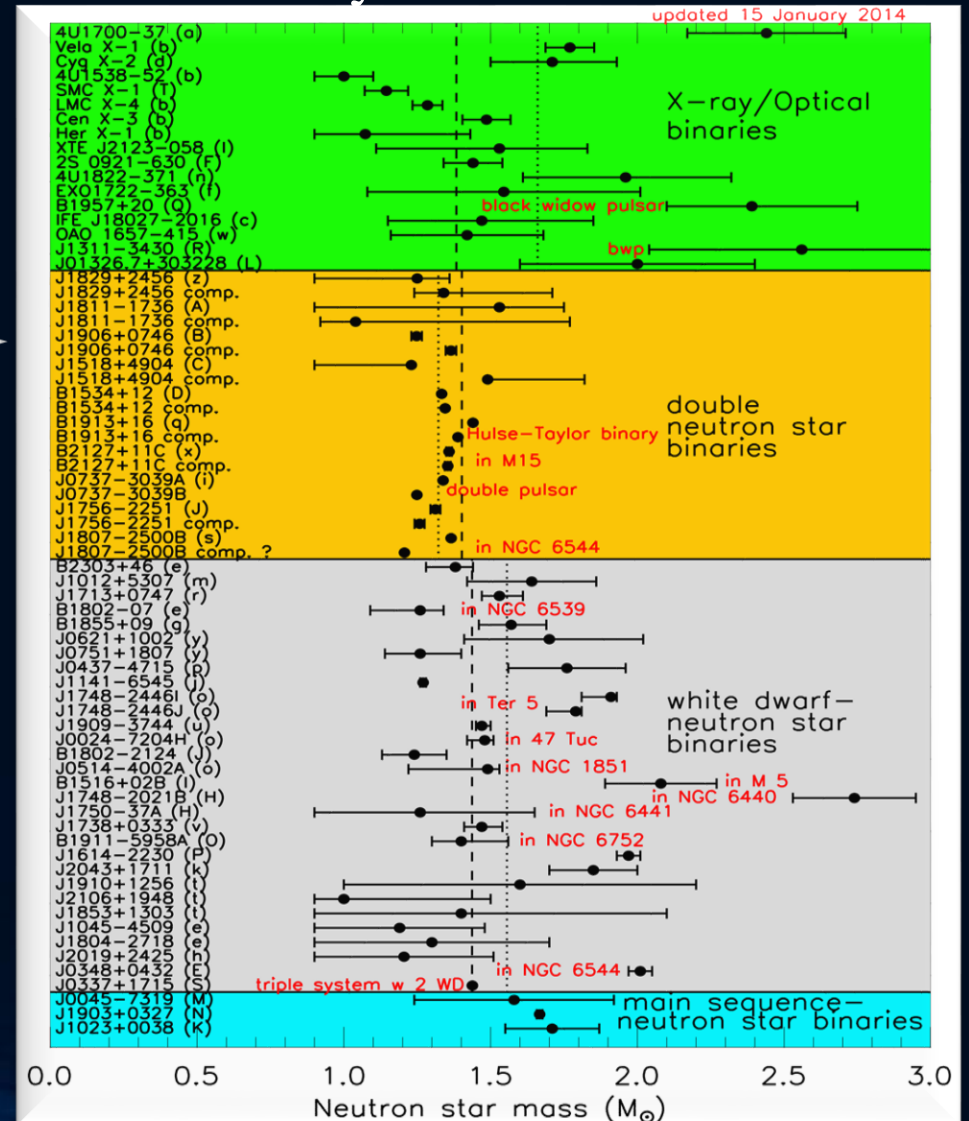
Einige der bekannten Neutronensterne befinden sich in Zweiersystemen:

NS-Planet, NS-(weißer Zwerg) oder NS-NS Systeme

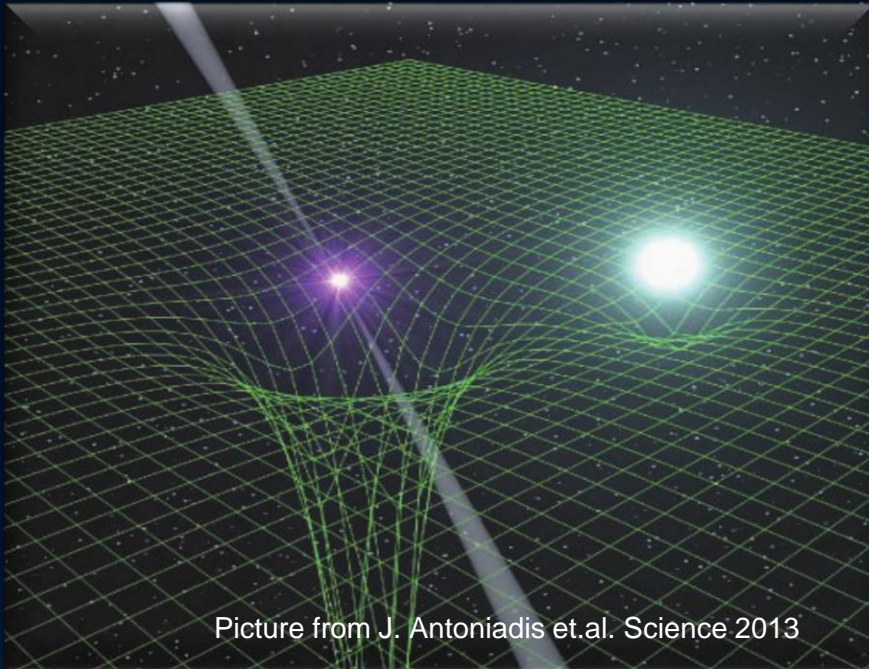
PSR J1906+0746

144-ms Pulsar, entdeckt in 2004
Orbitale Periode: 3.98 Stunden,
Exzentrizität: 0.085
Pulsar Masse: 1.291(11)
Masse Begleiter: 1.322(1)
In den Jahren 1998-2009 beobachtet,
dann verschwand
der Pulsar aufgrund der
Spin-Präzession

Van Leeuwen et al, arXiv:1411.1518



Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen



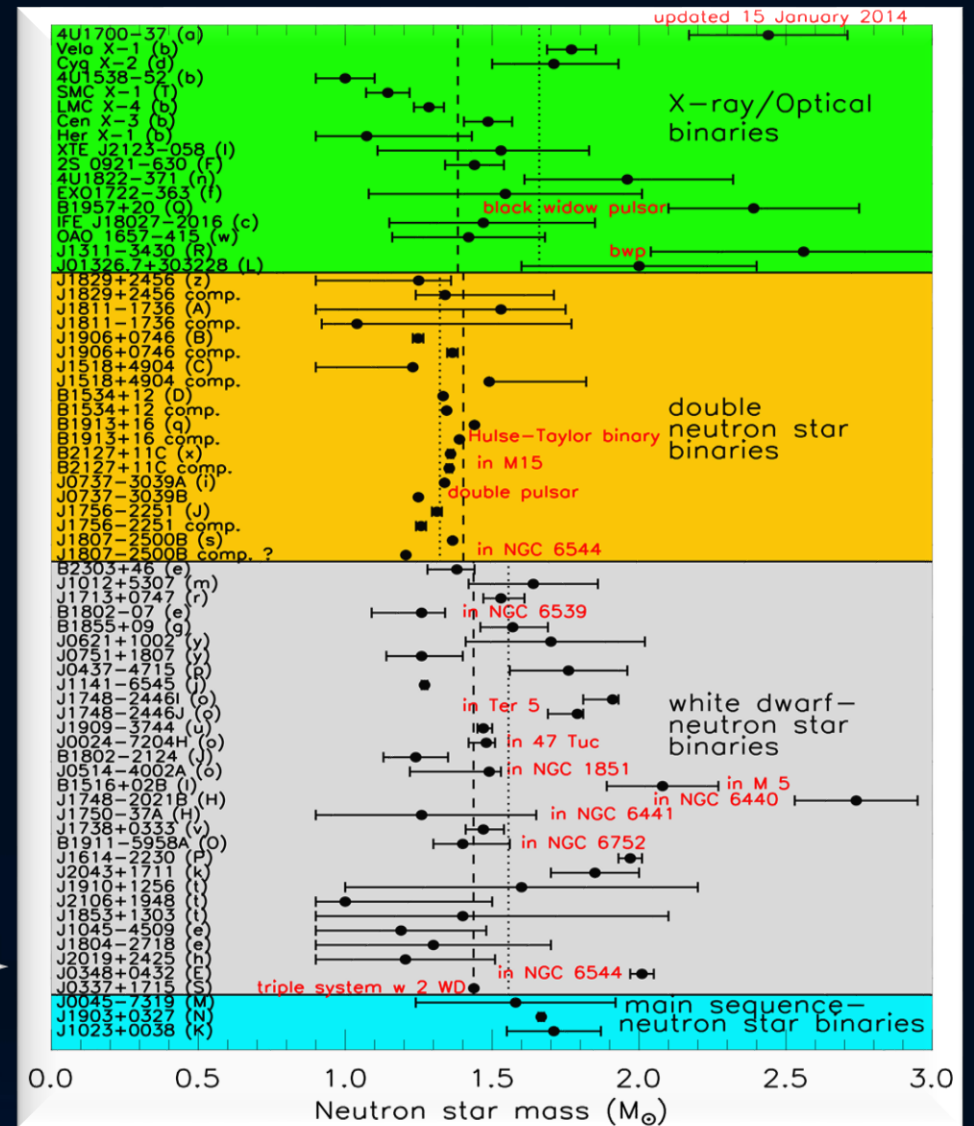
PSR J0348+0432

Orbitale Periode: 2.46 Stunden

Pulsar mass: 2.01 ± 0.04

Masse weißer Zwerg:

$M = 0.172 \pm 0.003$



Binary Neutron Star Systems

Recently some new interesting Neutron Star Binary Systems has been found:

J0453+1559

$P = 17 \text{ ms}$

(similar to the Doublepulsar)

J1913+1102

$P = 27 \text{ ms}$

$P_b = 4.95 \text{ h}$

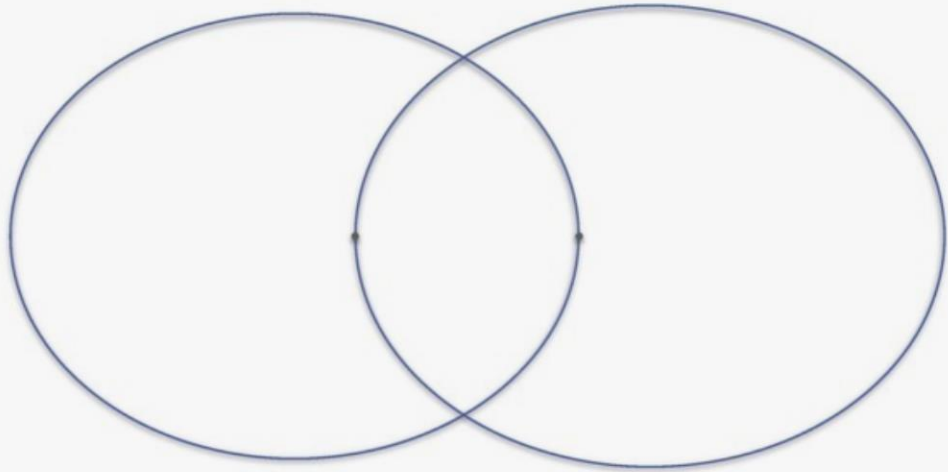
J1757-1854

$P = 215 \text{ ms}$

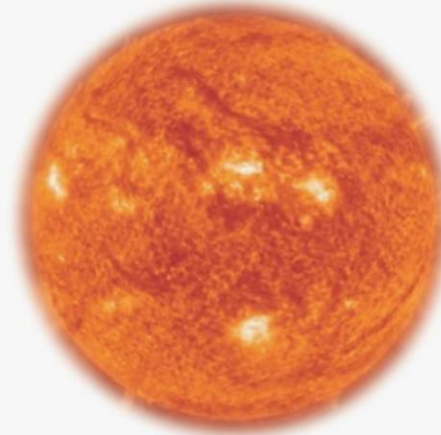
$P_b = 4.4 \text{ h}$

$E = 0.606$

Hulse-Taylor-Pulsar



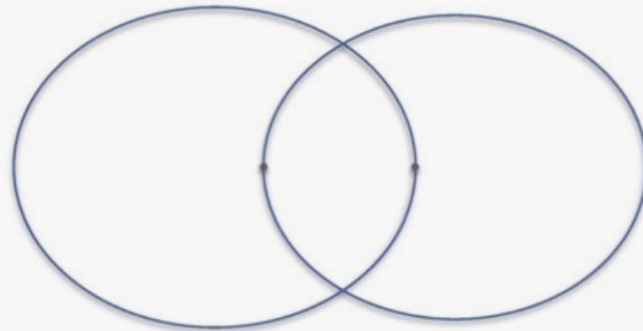
Sonne



Doppelpulsar



J1757-1854



Currently we know ~25 Double-NS Systems and one triple System

Binäre Neutronenstern Systeme

Zurzeit kennt man ca. 25
binäre Neutronenstern Systeme

Beispiel:

Der Double Pulsar

(PSR J0737-3039A/B):

Entdeckt im Jahre 2003

Eccentricity: 0.088

Pulsar A: $P=23$ ms, $M=1.3381(7)$

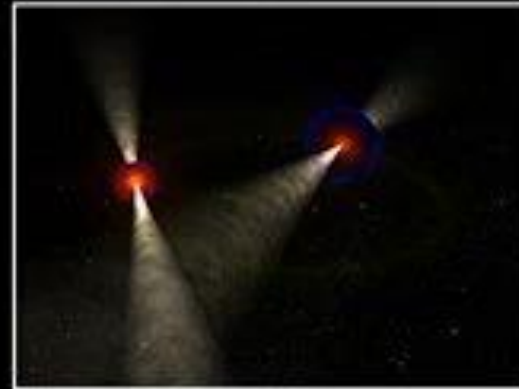
Pulsar B: $P=2.7$ s, $M=1.2489(7)$

Abstand zwischen den Sternen nur
800,000 km

Orbitale Periode: 147 Minuten

Abstand verkleinert sich langsam
aufgrund der Abstrahlung von
Gravitationswellen

Die beiden Neutronensterne
werden erst in 85 Millionen
Jahren kollidieren



The Einstein Equation

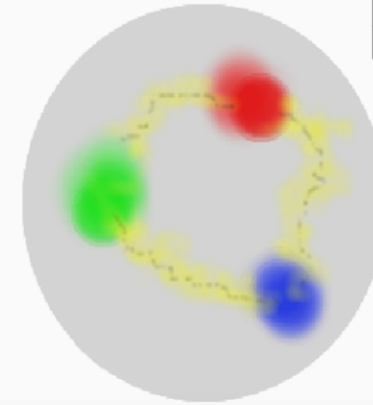
ART	<u>Yang-Mills-Theories</u>
$D_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha v^\sigma$	$D_{\beta a}{}^b = \partial_\beta 1_a{}^b + ig A_{\beta a}{}^b$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu = [D_\alpha, D_\beta] v^\delta$	$F_{\alpha\beta a}{}^b = \frac{1}{ig} [D_{\alpha a}{}^c, D_{\beta c}{}^b]$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} = \Gamma_{\mu\alpha \beta}^\delta - \Gamma_{\mu\beta \alpha}^\delta$ $+ \Gamma_{\nu\beta}^\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\delta \Gamma_{\mu\beta}^\nu$	$= A_{\beta a}{}^b _\alpha - A_{\alpha a}{}^b _\beta$ $+ \frac{1}{ig} [A_{\alpha a}{}^c, A_{\beta c}{}^b]$
$\mathcal{L}_G = R + \underbrace{(c_1 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dots)}_{\equiv 0 \text{ for ART}}$	$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu a}{}^b F^{\mu\nu}{}_a{}^b$

Quantum ChromoDynamic:

($SU(3)_{(c)}$ - Color Yang-Mills-Gauge Theory)

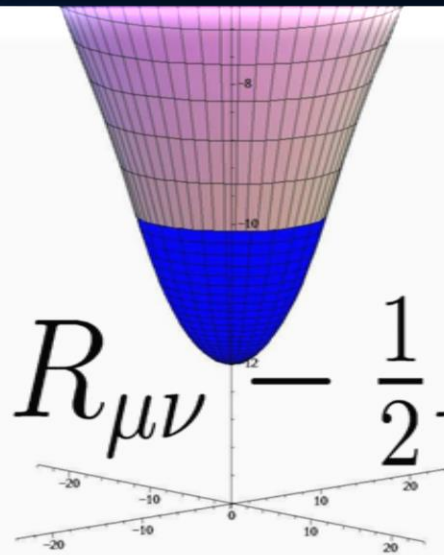
$$D_{\beta A}{}^B = \partial_\beta 1_A{}^B + ig G_{\beta A}{}^B$$

$A, B = \text{red, green, blue}$



$$\psi_A^f = \begin{pmatrix} \psi_r^f \\ \psi_g^f \\ \psi_b^f \end{pmatrix}$$

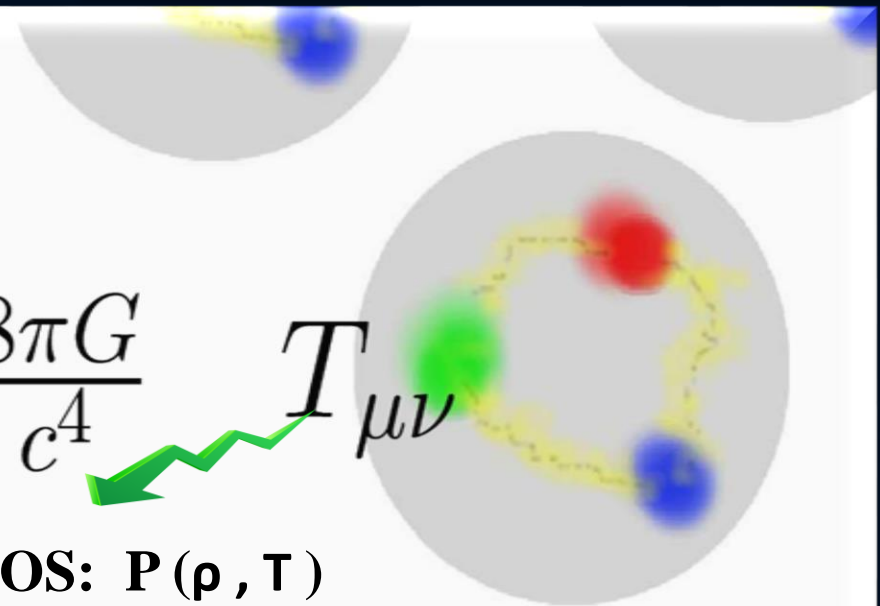
Confinement
chiral symmetry, ...



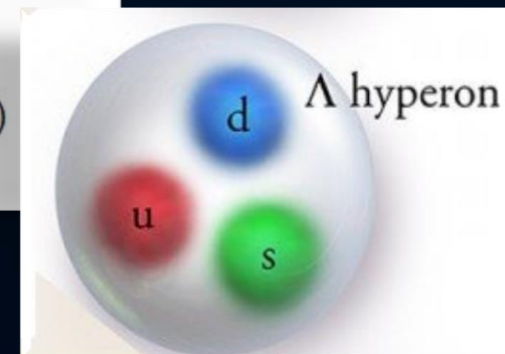
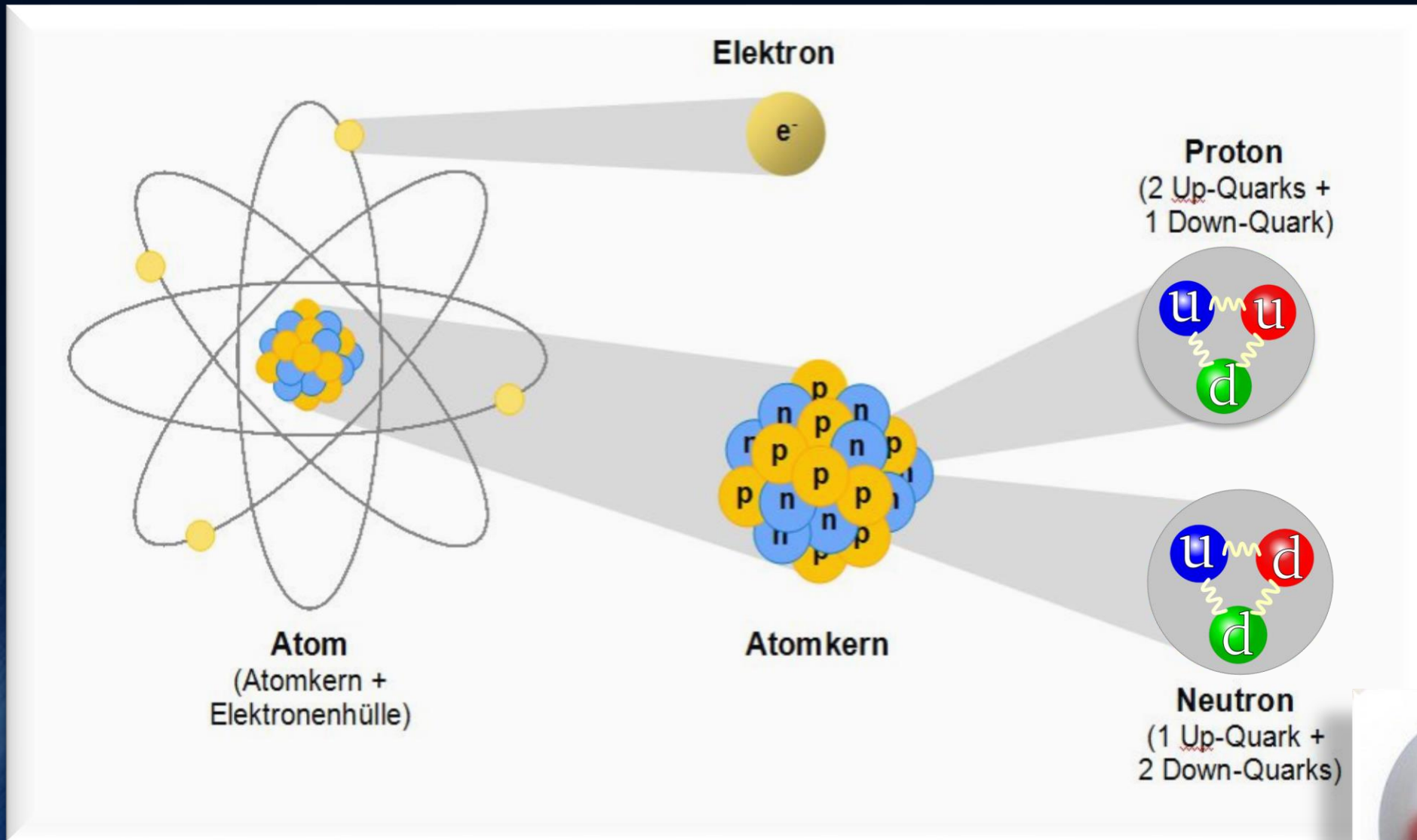
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} =$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

EOS: $P(\rho, T)$

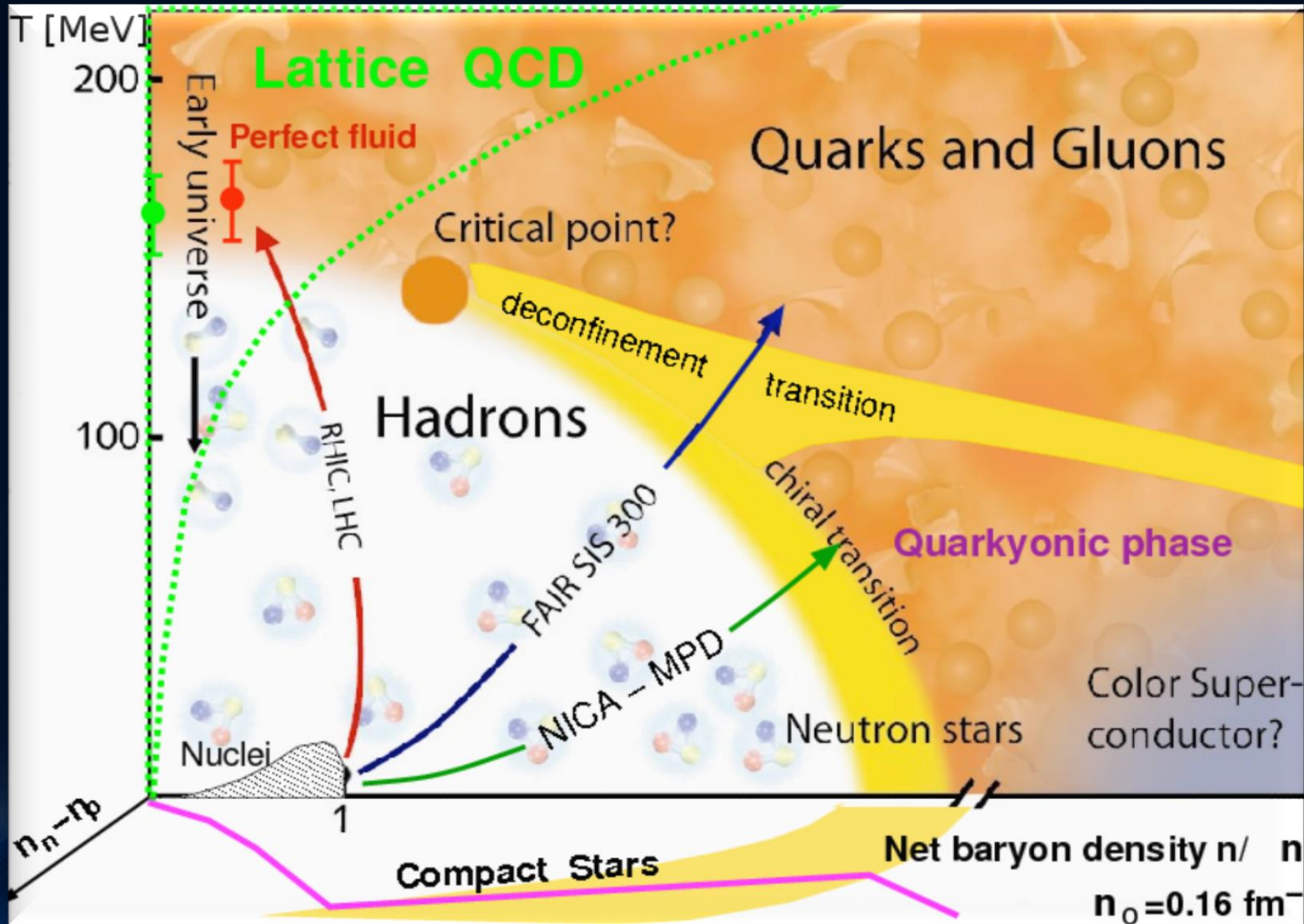


Elementare Materie

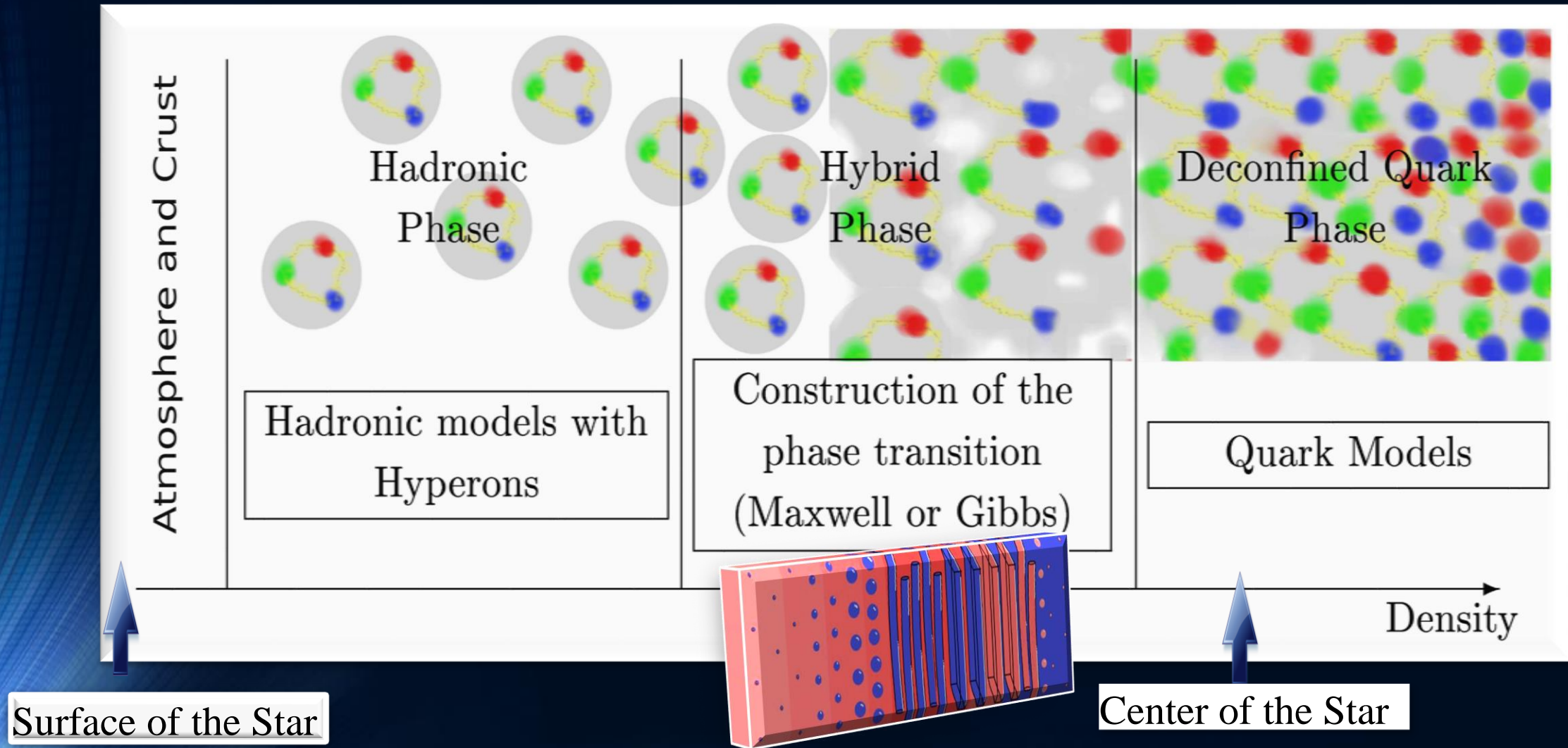


Bei sehr hohen Dichten oder Temperaturen können auch **Hyperonen** entstehen

Die Zustandsgleichung der Materie und das Quark-Gluon-Plasma



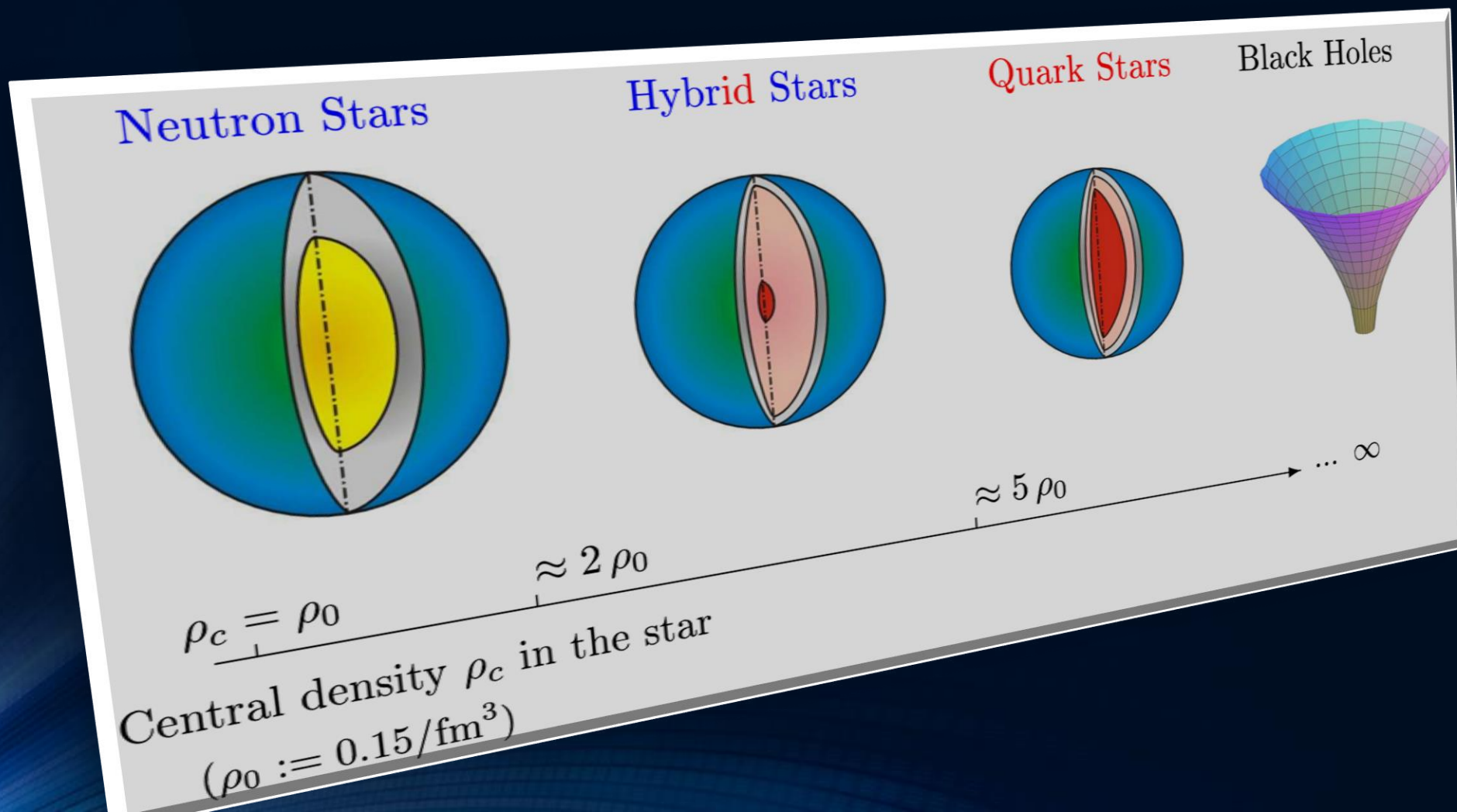
The QCD – Phase Transition and the Interior of a Hybrid Star



See: *Stable hybrid stars within a SU(3) Quark-Meson-Model*,
A.Zacchi, M.Hanuske, J.Schaffner-Bielich, PRD 93, 065011 (2016)

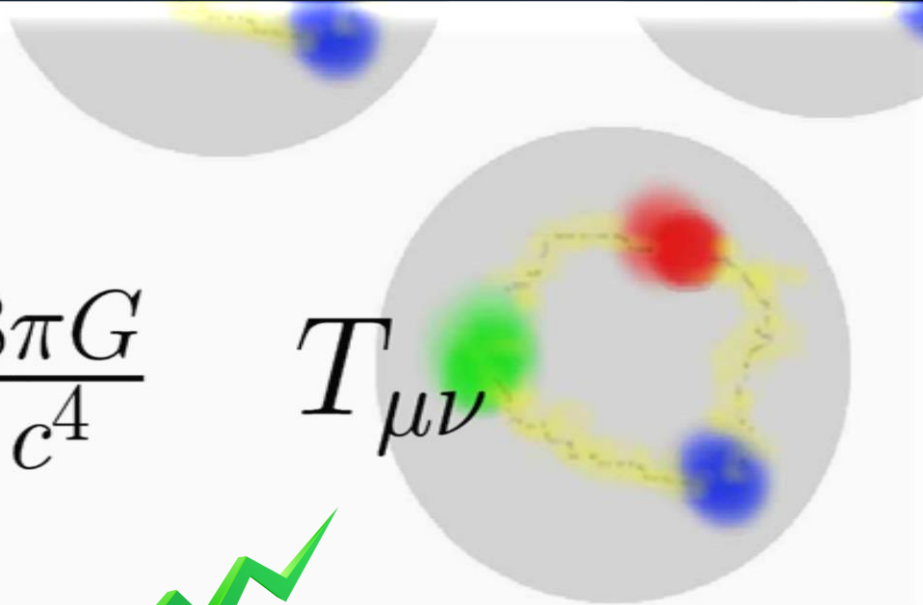
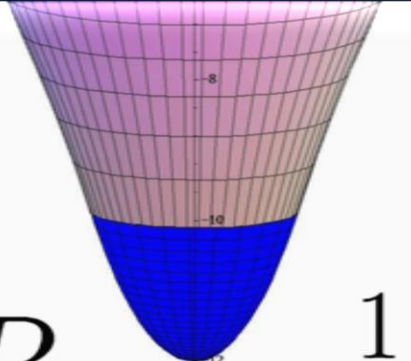
Neutronensterne, Quarksterne und schwarze Löcher

Bei welcher Dichte der Phasenübergang zum Quark-Gluon-Plasma einsetzt und welche Eigenschaften dieser Übergang im Detail hat ist weitgehend unbekannt. Theoretische Modellierung mittels unterschiedlicher effektiver Elementarteilchenmodelle.



Die Einstein Gleichung

Vor etwa 100 Jahren präsentierte Albert Einstein die Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie – die sogenannte **Einstein-Gleichung**:


$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

The diagram features a central equation. To the left, a 3D grid of spacetime is shown curving downwards into a blue bowl-like shape, with a coordinate system below it. To the right, a circular area contains several colored spheres (red, green, blue) and a yellow dashed line, representing matter and energy.

Raumzeitkrümmung
Eigenschaften der Metrik
der Raumzeit

Masse, Energie und Impuls des Systems
Zustandsgleichung der Materie
Druck (Dichte , Temperatur)

Neutron Stars

Black Holes

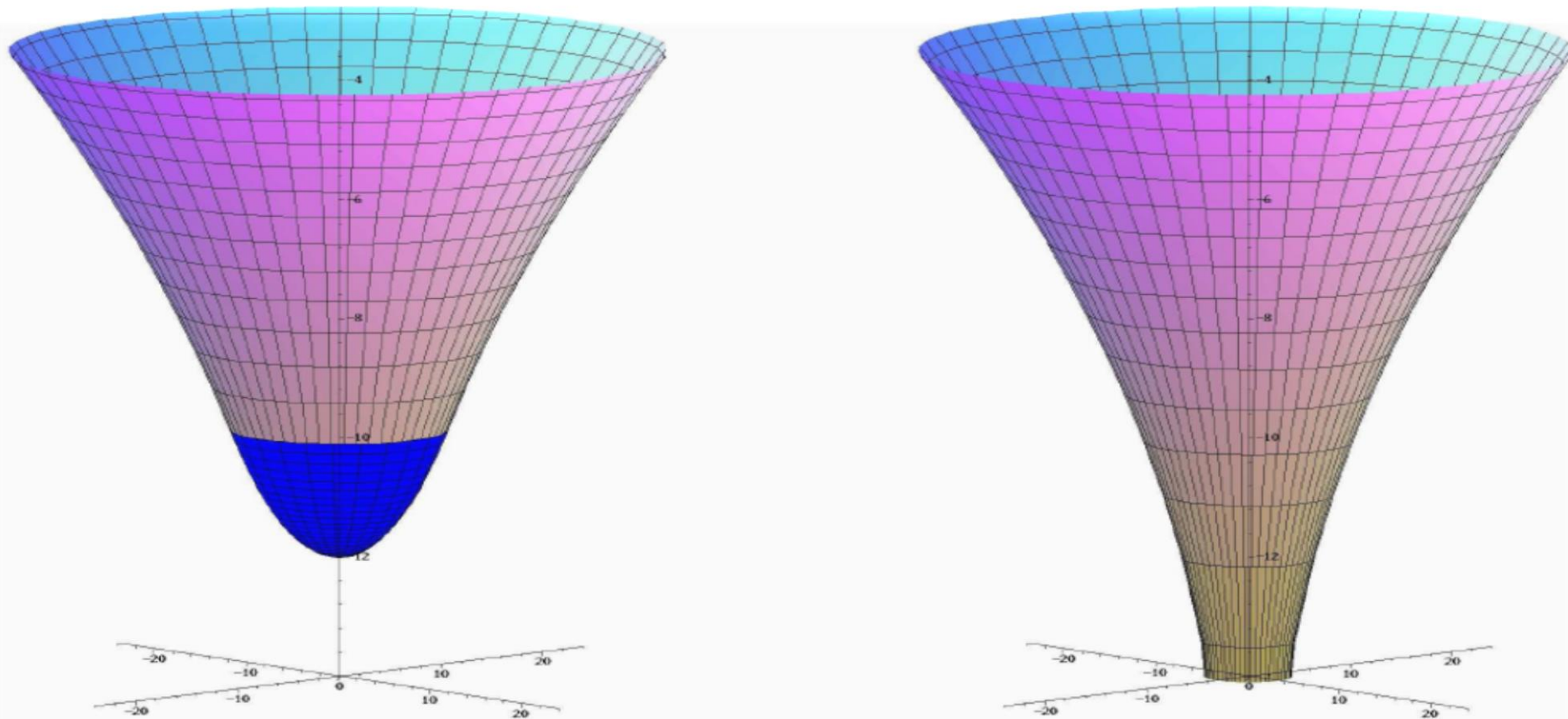


Abbildung 2.5: Eingebettetes Raumzeitdiagramm eines Neutronensterns (links) und eines schwarzen Loches (rechts) wobei $M = 1.4 M_{\odot}$ und die x- und y-Achse in Einheiten km dargestellt sind.

From the Einstein equation to the TOV equation

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (2.45)$$

Das Einsetzen dieses Ansatzes der Metrik in die Einsteingleichung

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} R g^\mu{}_\nu = 8\pi\kappa T^\mu{}_\nu \quad (2.46)$$

liefert das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} G^t{}_t &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= 8\pi\kappa T^t{}_t \\ G^r{}_r &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= 8\pi\kappa T^r{}_r \\ G^\theta{}_\theta &= -\frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\nu'' - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) &= 8\pi\kappa T^\theta{}_\theta \\ G^\phi{}_\phi &= G^\theta{}_\theta &= 8\pi\kappa T^\phi{}_\phi \end{aligned} \quad (2.47)$$

Der Energie-Impuls Tensor

1..3, $i \neq j$) vernachlässigen. Der Energieimpulstensor $T^{\mu\nu}$ einer solchen idealen Flüssigkeit, lokal betrachtet an seinem Ort, kann wie folgt geschrieben werden

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P \quad \text{mit: } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad , \quad (2.48)$$

wobei u^μ die 4er Geschwindigkeit der Materie ist, τ die lokale Eigenzeit an einem betrachteten Materiepunkt beschreibt ($d\tau = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{tt}} dt$, t ist die Koordinatenzeit eines unendlich entfernten Beobachters), ϵ die Energiedichte und P der Druck der Materie ist.

Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung

als die **Tollman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen**

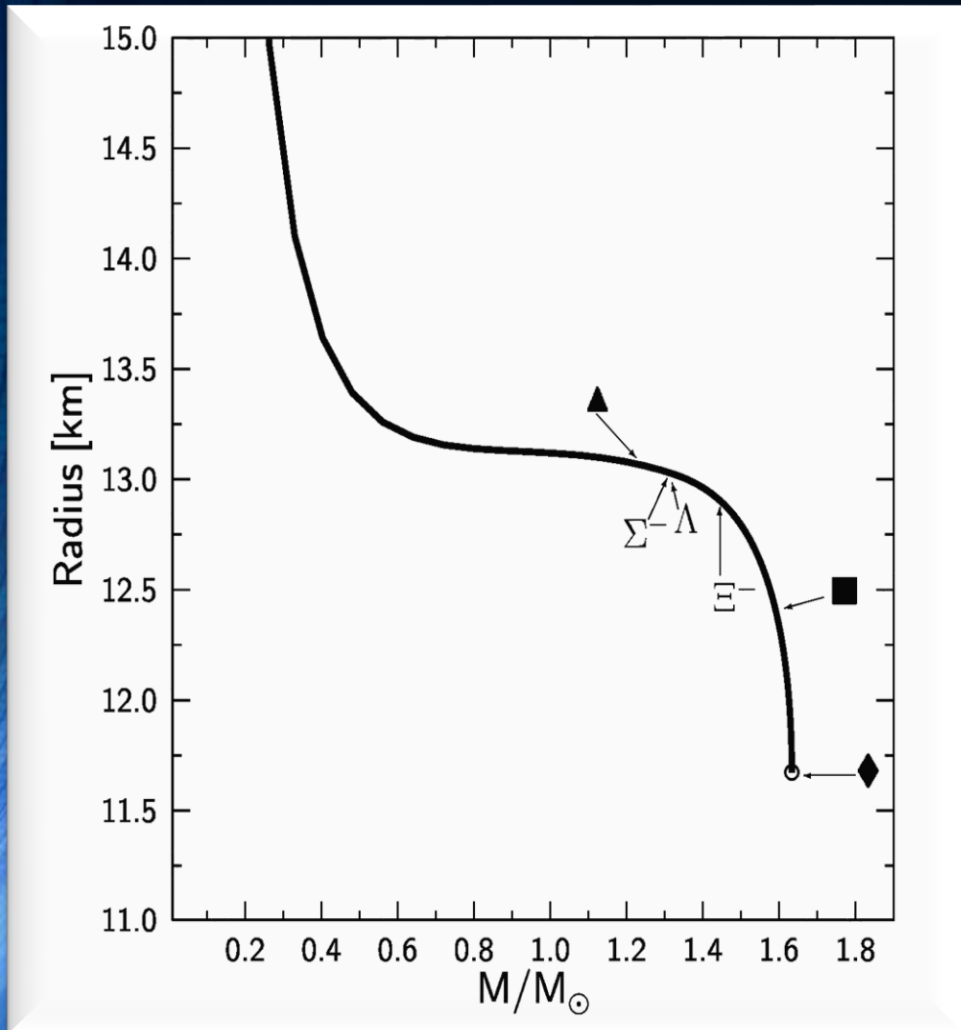
$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\frac{(\epsilon + P)4\pi r^3 + m}{r(r - 2m)} \\ m(r) &= \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \epsilon(\tilde{r}) d\tilde{r} \\ \frac{d\nu}{dr} &= \frac{8\pi P r^3 + 2m}{r(r - 2m)},\end{aligned}\tag{2.61}$$

wobei die raumzeitliche Struktur durch die folgenden Ausdrücke bestimmt ist

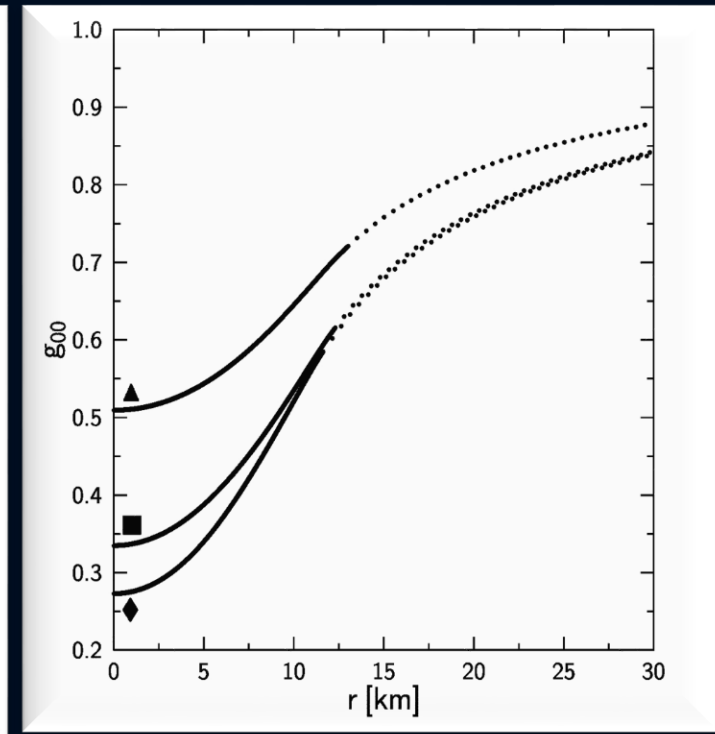
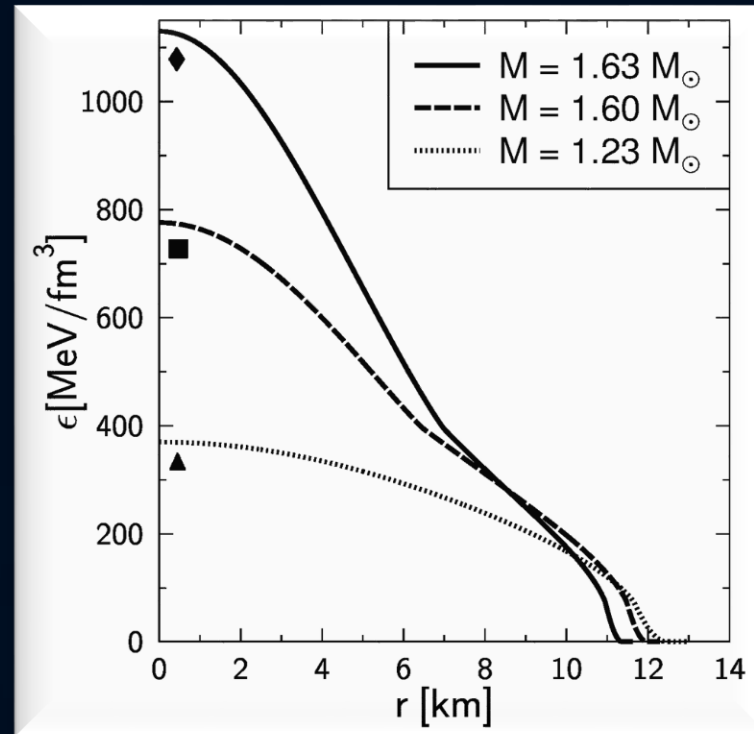
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$
$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Neutron Star Properties

Left: The neutron star radius as a function of its mass. A low, middle and high density star is displayed within the figure. Additionally the onset of hyperonic particles is visualized.



Middle: Energy density profiles of three neutron stars with different central densities and masses. The low density stars do not contain any hyperons, whereas the other two stars do have hyperons in their inner core.



Right: Time-time component of the metric tensor as a function of the radial coordinate. The solid line corresponds to the inner TOV-solution, whereas the dotted curve depicts the outer Schwarzschild part.

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

4. Vorlesung

Einführung

In den folgenden drei Vorlesungen wurde die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen numerisch analysiert. Die raumzeitliche Struktur, die Metrik, wurde hierbei als gegeben vorausgesetzt. In der folgenden Vorlesung betrachteten wir nun wie man die Metrik bei vorgegebener Materieverteilung berechnet. Die zugrundeliegende Gleichung die es hier zu lösen gilt ist die Einstein Gleichung.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

Die innere Schwarzschildlösung eines sphärisch symmetrischen, statischen Objektes (z.B. Erde, Neutronenstern)

Im folgenden wird die Einsteingleichung einer sphärisch symmetrischen und statischen Materieverteilung betrachtet. Die Materie wird hierbei als ideale Flüssigkeit angesetzt.

Von der Einstein Gleichung zur Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung (TOV)

```
> restart:  
with( tensor );
```

Wir definieren einen sphärisch symmetrischen und statischen Ansatz der Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{mit: } x^\mu = (t, r, \theta, \phi) \quad ,$$

wobei die Funktionen $\phi(r)$ und $m(r)$ an dieser Stelle noch unbekannt sind und keine physikalische Bedeutung besitzen.

```
> coord := [t, r, theta, phi]:  
g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4):  
g_compts[1,1] := exp(2*phi(r)):  
#a compts[2,2] := exp(2*lambda(r)):
```

Kovariante Form des Einsteintensors $G_{\mu\nu}$:

> G := Einstein(g, RICCI, RS);

$$\begin{aligned}
 G := \text{table} \left(\left[\text{compts} = \left[\left[-\frac{2 e^{2 \phi(r)} \left(\frac{d}{dr} m(r) \right)}{r^2}, 0, 0, 0 \right], \right. \right. \\
 \left. \left[0, -\frac{2 \left(2 r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 \right)}{r^2 (-r + 2 m(r))}, 0, 0 \right], \right. \\
 \left. \left[0, 0, \frac{1}{r} \left(-\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r - m(r) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \right. \right. \\
 \left. \left. + 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 \right], 0 \right], \right. \\
 \left. \left[0, 0, 0, -\frac{1}{r} \left(\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r \cos(\theta)^2 + m(r) \right. \right. \\
 \left. \left. - m(r) \cos(\theta)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) + 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) \cos(\theta)^2 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 \right. \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 \cos(\theta)^2 \right] \right], \text{index_char} = [-1, -1] \right]
 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Der Energie-Impuls Tensor (rechte Seite der Einsteingleichung) wird als ideale Flüssigkeit angesetzt:

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $e(r)$ und $p(r)$ die Energiedichte und den Druck der Neutronensternmaterie darstellen, die ihrerseits über die Zustandsgleichung $p(e)$ miteinander verknüpft sind.

```
> T:=create([1,-1], array([[e(r),0,0,0],[0,-p(r),0,0],[0,0,-p(r),0],[0,0,0,-p(r)]]));  
Tl:=lower(g,T,1);  
Tu:=raise(ginv,T,2);  
prod(ginv, Tl, [2, 1]);  
contract(T, [1, 2]);
```

$$T := \text{table} \left(\text{compts} = \begin{pmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{pmatrix}, \text{index_char} = [1, -1] \right)$$
$$Tl := \text{table} \left(\text{compts} = \begin{pmatrix} e^{2\Phi(r)} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r p(r)}{-r + 2 m(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 p(r) \end{pmatrix}, \text{index_char} = [-1, -1] \right)$$

(2.1.4)

Wir definieren die Einsteingleichung in der folgenden Form:

$$G_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu} = 0$$

> Einsteingl:=lin_com(G,8*Pi,Tl);

$$\begin{aligned}
 \text{Einsteingl} := \text{table} \left(\text{compts} = \right. & \left. \left[\left[-\frac{2 e^{2\phi(r)} \left(\frac{d}{dr} m(r) - 4 \pi e(r) r^2 \right)}{r^2}, 0, 0, 0 \right], \right. \right. \\
 & \left. \left[0, -\frac{2 \left(2 r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 + 4 \pi r^3 p(r) \right)}{r^2 (-r + 2 m(r))}, 0, 0 \right], \right. \\
 & \left[0, 0, \frac{1}{r} \left(-\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r - m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^2 m(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^3 + 8 \pi r^3 p(r) \right], 0 \right], \\
 & \left[0, 0, 0, -\frac{1}{r} \left(\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 - r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. + r \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) m(r) \cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r + \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r \cos(\theta)^2 + m(r) \right. \right. \\
 & \left. \left. - m(r) \cos(\theta)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 - \left(\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) r^3 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 + \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \left(\frac{d}{dr} m(r) \right) r^2 \cos(\theta)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) + 2 \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 r^2 m(r) \cos(\theta)^2 \right] \right. \\
 & \left. \right) \quad (2.1.5)
 \end{aligned}$$

> **A:=get_compts(Einsteingl):**

Aufgrund der angenommenen Symmetrie ist die Einsteingleichung ein System von 4 gekoppelten Differentialgleichungen. Im folgenden lösen wir die erste Gleichung der Einsteingleichung (tt-Komponente) nach $\frac{dm}{dr}$ und die zweite Gleichung (rr-Komponente) nach $\frac{d\phi}{dr}$ auf.

> **Einstein1:=diff(m(r), r)=solve(A[1,1],diff(m(r), r));**
Einstein2:=diff(phi(r), r)=solve(A[2,2],diff(phi(r), r));

$$\begin{aligned} Einstein1 &:= \frac{d}{dr} m(r) = 4 \pi e(r) r^2 \\ Einstein2 &:= \frac{d}{dr} \phi(r) = -\frac{m(r) + 4 \pi r^3 p(r)}{r(-r + 2m(r))} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Aus der Einsteingleichung folgt die Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen (kovariante Erhaltung des Energie-Impulses) sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert (Bemerke: in der Literatur wird die kovariante Ableitung mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet):

Aus der Einsteingleichung folgt die Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen (kovariante Erhaltung des Energie-Impulses) sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert (Bemerke: in der Literatur wird die kovariante Ableitung mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet):

$$\nabla_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = D_{\mu} G^{\mu}_{\nu} = G^{\mu}_{\nu}{}_{||\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0 \quad .$$

wobei die kovariante Ableitung eines Tensors zweiter Stufe wie folgt definiert ist:

$$\nabla_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\alpha} T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} T^{\rho}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} T^{\mu}_{\rho} \quad ,$$

```
> DT:=cov_diff(T, coord, Cf2);  
DTa:=get_compts(contract(DT, [1, 3]))[2]=0;
```

$$DTa := -\left(\frac{d}{dr} \phi(r)\right) p(r) - \left(\frac{d}{dr} \phi(r)\right) e(r) - \left(\frac{d}{dr} p(r)\right) = 0 \quad (2.1.7)$$

und nach $\frac{dp}{dr}$ aufgelöst ergibt sich das folgende:

und nach $\frac{dp}{dr}$ aufgelöst ergibt sich das folgende:

```
> diff(p(r), r)=collect(solve(DTa,diff(p(r), r)),diff(phi(r), r));
```

$$\frac{d}{dr} p(r) = (-e(r) - p(r)) \left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right) \quad (2.1.8)$$

Die TOV-Gleichung erhalten wir, indem man diese Gleichung nach $\frac{d\phi}{dr}$ auflöst und das Ergebnis in die zweite Gleichung der Einsteingleichung einsetzt:

```
> solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*(e(r)+p(r))*(-1);
```

$$\frac{d}{dr} p(r) = \frac{(m(r) + 4 \pi r^3 p(r)) (e(r) + p(r))}{r (-r + 2 m(r))} \quad (2.1.9)$$

```
> TOV1:=solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*(e(r)+p(r))*(-1);  
TOV2:=Einstein1;  
TOV3:=Einstein2;
```

$$\begin{aligned} \text{TOV1} &:= \frac{d}{dr} p(r) = \frac{(m(r) + 4 \pi r^3 p(r)) (e(r) + p(r))}{r (-r + 2 m(r))} \\ \text{TOV2} &:= \frac{d}{dr} m(r) = 4 \pi e(r) r^2 \\ \text{TOV3} &:= \frac{d}{dr} \phi(r) = - \frac{m(r) + 4 \pi r^3 p(r)}{r (-r + 2 m(r))} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Das oben abgebildete System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen bezeichnet man als die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichungen (TOV-Gleichung). Bemerkung: In manchen Büchern werden auch lediglich die ersten beiden Gleichungen als TOV-Gleichungen bezeichnet.

Numerische Lösung der TOV-Gleichungen

Im folgenden werden die TOV-Gleichungen numerisch gelöst, indem wir einerseits eine Zustandsgleichung der Materie (eine Funktion $p(e)$) festlegen und von einem Startwert der zentralen Energiedichte im Inneren des sphärisch symmetrischen Objektes nach Außen integrieren.

>

```
a:=10;  
b:=5/3;  
p(r):=a*(e(r))^b;  
W3:=plot(a*x^b,x=0..1,color=blue):  
TOV1:=solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*  
(e(r)+p(r))*(-1);  
TOV2:=Einstein1;  
TOV3:=Einstein2;
```

$$\begin{aligned}
 a &:= 10 \\
 p(r) &:= 10 e(r)^{5/3} \\
 TOV1 &:= \frac{50}{3} e(r)^{2/3} \left(\frac{d}{dr} e(r) \right) = \frac{(m(r) + 40 \pi r^3 e(r)^{5/3}) (10 e(r)^{5/3} + e(r))}{r (-r + 2 m(r))} \\
 TOV2 &:= \frac{d}{dr} m(r) = 4 \pi e(r) r^2 \\
 TOV3 &:= \frac{d}{dr} \phi(r) = -\frac{m(r) + 40 \pi r^3 e(r)^{5/3}}{r (-r + 2 m(r))}
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Numerische Lösung der Gleichung mit fixierten Randbedingungen im Sternzentrum.

>

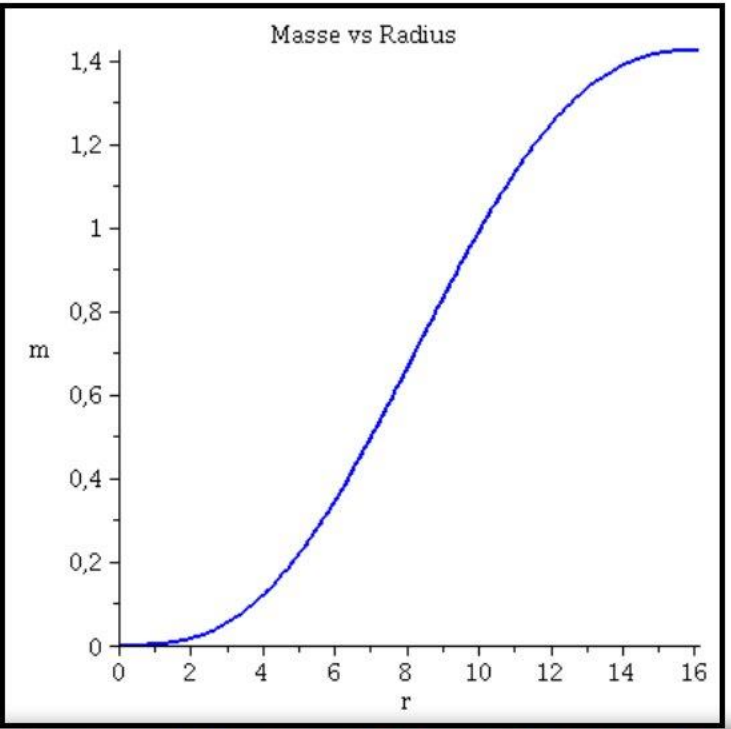
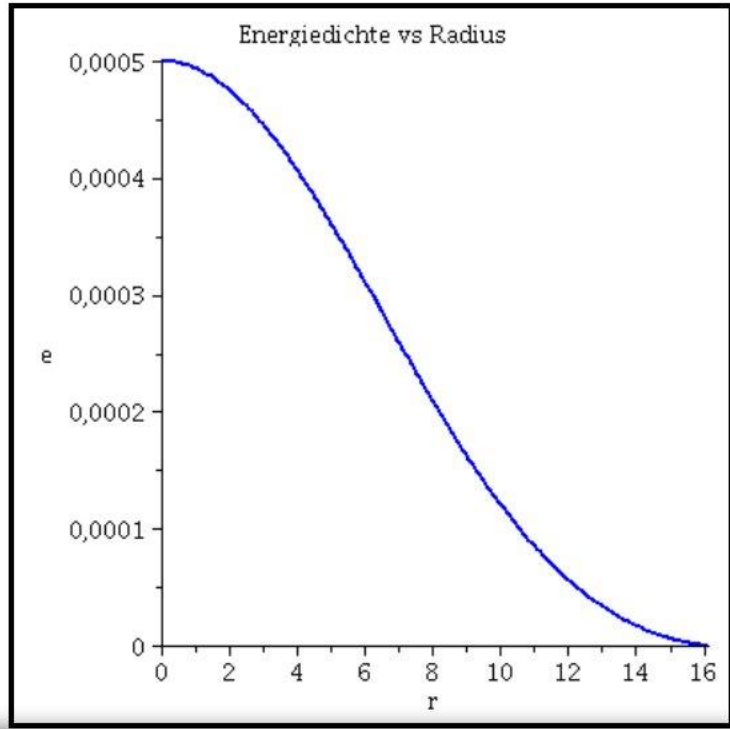
```

r0:=10^(-14);
e0:=0.0005;
Loes:=dsolve({TOV1,TOV2,m(r0)=0,e(r0)=e0},
{m(r),e(r)},type=numeric,output=listprocedure);

```

Darstellung der Energiedichte ($e(r)$) und der Sternmasse ($m(r)$) als Funktion des radialen Abstands r vom Sternzentrum:

```
> with(plots):  
  rend:=16.12487:  
  Plot1:=odeplot(Loes, [r,e(r)], r0..rend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Energiedichte vs Radius");  
  Plot2:=odeplot(Loes, [r,m(r)], r0..rend, numpoints=200, color=blue, thickness=2, title="Masse vs Radius");  
  display(Matrix(1,2,[Plot1,Plot2]));
```



Aufgrund des Birkov Theorems muss die Innenlösung der Metrik in die äussere Schwarzschildmetrik am Sternrand übergehen. Da wir nun die Gesamtmasse des Sterns kennen, können wir auch die innere g_{00} und g_{11} Komponente der Metrik angeben. Wir integrieren nun von der uns schon bekannten Sternoberfläche nach Innen bis $r=0$:

```
> Mass := subs(Loes,m(r)):  
M:=Mass(rend);  
Phi0:=(0.5*ln(1-2*Mass(rend)/rend)):  
Loes1:=dsolve({TOV1,TOV2,TOV3,m(rend)=Mass(rend),e(rend)=10^(-25),phi(rend)=Phi0},  
{m(r),e(r),phi(r)},type=numeric,output=listprocedure);
```

$$M := 1.42503619811206650$$

```
Loes1 := [r = proc(r) ... end proc, e(r) = proc(r) ... end proc, m(r) = proc(r)
```

...

```
end proc, phi(r) = proc(r) ... end proc]
```

(2.2.3)

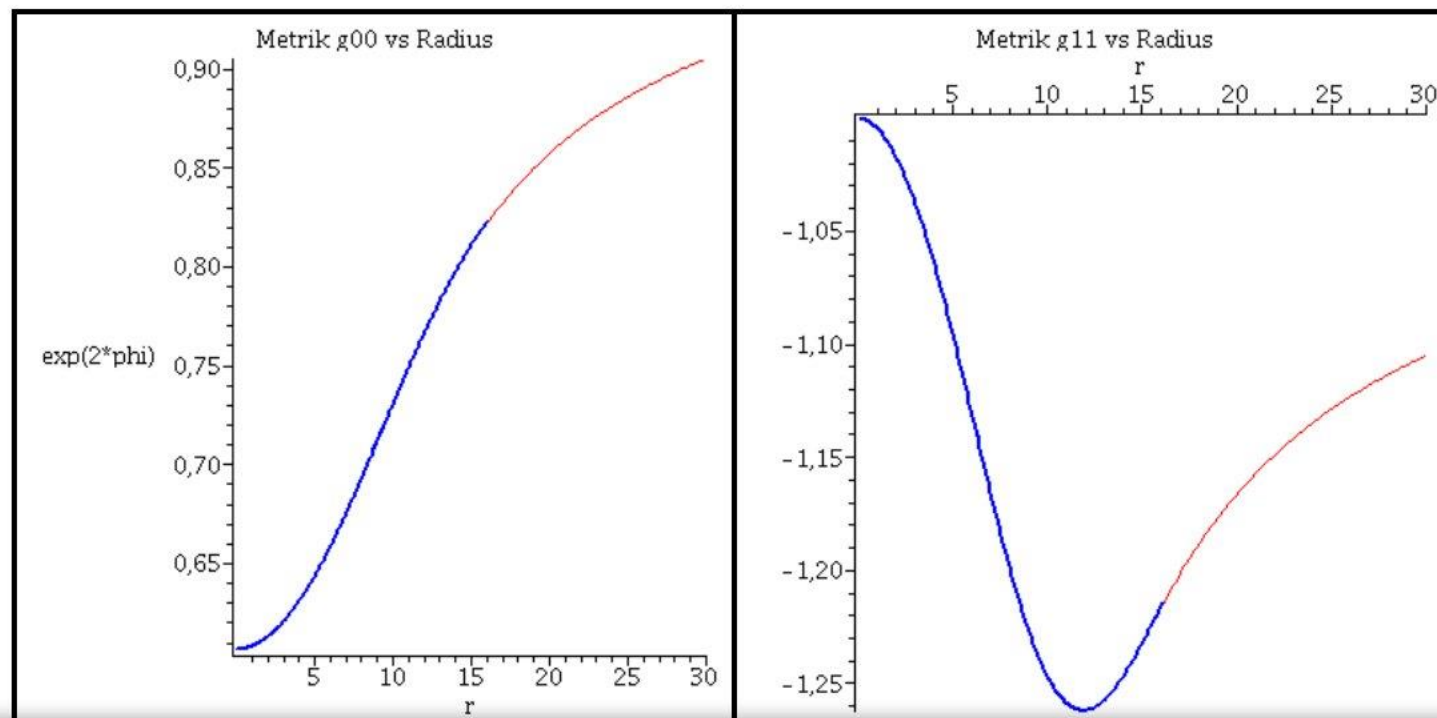
Veranschaulichung der g_{00} -Komponente (linke Abbildung) und g_{11} -Komponente (rechte Abbildung) der Innenraummetrik (blaue Kurven) und Außenraummetrik (rote Kurven).

Veranschaulichung der g_{00} -Komponente (linke Abbildung) und g_{11} -Komponente (rechte Abbildung) der Innenraummetrik (blaue Kurven) und Außenraummetrik (rote Kurven).

```

>
ranf:=10^(-1):
Plot3:=odeplot(Loes1,[r,exp(2*phi(r))],ranf..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Metrik g00 vs Radius"):
Plot4:=odeplot(Loes1,[r,-1/(1-2*m(r)/r)],ranf..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Metrik g11 vs Radius"):
Plot5:=plot(1-2*M/r,r=rend..30,color=red):
Plot6:=plot(-1/(1-2*M/r),r=rend..30,color=red):
display(Matrix(1,2,[[display(Plot3,Plot5),display(Plot4,Plot6)]]));

```



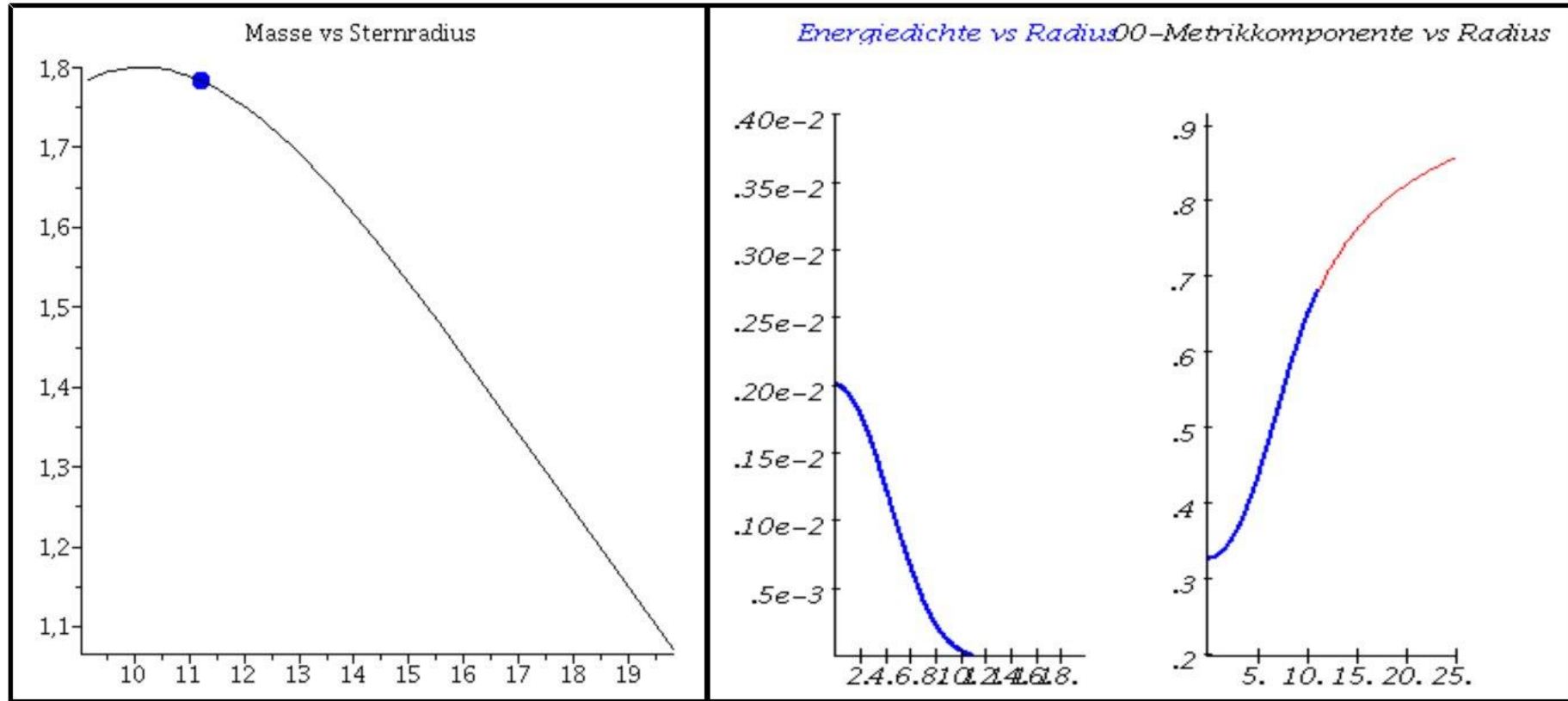
Masse-Radius Beziehung

Im folgenden wird eine Sequenz von Sternen mit unterschiedlichen zentralen Energiedichten-Werten berechnet. Trägt man die Gesamtmasse der einzelnen Sterne gegen deren Radius auf, so erhält man die Masse-Radius Beziehung. Jede Zustandsgleichung besitzt eine eigene Obergrenze, die sogenannte maximale Masse. Die Berechnung erfolgt durch eine for-Schleife über einen geeigneten zentralen Energiedichtebereich:

```
>
r0:=10^(-14):
ranf:=10^(-1):
frames:=20:
for i from 1 by 1 to frames do
  e0:=i*0.0002:
  Loes:=dsolve({TOV1,TOV2,TOV3,m(r0)=0,e(r0)=e0,phi(r0)=0},{m(r),e(r),phi(r)},type=numeric,output=listprocedure):
  energiedichte := subs(Loes,e(r)):
  Mass := subs(Loes,m(r)):
  PPhi := subs(Loes,phi(r)):
  for rr from 1 by 0.0001 while energiedichte(rr)>10^(-10) do Radius[i]:=rr: end do:
  Masse[i]:=Mass(Radius[i]):
  Plot1[i]:=odeplot(Loes,[r,e(r)],r0..Radius[i],numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Energiedichte vs Radius",view=[r0..20,0..0.004]):
  Phi0:=(0.5*ln(1-2*Masse[i]/Radius[i])):
  DPhi:=Phi0-PPhi(Radius[i]):
  Plot3[i]:=odeplot(Loes,[r,exp(2*(phi(r)+DPhi))],r0..Radius[i],numpoints=200,color=blue,thickness=2,labels=[Radius,"00-Metrikkomponente"],labeldirections=[horizontal,vertical],title="00-Metrikkomponente vs Radius"):
  Plot5[i]:=plot(1-2*Masse[i]/r,r=Radius[i]..25,color=red):
  Ani1[i]:=display(Matrix(1,2,[[Plot1[i],display(Plot3[i],Plot5[i])]]));
  PointA[i]:=pointplot({[Radius[i],Masse[i]]},symbol=solidcircle,symbolsize=23,color=blue):
od:

> MR:=listplot([seq([Radius[i],Masse[i]],i=1..frames)],title="Masse vs Sternradius"):
for i from 1 by 1 to frames do
  Ani2[i]:=display(PointA[i],MR):
od:
```

```
> Animat:=display([seq(Ani1[i],i=1..frames)],insequence=true):  
  Animat1:=display([seq(Ani2[i],i=1..frames)],insequence=true):  
  display(Array([Animat1,Animat]));
```



Weißer Zwerge, Neutronensterne und Quarksterne

Die zugrundeliegende Zustandsgleichung der Materie (die Funktion $p(\epsilon)$) zusammen mit dem Startwert der zentralen Energiedichte im Inneren des Sterns legen die Eigenschaften des Sterns fest. Weiße Zwerge haben eine viel geringere zentrale Energiedichte und ihre Zustandsgleichung wird durch den Elektronendruck verursacht. Bei Neutronen und Quarksternen ist die Zustandsgleichung maßgeblich durch den Druck der Neutronen bzw. der Quarks bestimmt. Im Teil 2 dieser Vorlesung werden wir die Eigenschaften dieser unterschiedlicher Sterne im Detail betrachten.

Literatur:

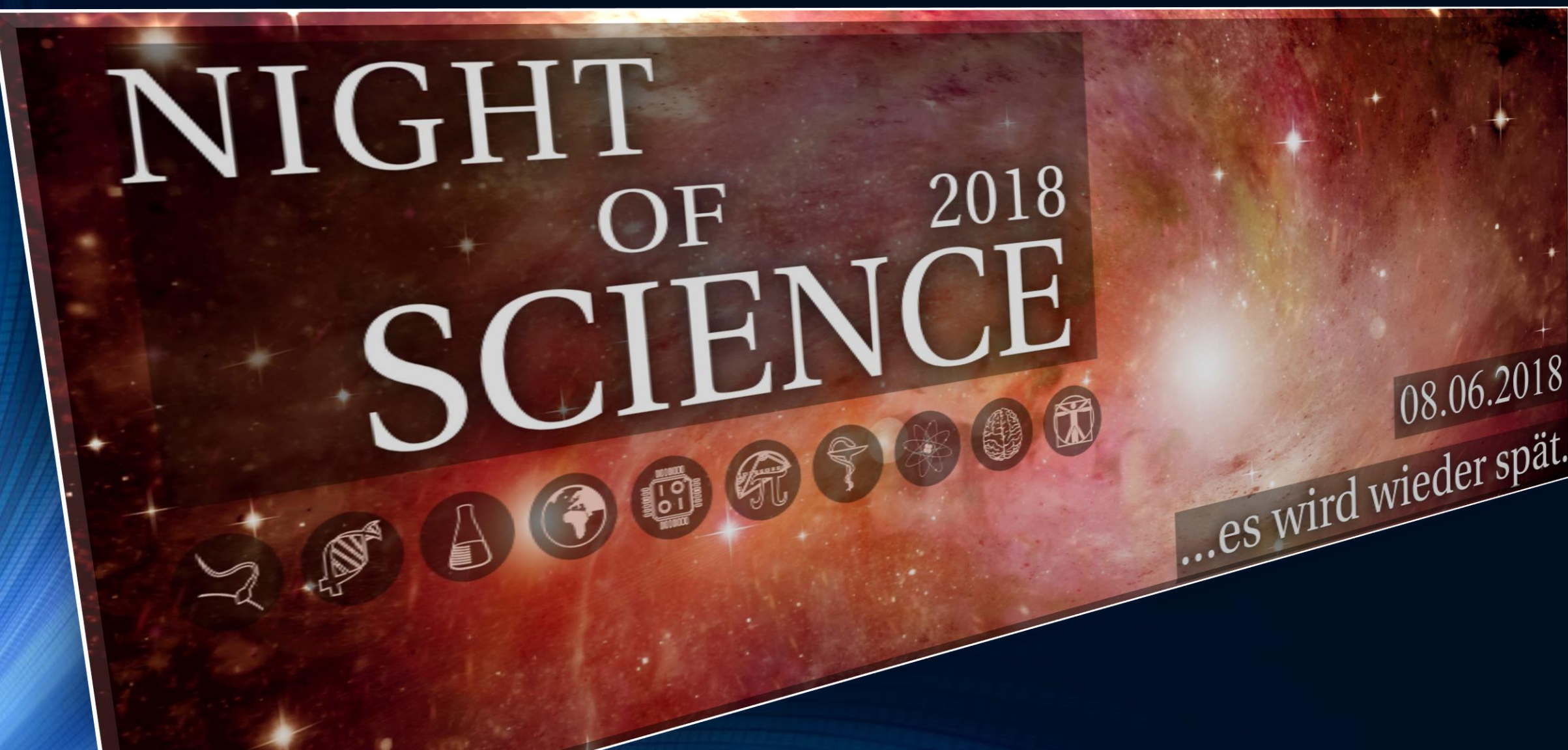
Sagert, Irina, Matthias Hempel, and Carsten Greiner. "Compact stars for undergraduates." *European journal of physics* 27.3 (2006): 577.

Silbar, Richard R., and Sanjay Reddy. "Neutron stars for undergraduates." *American journal of physics* 72.7 (2004): 892-905.

David Blaschke, "Structure of White Dwarfs and Neutron Stars" (siehe www.ift.uni.wroc.pl-blaschke-vorles-CS_2.pdf)

08. Juni 2018, 21.00 Uhr: Night of Science 2018, Campus Riedberg in Frankfurt am Main

M.Hanauske: Tanz der Neutronensterne

A banner for the 'Night of Science 2018' event. The background is a vibrant, reddish-orange nebula with numerous bright stars. The text 'NIGHT OF SCIENCE 2018' is prominently displayed in a large, white, serif font. Below the text is a horizontal row of ten circular icons representing various scientific fields: a microscope, a DNA double helix, a laboratory flask, a globe, a computer keyboard, a microscope, a caduceus, an atom, a brain, and a figure holding a scale. The entire banner is tilted slightly to the right.

NIGHT
OF SCIENCE 2018

08.06.2018

...es wird wieder spät.