Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
31. MAY, 2019

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

6. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
  PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr

- Übungstermine:
  Zusätzlich zur Vorlesung werden ab dem 03.05.2019 freiwillige Übungstermine eingerichtet, die jeweils freitags, eine Stunde vor der Vorlesung im PC-Pool 01.120 stattfinden (Fr. 14-15.00 Uhr).

- Vorlesungs-Materialien:
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VARTC/

- Kurs auf der Online-Lernplatform Lon Capa:
  http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/

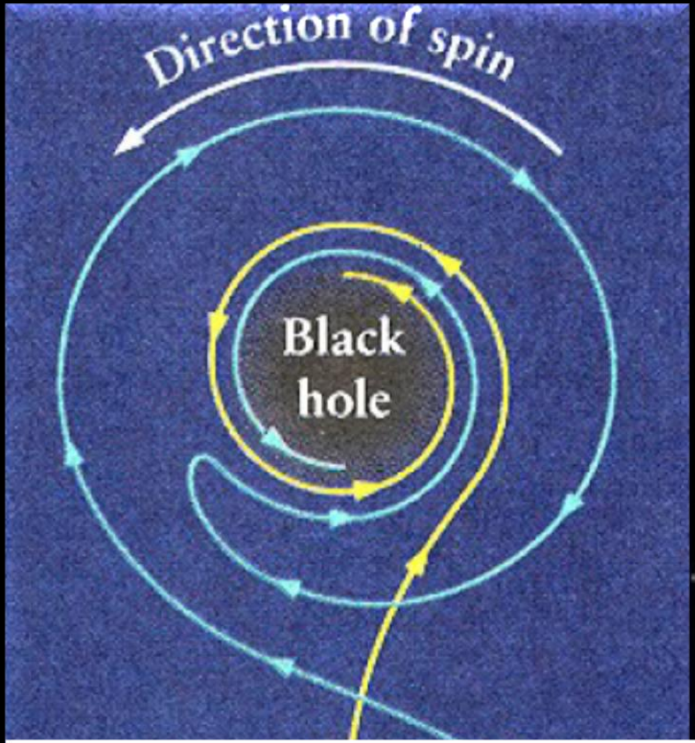
- Wiederholung der letzten Vorlesung: Die Kerr-Metrik, Ereignishorizonte und Flächen der stationären Grenze (bzw. der unendlichen Rotverschiebung), der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging"), geodätische Bewegung eines Probekörpers in der Kerr Metrik), Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen um ein rotierendes schwarzes Loch (Kerr Metrik) mittels eines effektiven Potentials, Kreisförmige Bewegungen in der äquatorialen Ebene, der "Innermost Stable Circular Orbit" für einen Probekörper der mit und entgegen der Rotationsrichtung des schwarzen Loches bewegt, der gravitomagnetische Effekt, das rotierende schwarze Loch in M87

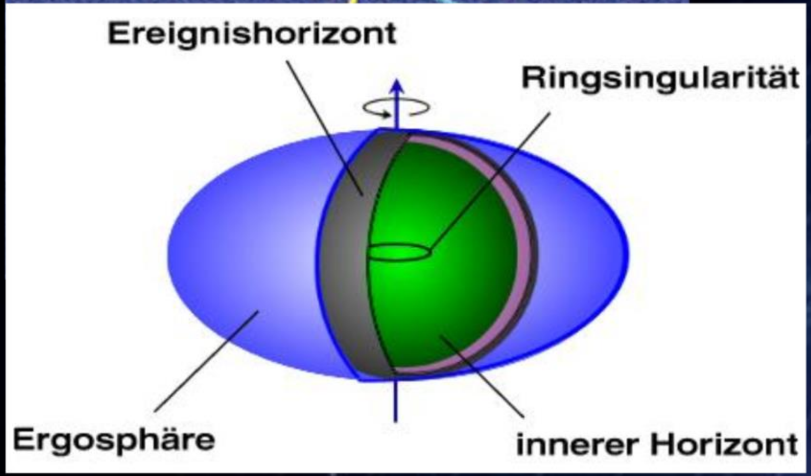
Plan für die heutige Vorlesung

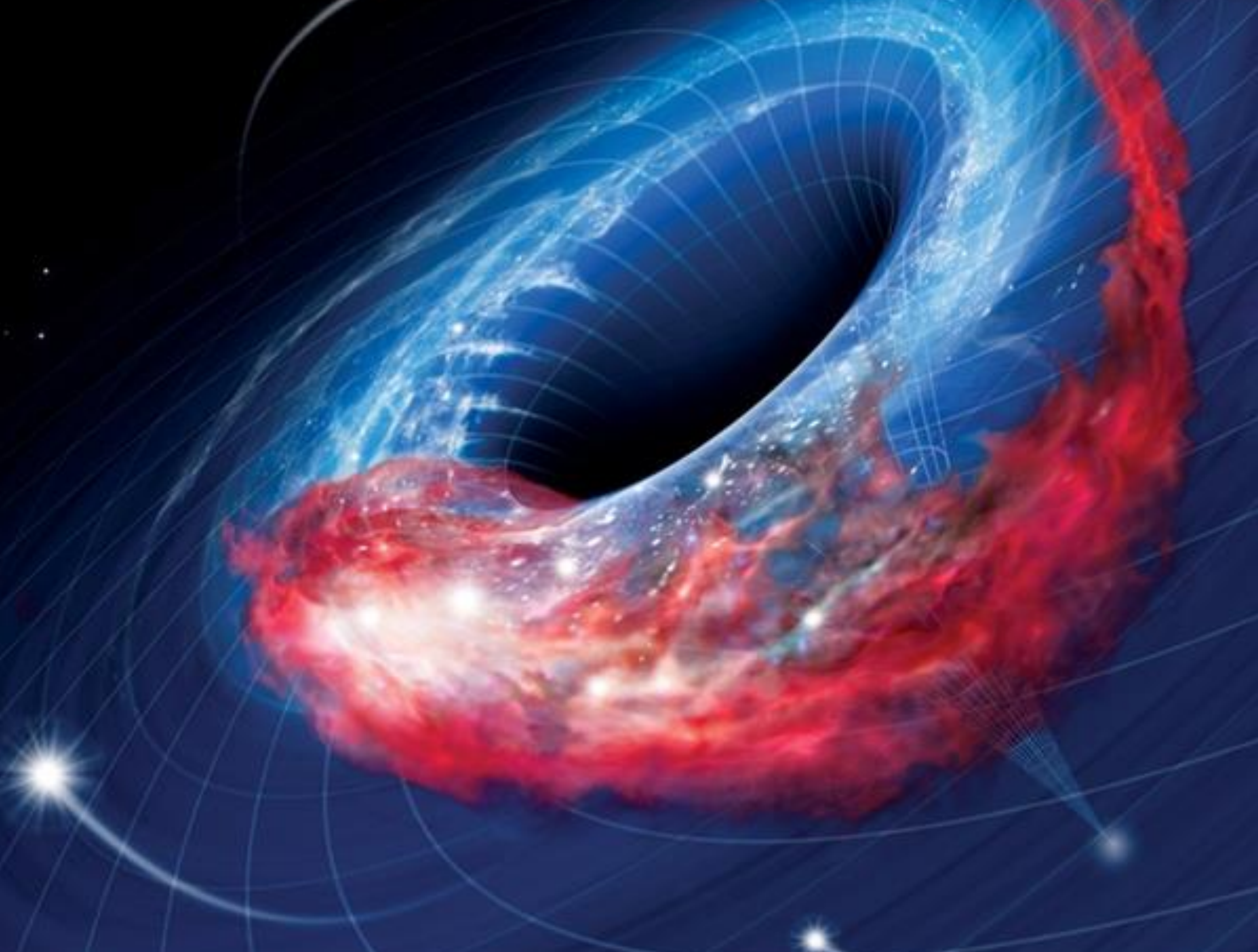
Eigenschaften und theoretische Beschreibung von Neutronensternen

Maple: Von der Einsteingleichung zur Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichung, numerisches Lösen der TOV-Gleichung in Maple

Rotierende schwarze Löcher und die Kerr Metrik



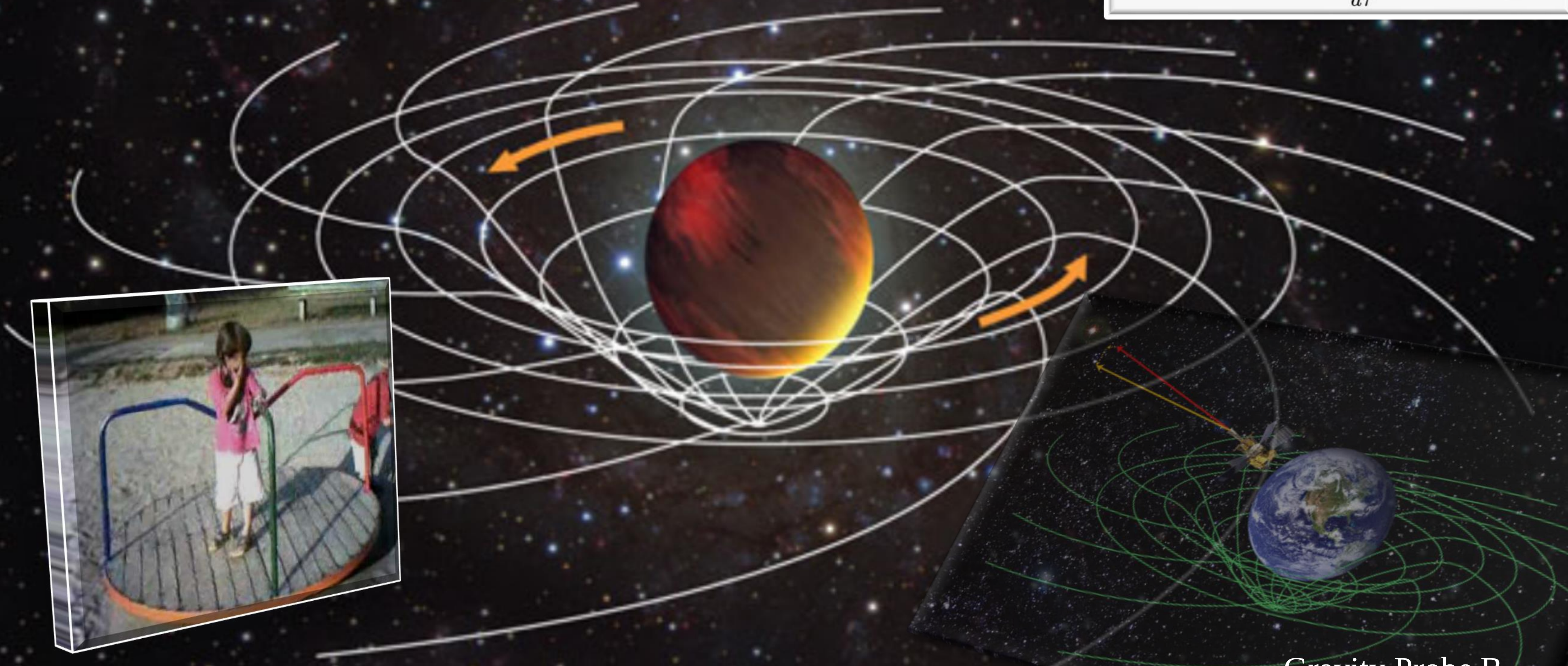




Der Mitführungseffekt der Raumzeit (“Frame-Dragging”)

Experimente zur Bestätigung des Effektes: LARES, Gravity Probe B

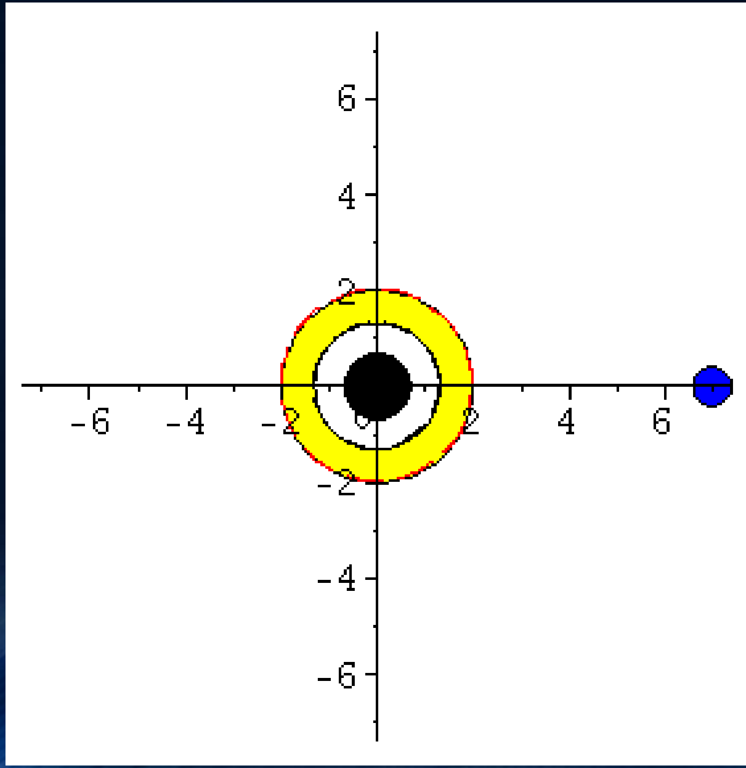
$$\omega(r,\theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$

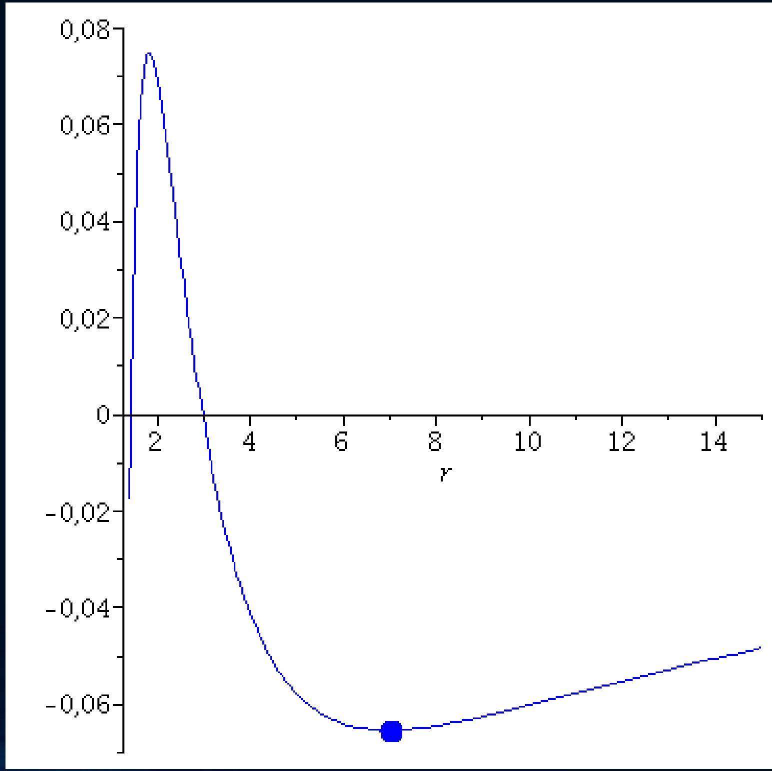


Gravity Probe B

Kerr Metrik: Effektives Potential
Kreisförmige Bahnbewegungen

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$





Eigenschaften der Kerr-Metrik

```
>    restart:
  with( tensor ):
    with(plots):
 with(plottools):
```

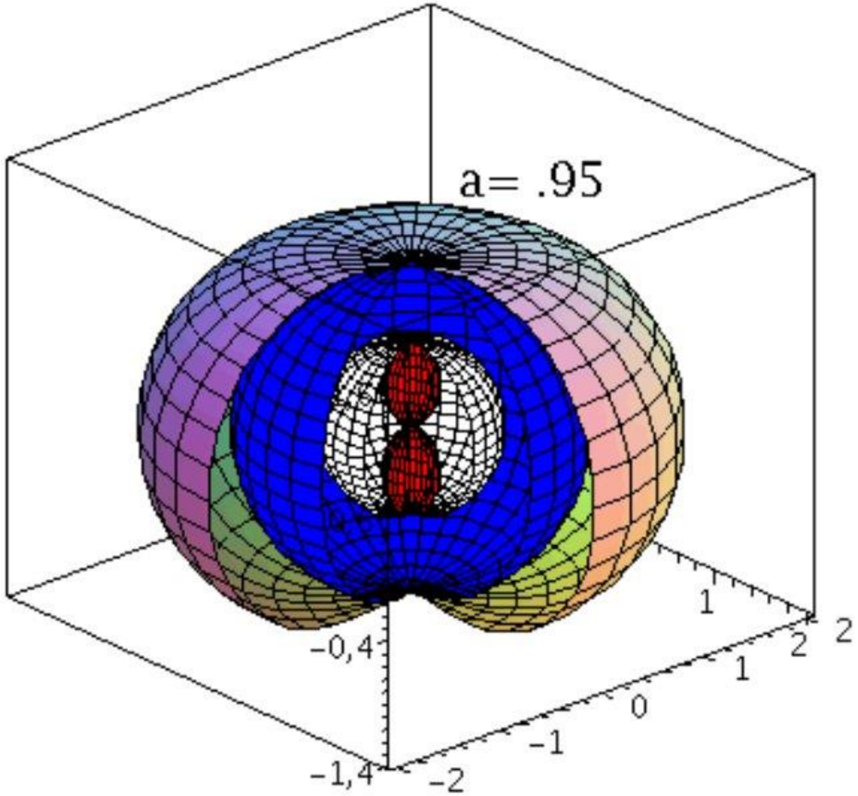
Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a in Boyer-Lindquist Koordinaten (a ist ein spezifischer Drehimpuls a=J/M und wird als der sogenannte Kerr-Rotationsparameter bezeichnet). Die Kerr Metrik besitz folgendes Aussehen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt}(r,\theta) & 0 & 0 & g_{t\phi}(r,\theta) \\ 0 & g_{rr}(r,\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}(r,\theta) & 0 \\ g_{\phi t}(r,\theta) & 0 & 0 & g_{\phi\phi}(r,\theta) \end{pmatrix} \text{, wobei:}$$

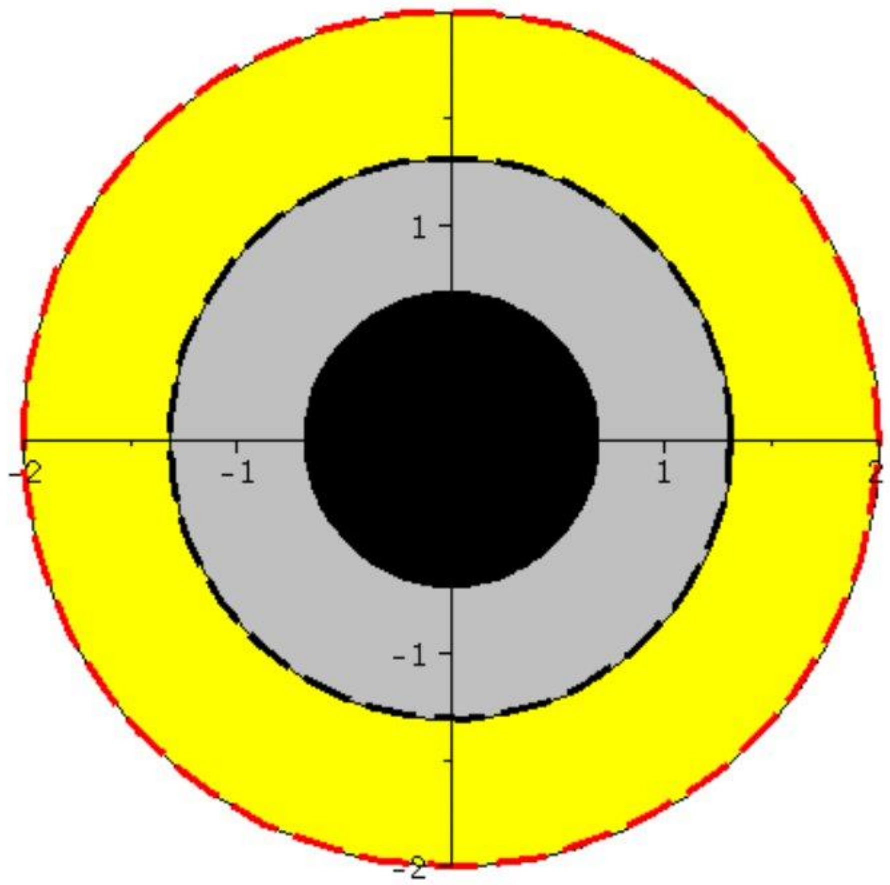
$$g_{tt}(r,\theta) = \left(\frac{1-2\,M\,r}{\rho^2}\right) \text{ , } g_{t\phi}(r,\theta) = \frac{2aMr\sin^2(\theta)}{\rho^2} \text{ , } g_{rr}(r,\theta) = -\frac{\rho^2}{\Delta} \text{ ,}$$

$$g_{\theta\theta}(r,\theta) = -\rho^2 \text{ , } g_{\phi\phi}(r,\theta) = -\left(\frac{r^2+a^2+2Mra^2\sin^2(\theta)}{\rho^2}\right)\sin^2(\theta) \text{ ,}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2(\theta) \text{ , } \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

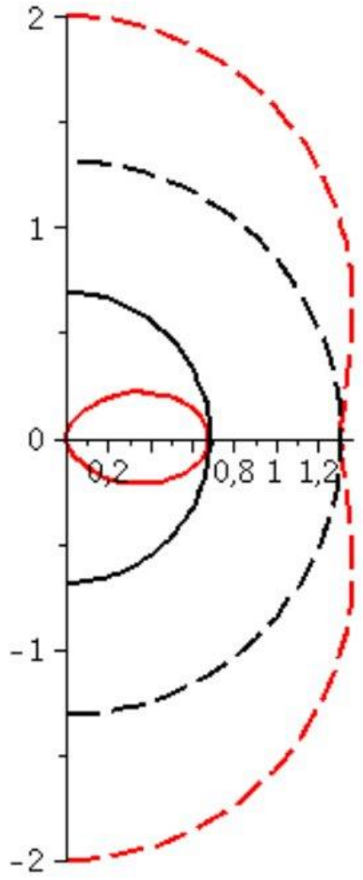


Horizontstruktur in der äquatorialen Ebene (Gelb: Ergosphäre, grau: Bereich zwischen äußerem und innerem Ereignishorizont, a=0.95):



Horizontstruktur in der polaren Ebene (a=0.95):

```
display({A,B,C,DD},scaling=constrained);
```



Animation der Horizontstruktur bei ansteigender Rotation des schwarzen Lochs:

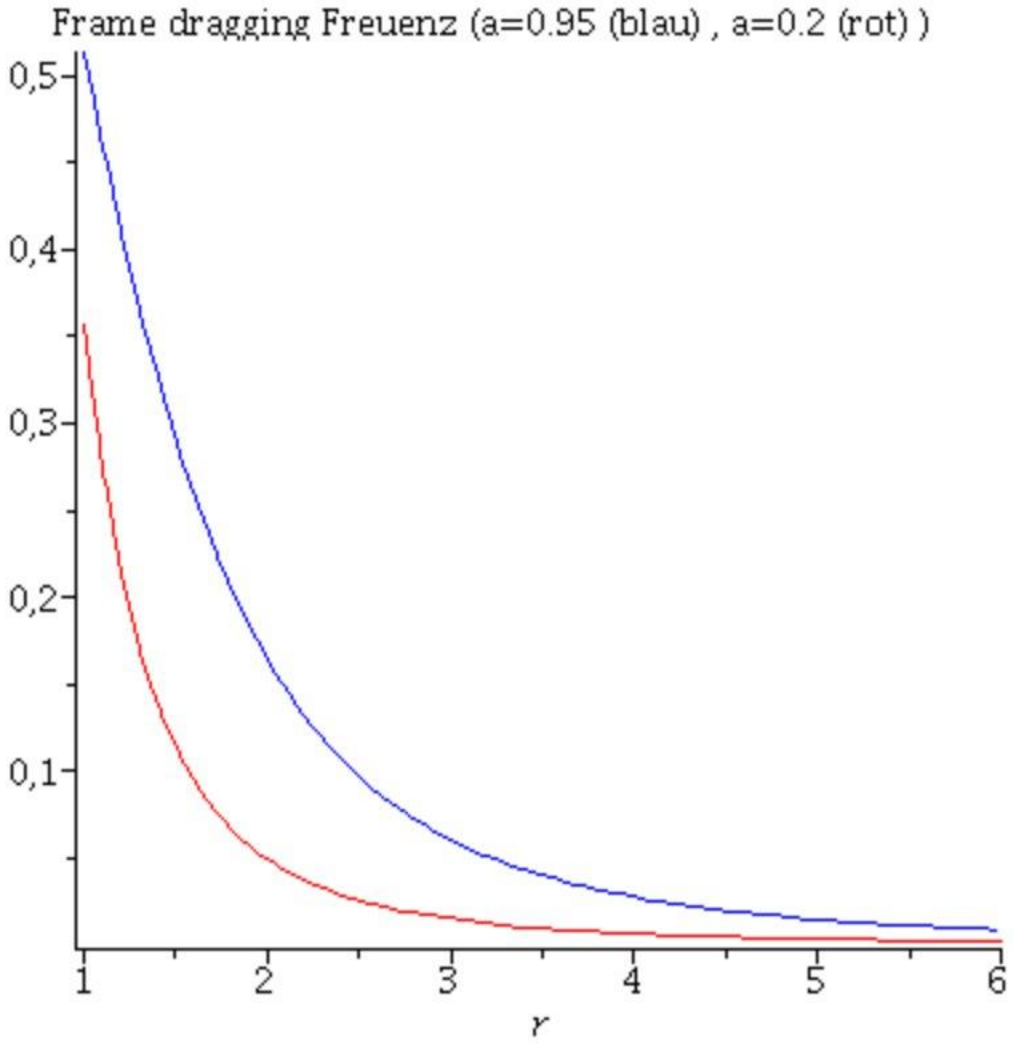
1 −3	1 −3	1 −3

Die Rotation der raumzeitlichen Struktur um das schwarze Loch (das Frame dragging)

Ein rotierendes schwarzes Loch zieht die Raumzeit mit sich mit. Die Rotationsfrequenz mit der die Raumzeit mitgeführt wird nennt man "Frame dragging" Frequenz; sie quantisiert, mit welcher Frequenz ein im Eigensystem "ruhender" Probekörper von der ihm zugrundeliegenden Raumzeit mitgezogen wird:

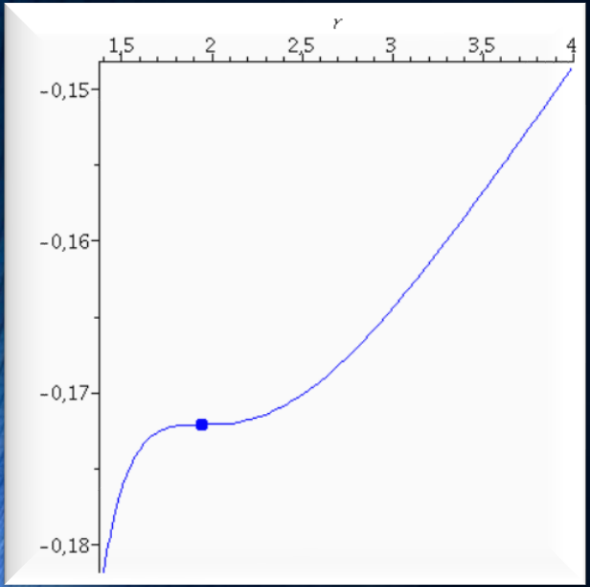
$$\omega(r) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$

```
> FrameDrag:=get_compts(ginv)[1,4]/get_compts(ginv)[1,1];
   #FrameDrag:=-get_compts(g)[1,4]/get_compts(g)[4,4];
```

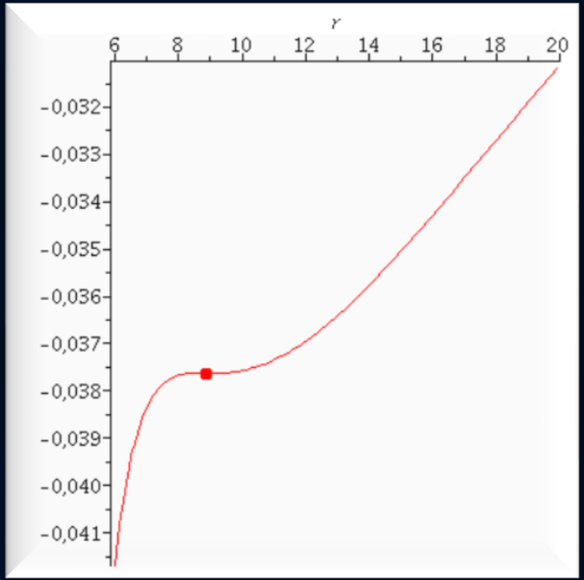

Frame dragging Freuenz (a=0.95 (blau) , a=0.2 (rot))
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1
2
3
4
5
6
r

Kerr Metrik: Effektives Potential
Innerste „stabile“ kreisförmige Bahnbewegungen (ISCOs)

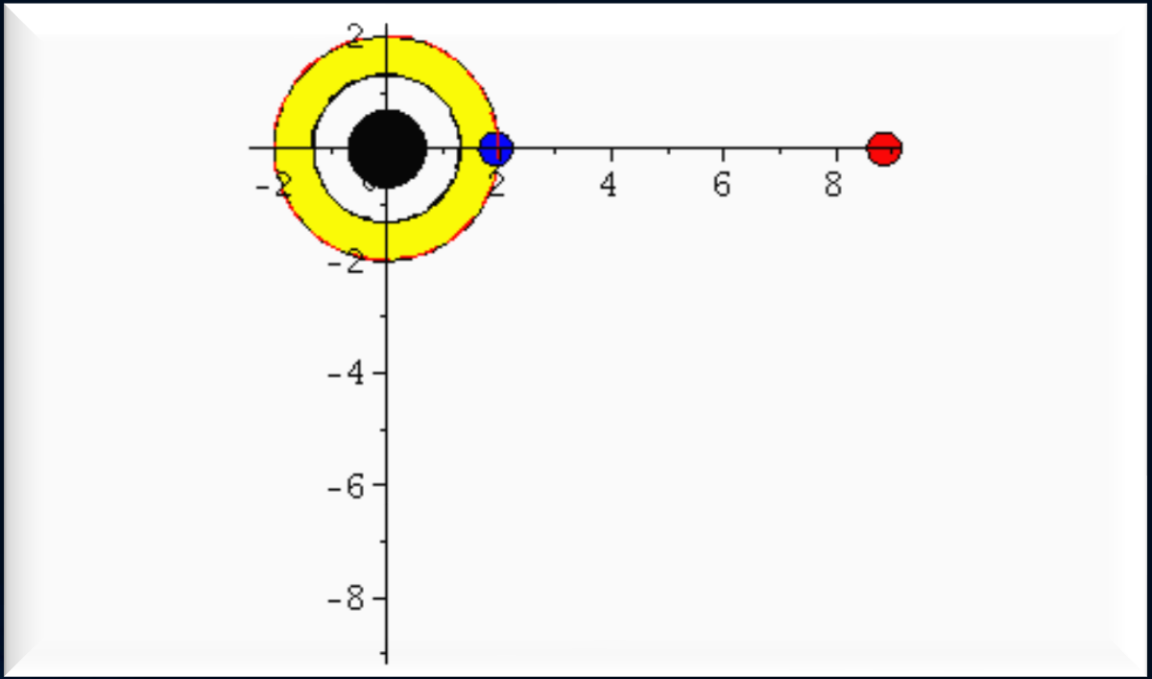
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2\left(E^2 - 1\right)}{2\,r^2} - \frac{M(l - a\,E)^2}{r^3}$$



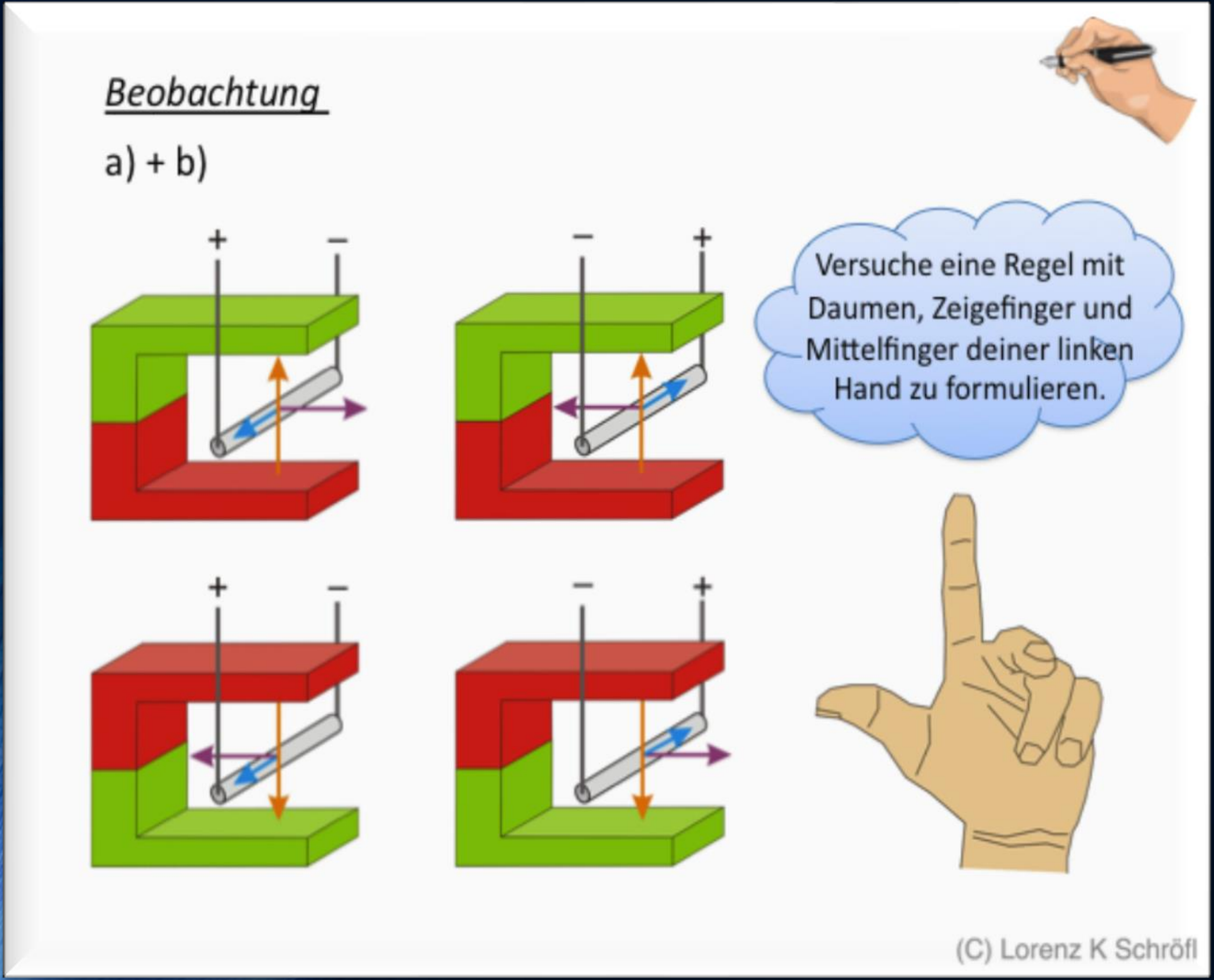
Probekörper rotiert mit der Rotationsrichtung des schwarzen Loches

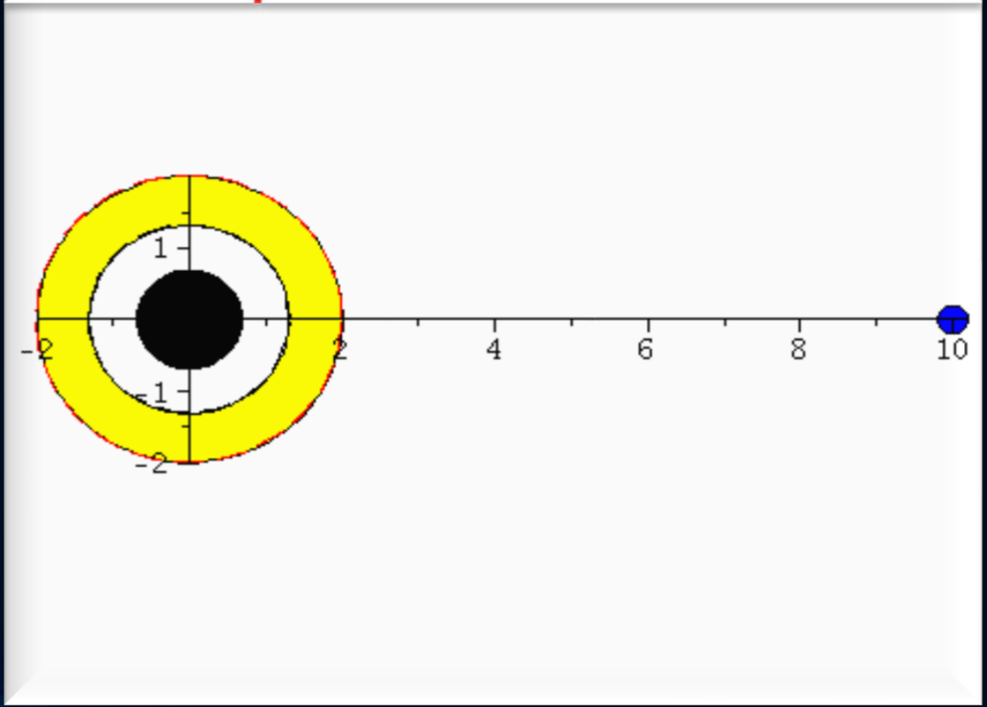


Probekörper rotiert entgegen der Rotationsrichtung des schwarzen Loches



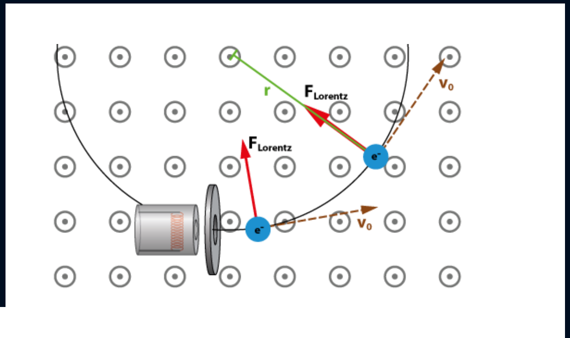
Der gravitomagnetische Effekt





Der gravitomagnetische Effekt

Elektromagnetischer Effekt der Lorentzkraft:



Gravito-magnetischer Effekt:

$$\omega(r,\theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$

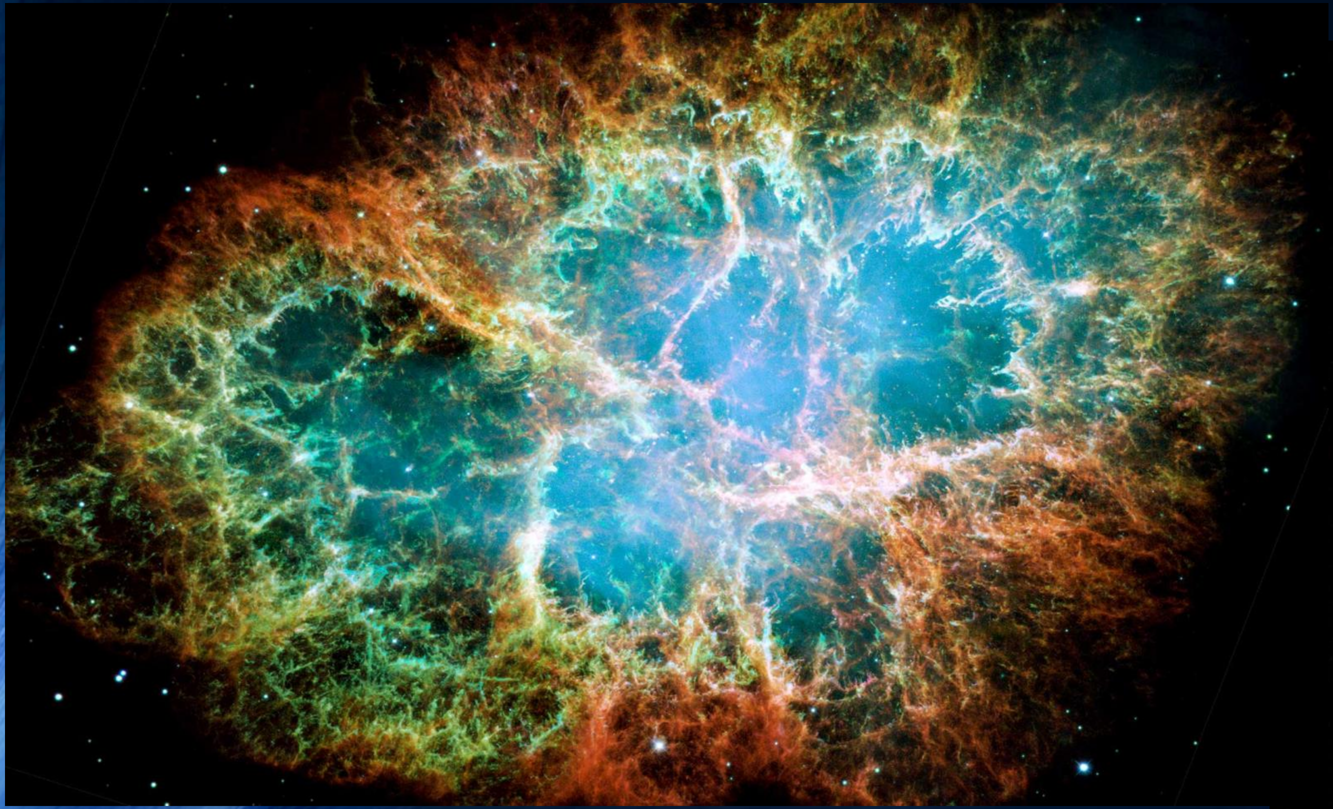
Diese "Frame dragging" Frequenz wirkt in ähnlicher Weise auf die Geschwindigkeit von Probekörpern, wie das Magnetfeld in der Elektrodynamik die Lorentzkraft verursacht. Im Fall1 (grün) ist das gravitomagnetische Feld Null, im Fall 2 (blau) ist es aus der äquatoriellen Ebene nach oben gerichtet und im Fall 3 zeigt es nach unten. In erster Näherung (siehe Fließbach Buch, S:172) ist die gravitomagnetische Lorentzkraft gleich $\sim 2\,(\omega \times \mathbf{v})$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt, ω der axiale Vektor der "Frame dragging" Frequenz und $\mathbf{v}$ der Geschwindigkeitsvektor des Probekörpers ist. Die Änderung des Geschwindigkeitsvektors nimmt in Schwachfeldnäherung dann die folgende Gestalt an:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \underbrace{-\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})}_{\text{gewoehnlicher Teil der gravitativen Kraft}} + \underbrace{2\,\omega(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}}_{\text{gravitomagnetische Lorentzkraft}} + \mathcal{O}(v^2/c^2)\ ,$$

wobei $\Phi(\mathbf{r})$ das Newtonsche Gravitationspotential und $\mathbf{v} = (v^r, v^\theta, v^\phi)$ der Geschwindigkeitsvektor des Probekörpers ist. Die unten abgebildete Grafik zeigt die "Frame dragging" Frequenz $\omega = \omega_z(r)$ für die Kerr Metrik, wobei bei der schwarzen Kurve a=0, bei der blauen Kurve a=0.99 und bei der roten Kurve a=-0.99 ist.

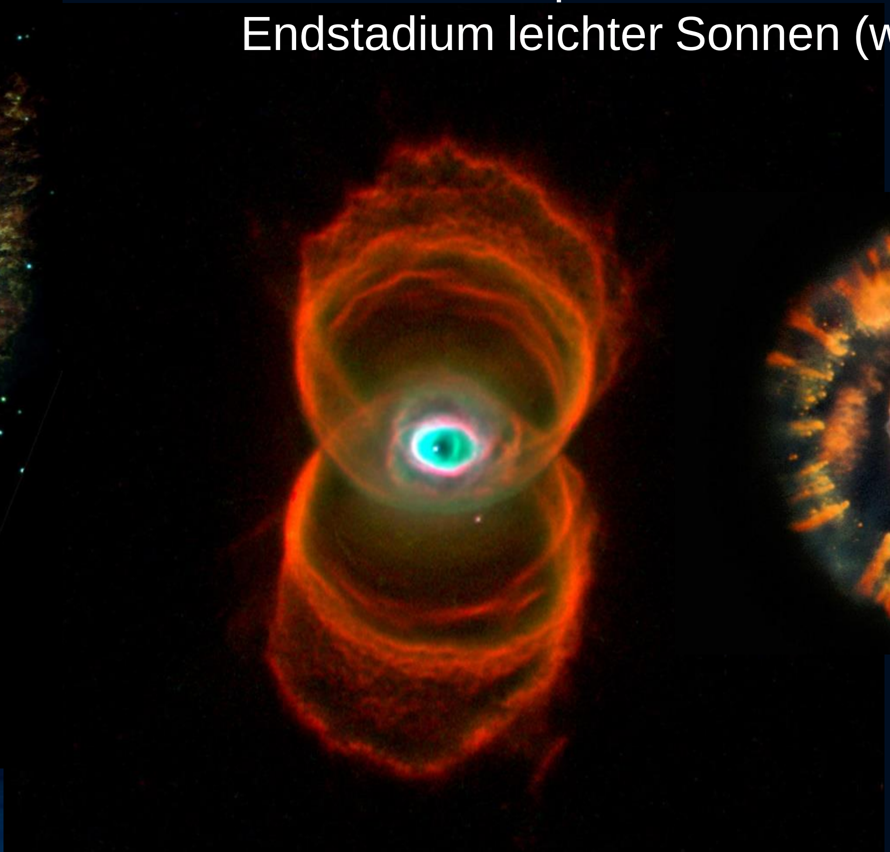
Was sind Neutronensterne?

Neutronensterne entstehen in einer Supernova Explosion.
Sonnen, die mindestens 8-mal schwerer als unsere Sonne sind explodieren am Ende ihrer Lebenszeit in einer Supernova Explosion – im Zentrum bleibt ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch zurück.



Supernova Explosion, Krabben-Nebel

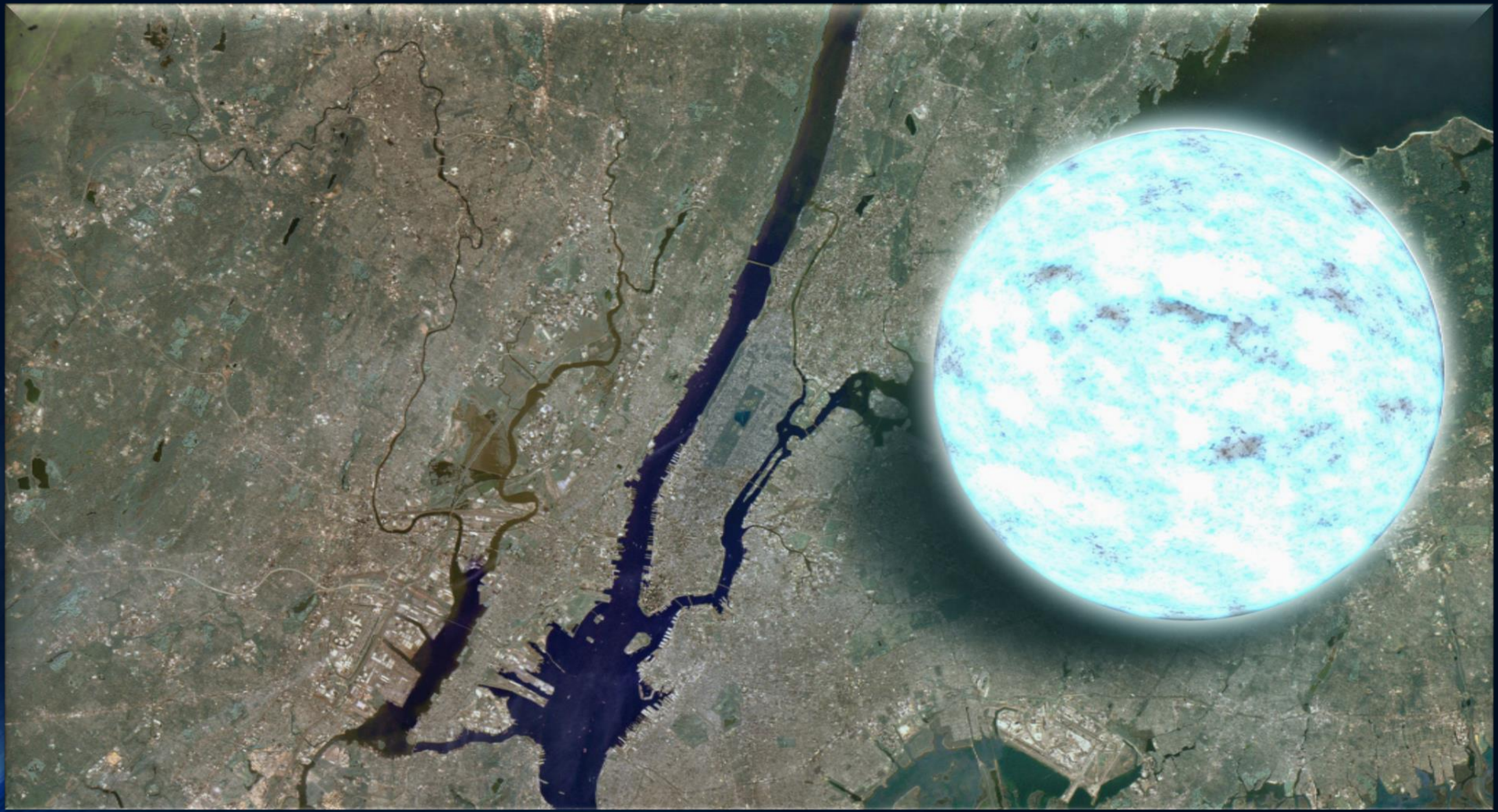
Zwei planetarische Nebel
Endstadium leichter Sonnen (weißer Zwerg)



Neutronensterne: Sehr klein und sehr schwer

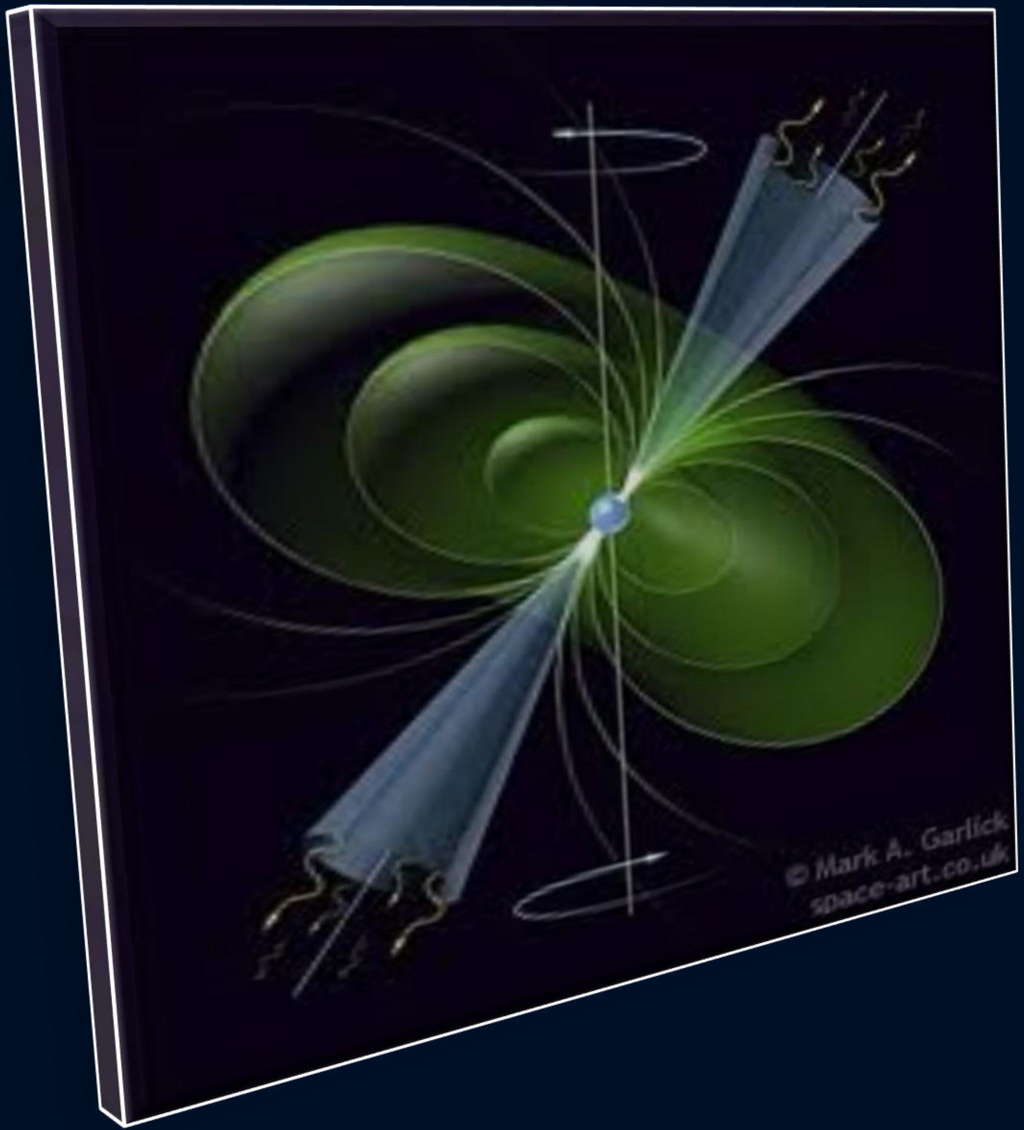
Radius ~ 10 km, Masse ~ 1-2 Sonnenmassen

Riesige Magnetfelder ~ 10^{11} Tesla, schnell rotierend (bis zu 716 Hz)



NASA/Goddard Space Flight Center

Pulsare :=
Rotierende Neutronensterne mit starkem Magnetfeld



In den letzten 50 Jahren konnten mittels Radioteleskopen ca. 3000 rotierende Neutronensterne (Pulsare) gefunden werden.

Der erste Pulsar wurde im Jahre 1967 entdeckt (PSR 1919+21, Bell)

Man unterscheidet Sekundenpulsare und Millisekunden-Pulsare

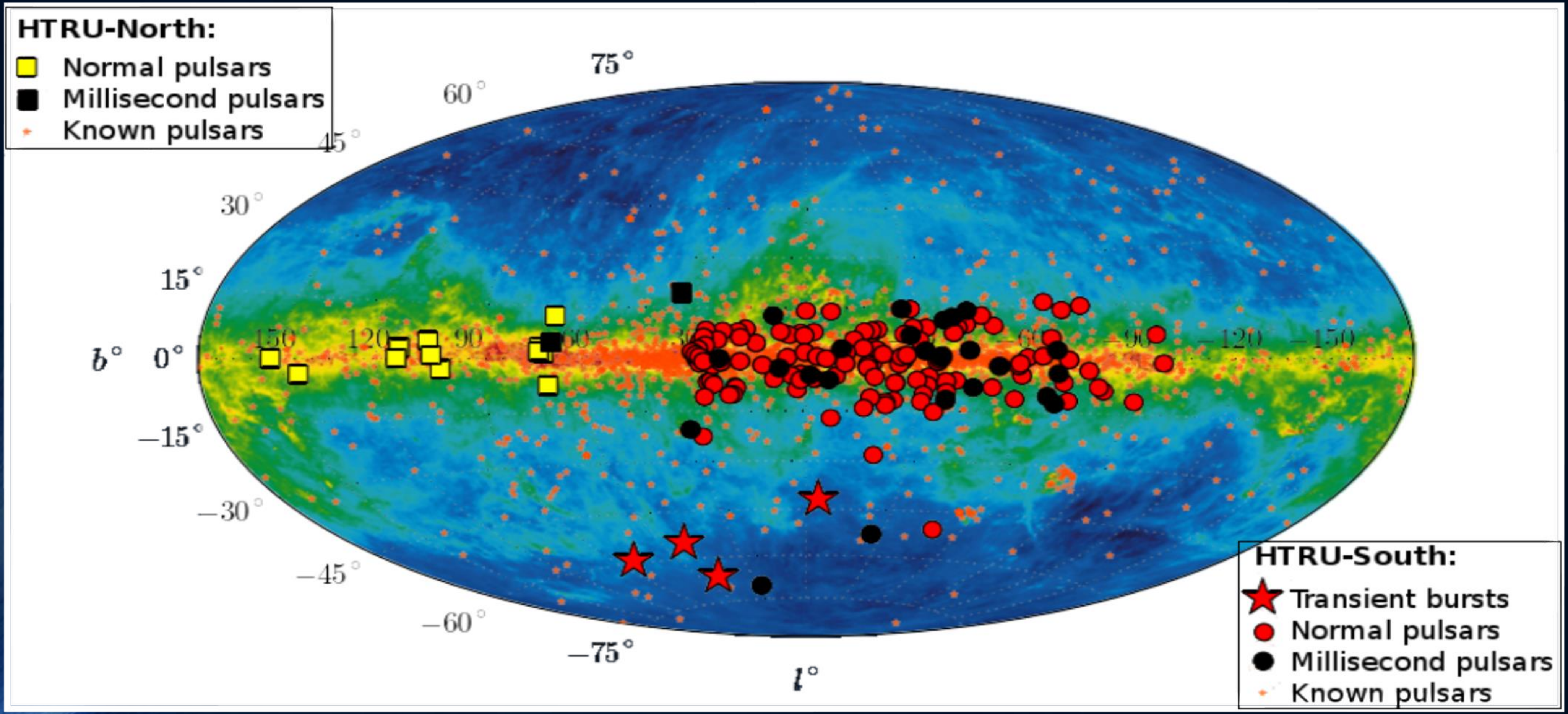
PSR B0329+54 (0.715 s)

PSR B0531+21 (33.5 ms)

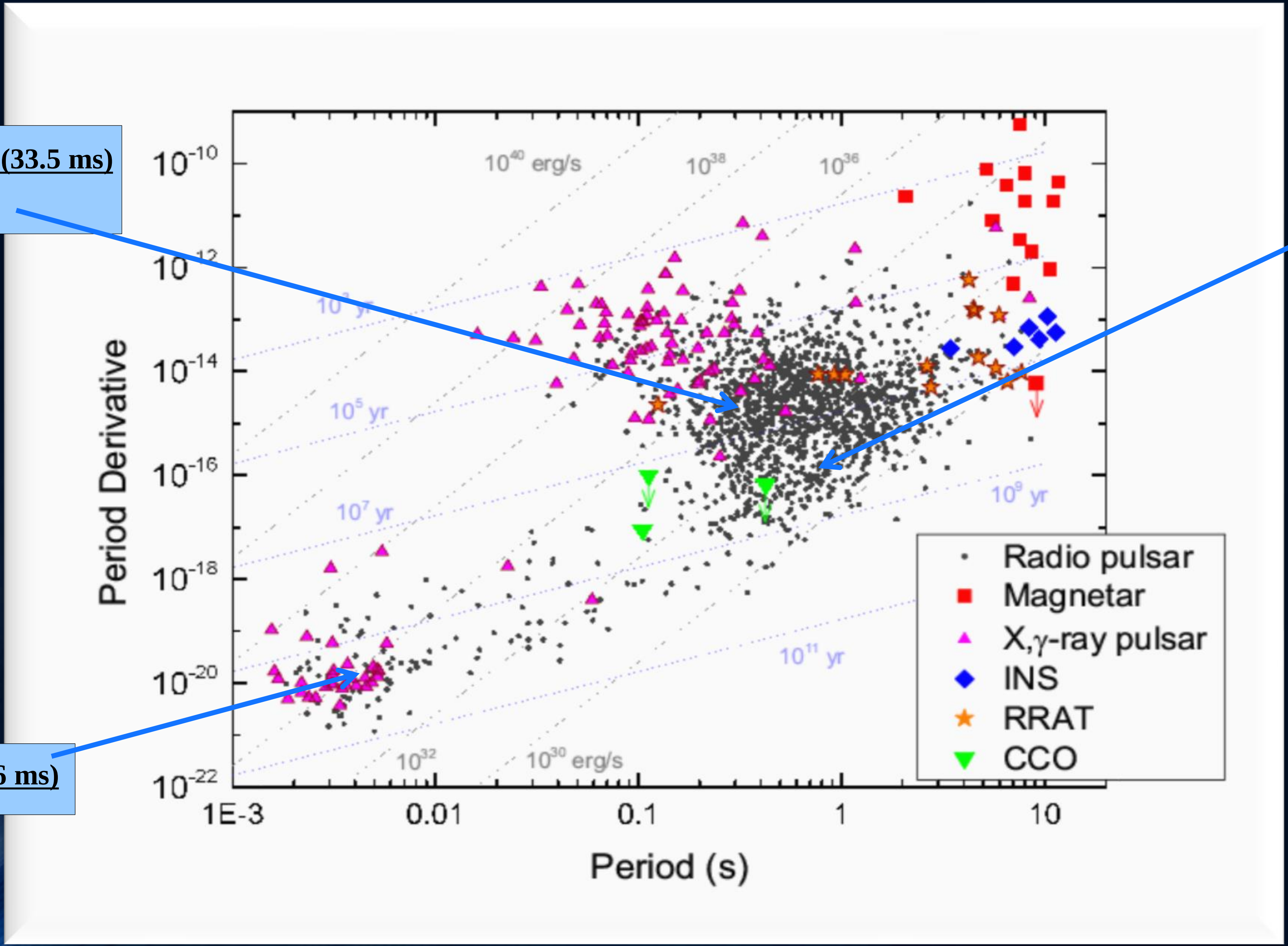
PSR B1937+21 (1.56 ms)

Pulsare sind rotierende Neutronensterne

Zurzeit kennen wir ca. 3000 Neutronensterne



Millisekunden und Sekunden Pulsare

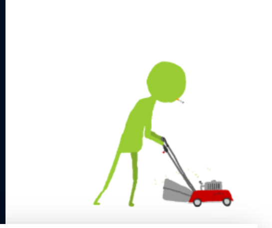


PSR B0531+21 (33.5 ms)
Crab Pulsar

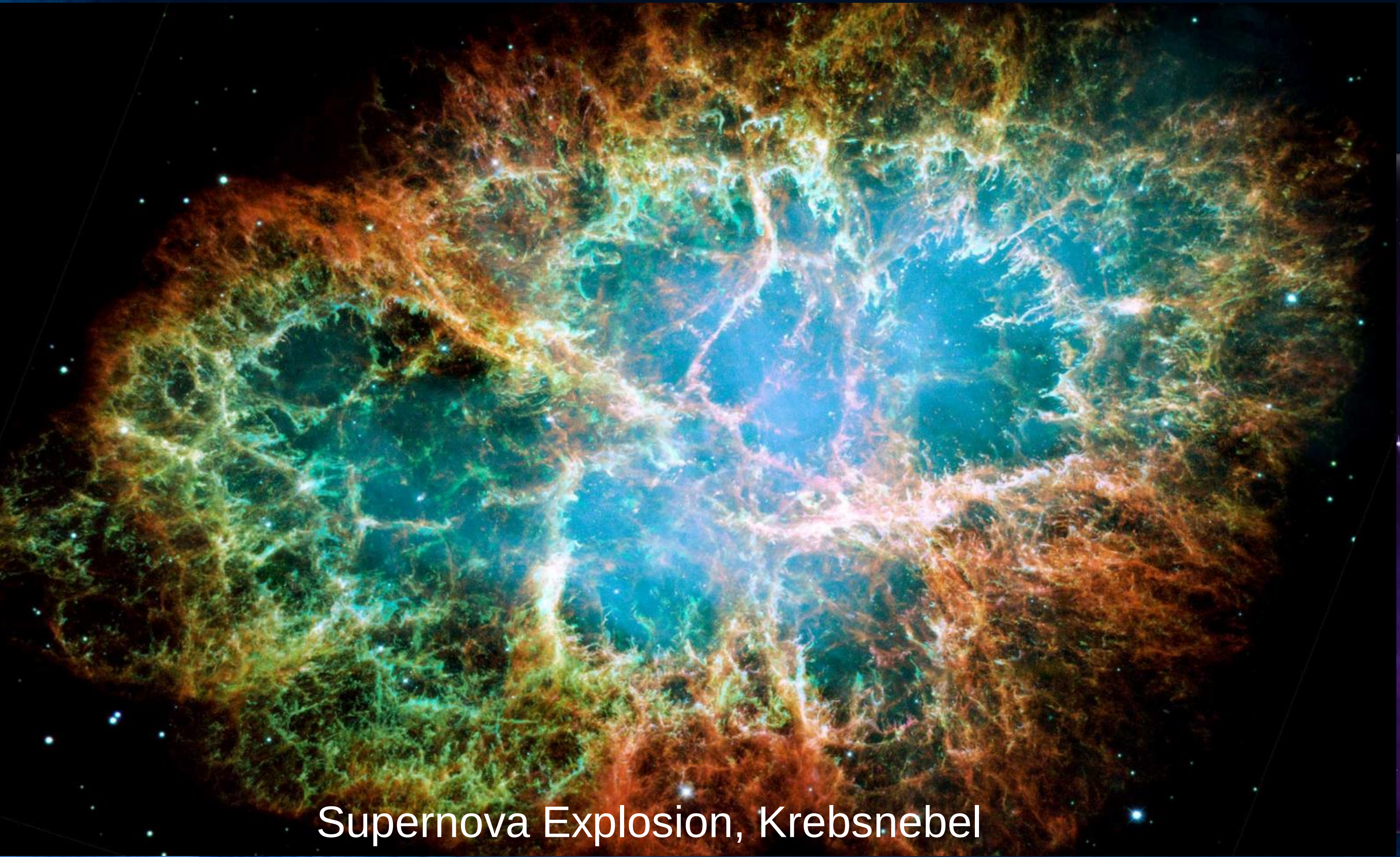
PSR B0329+54 (0.715 s)

PSR B1937+21 (1.56 ms)

Wie entstehen Neutronensterne?



Neutronensterne entstehen in einer Supernova Explosion.
Sonnen, die mindestens 8-mal schwerer als unsere Sonne sind explodieren am Ende ihrer Lebenszeit in einer Supernova Explosion – im Zentrum bleibt ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch zurück.



Supernova Explosion, Krebsnebel

Im Zentrum des Nebels ist ein Neutronenstern

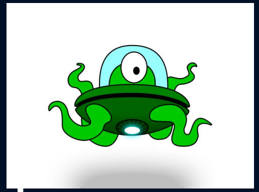
Krebsnebel (Röntgenteleskop Chandra)

Pulsare sind
Rotierende Neutronensterne mit starkem Magnetfeld


Radioteleskop FAST in China


Radioteleskop in Effelsberg

Der erste Pulsar wurde im Jahre 1967 entdeckt (PSR 1919+21, Jocelyn Bell) und wurde zunächst LGM-1 genannt.



In den letzten 50 Jahren konnten mittels Radioteleskopen ca. 3000 rotierende Neutronensterne (Pulsare) gefunden werden.

Man unterscheidet Sekundenpulsare und Millisekunden-Pulsare

PSR B0329+54 (0.715 s)

PSR B0531+21 (33.5 ms)

PSR B1937+21 (1.56 ms)

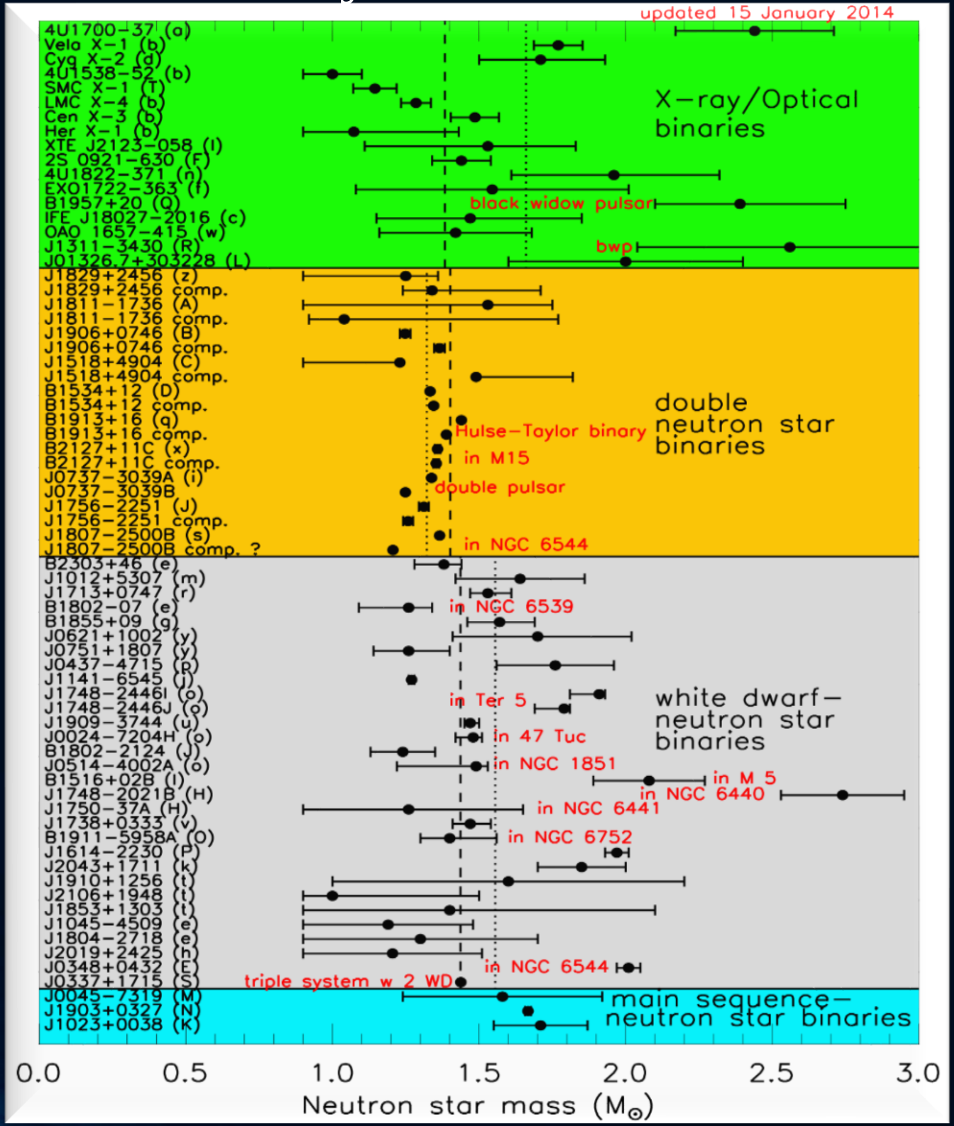
Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen

Einige der bekannten Neutronensterne befinden sich in Zweiersystemen:
NS-Planet, NS-(weißer Zwerg) oder NS-NS Systeme

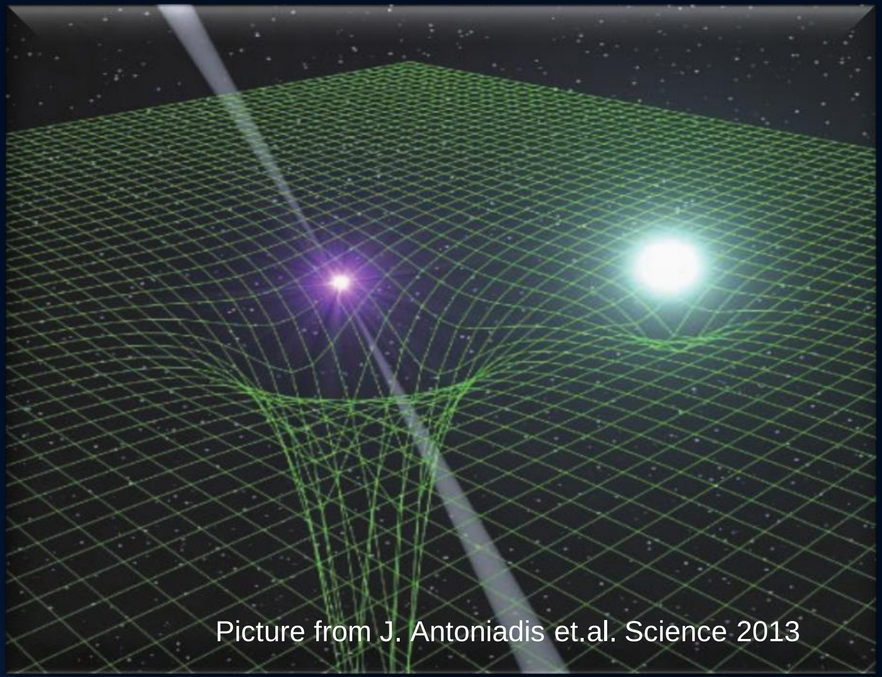
PSR J1906+0746

144-ms Pulsar, entdeckt in 2004
Orbitale Periode: 3.98 Stunden,
Exzentrizität: 0.085
Pulsar Masse: 1.291(11)
Masse Begleiter: 1.322(1)
In den Jahren 1998-2009 beobachtet,
dannach verschwand
der Pulsar aufgrund der
Spin-Präzession

Van Leeuwen et al, arXiv:1411.1518



Beobachtete Massen von Neutronensternen in binären Systemen



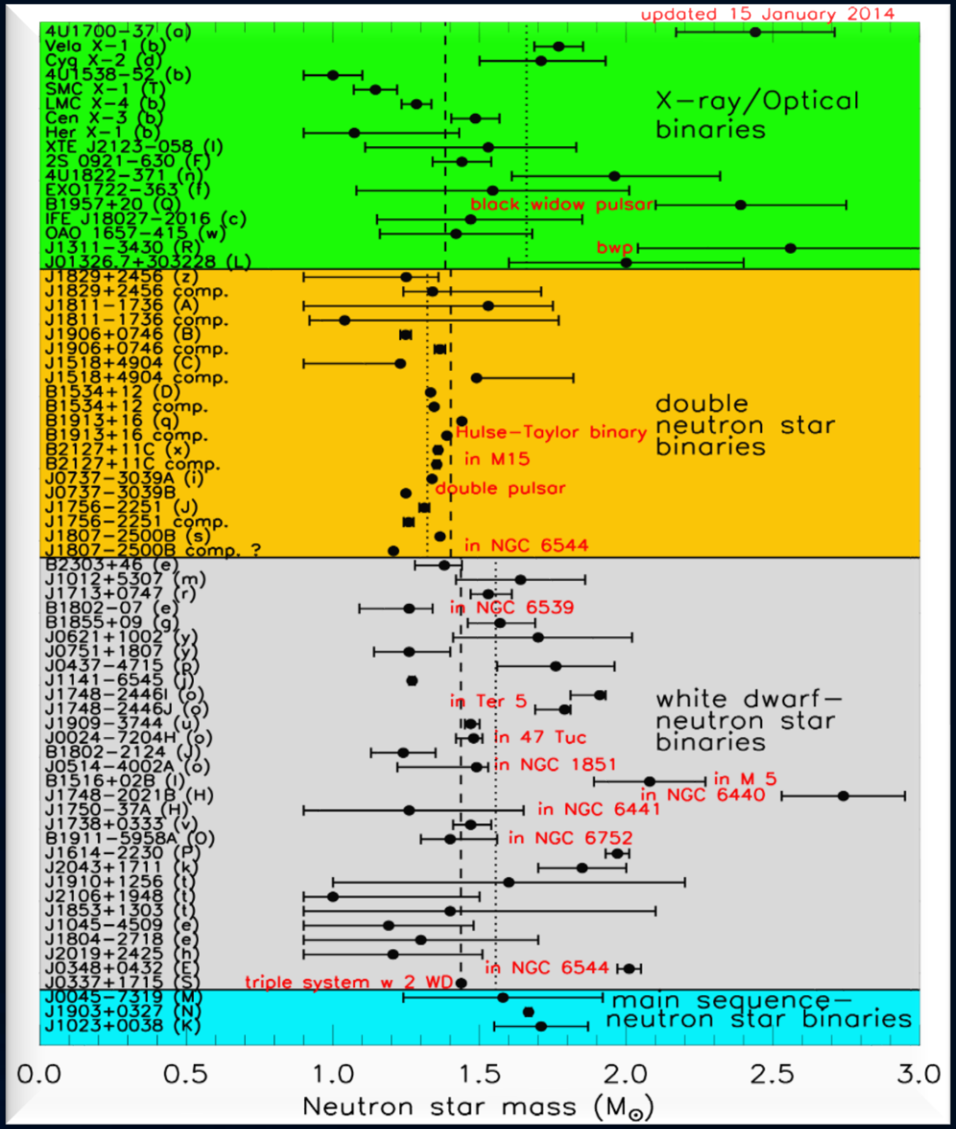
PSR J0348+0432

Orbitale Periode: 2.46 Stunden

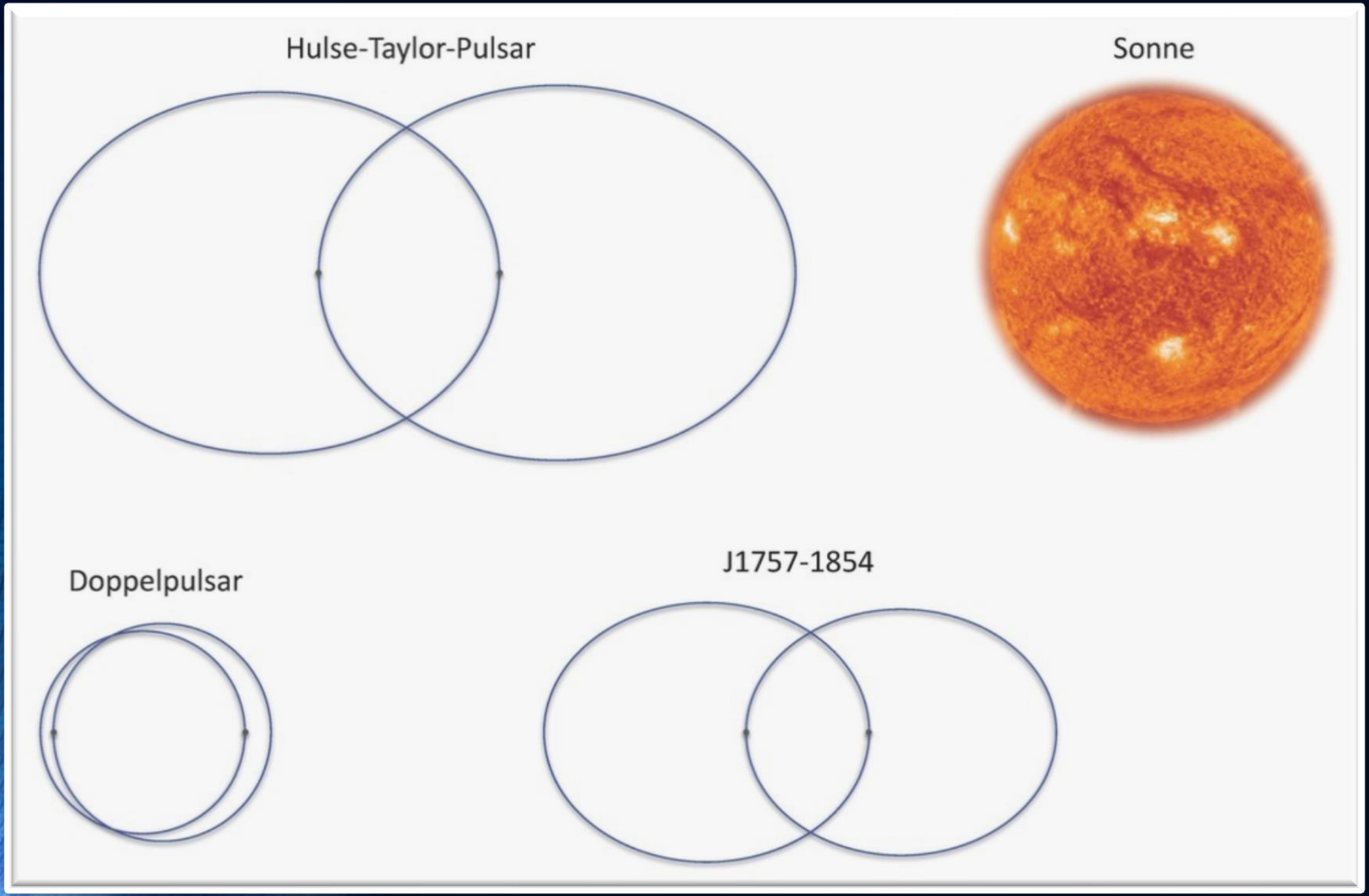
Pulsar mass: 2.01+-0.04

Masse weißer Zwerg:

M=0.172+-0.003



Binary Neutron Star Systems



Recently some new interesting Neutron Star Binary Systems has been found:

J0453+1559
P = 17 ms
(similar to the Doublepulsar)

J1913+1102
P = 27 ms
P_b = 4.95 h

J1757-1854
P = 215 ms
Pb = 4.4 h
E = 0.606

Currently we know ~25 Double-NS Systems and one triple System

Binäre Neutronenstern Systeme

Zurzeit kennt man ca. 25 binäre Neutronenstern Systeme

Beispiel:
Der **Double Pulsar**
(PSR J0737-3039A/B):
Entdeckt im Jahre 2003
Eccentricity: 0.088
Pulsar A: P=23 ms, M=1.3381(7)
Pulsar B: P=2.7 s, M=1.2489(7)

Abstand zwischen den Sternen nur 800,000 km
Orbitale Periode: 147 Minuten

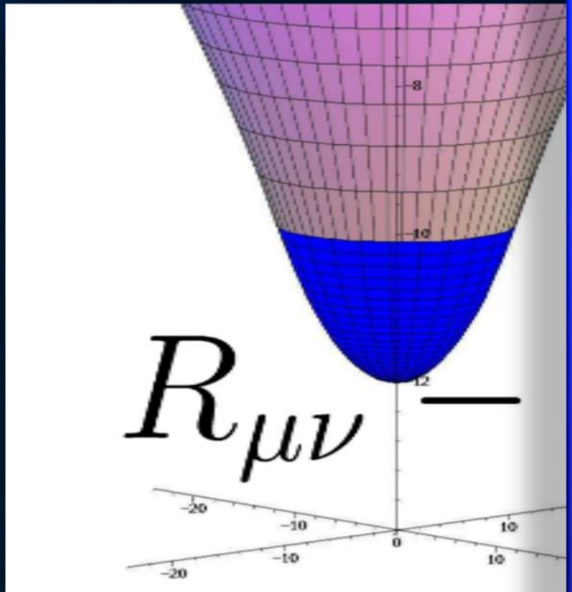
Abstand verkleinert sich langsam aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen

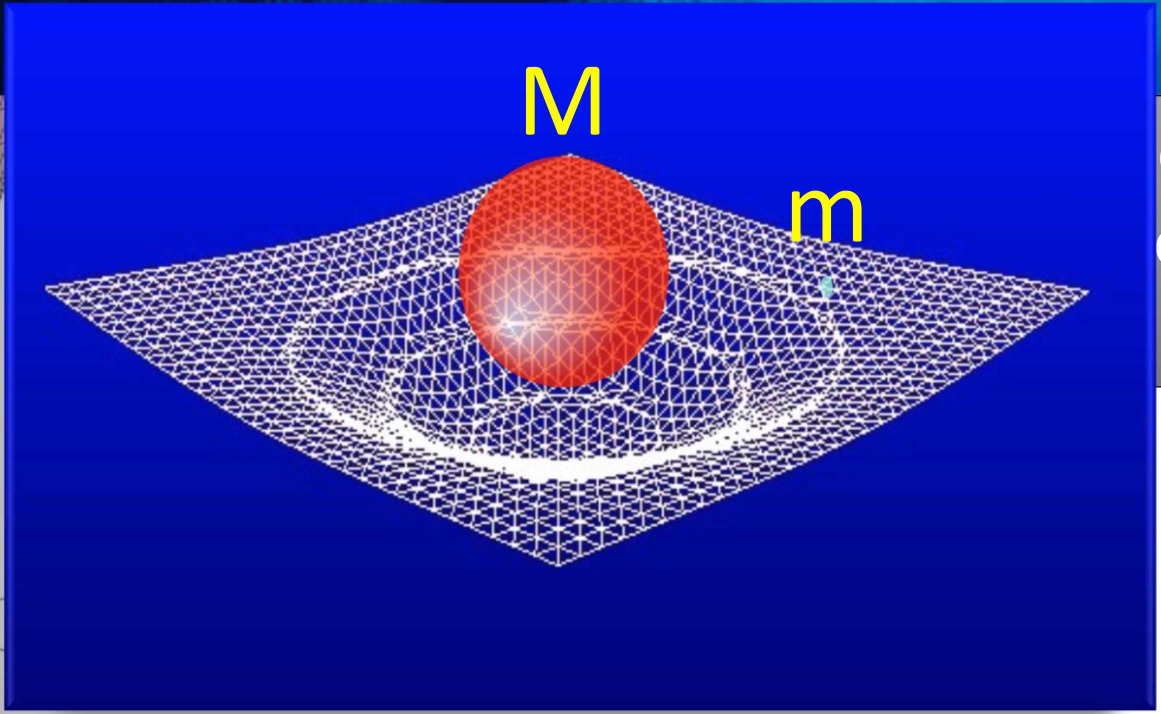
Die beiden Neutronensterne werden erst in 85 Millionen Jahren kollidieren

Kramer, Wex, Class. Quantum Grav. 2009

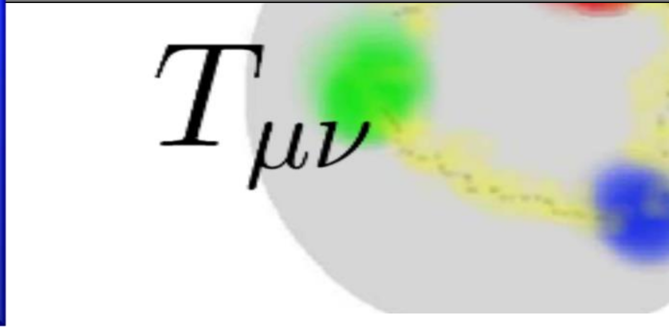
McGill NCS Multimedia Services Animation by Daniel Cantin, DarwinDimensions)

Allgemeinen Relativitätstheorie
Die Einsteingleichung





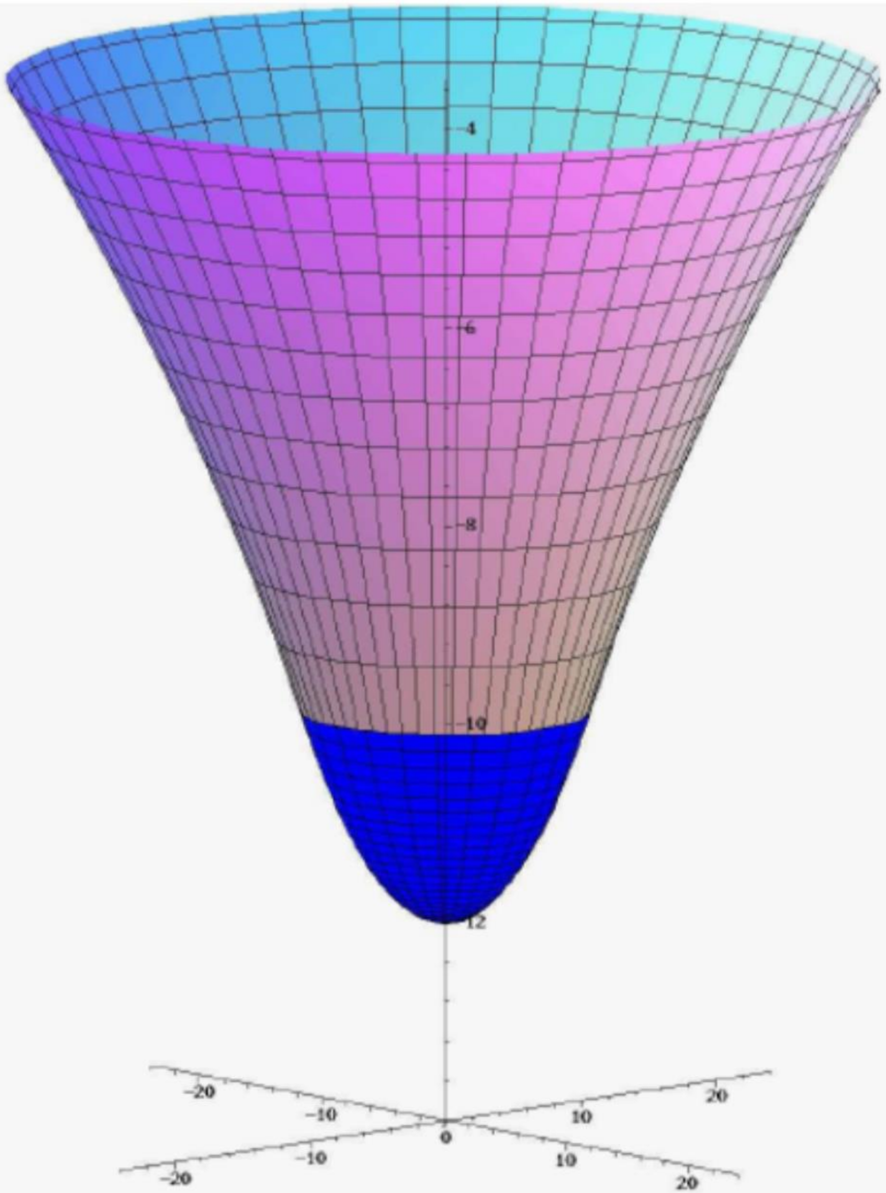
ellte Albert Einstein
orie“ (ART) der



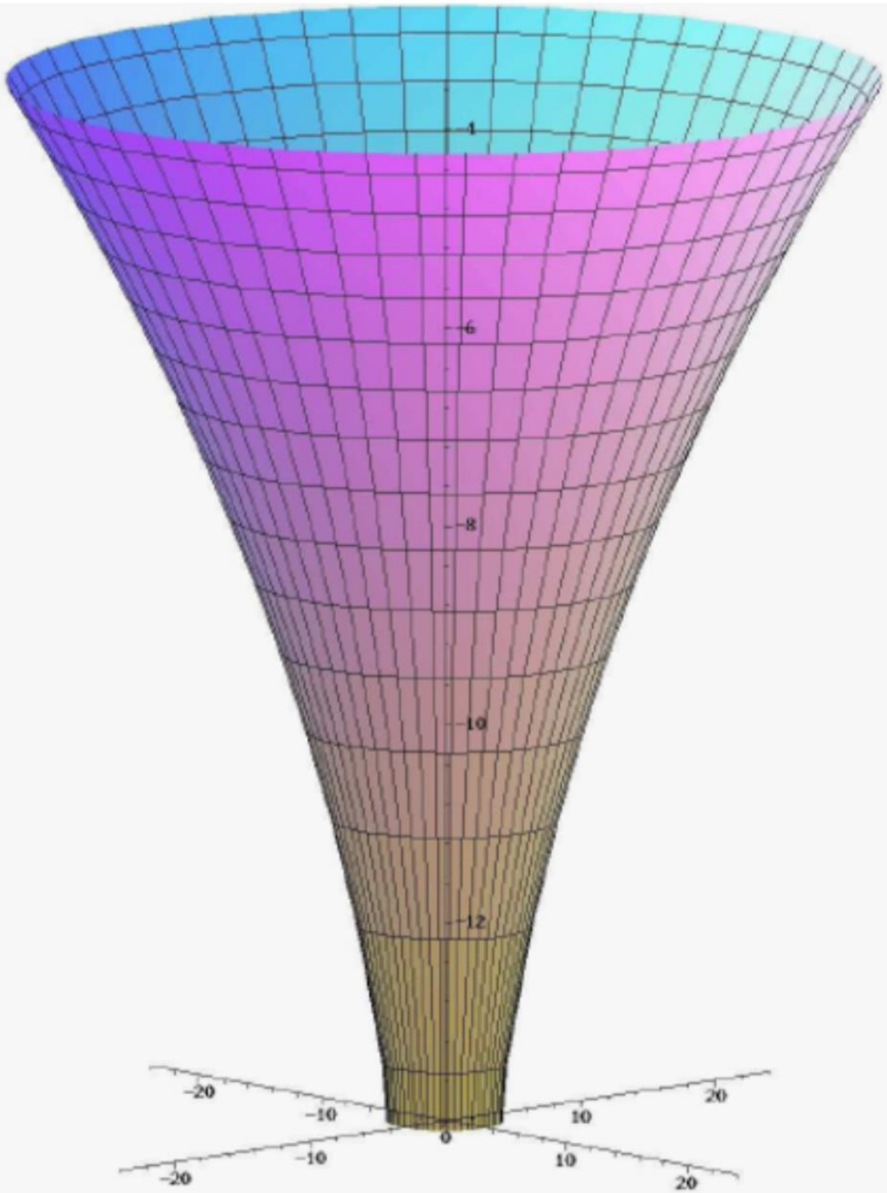
Raumzeit-Krümmung = Energie

Die ART ist eine sehr revolutionäre Theorie. Sie besagt, dass jegliche Energieformen (z.B. Masse der Erde) die „Raumzeit“ verbiegen und durch diese Krümmung des Raumes und der Zeit resultiert die Gravitationkraft (Schwerkraft).

Neutronenstern



Schwarzes Loch



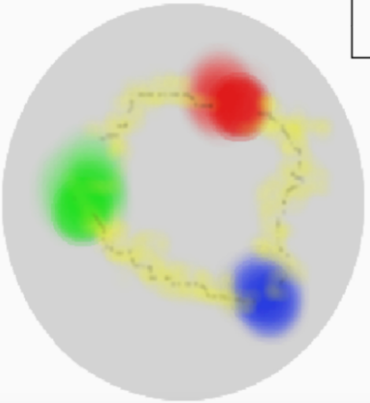
The Einstein Equation

ART	Yang-Mills-Theories
$D_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} v^\sigma$	$D_{\beta a}{}^b = \partial_\beta 1_a{}^b + ig A_{\beta a}{}^b$
$R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} v^\mu = [D_\alpha, D_\beta] v^\delta$ $R^\delta{}_{\mu\alpha\beta} = \Gamma^\delta_{\mu\alpha\vert\beta} - \Gamma^\delta_{\mu\beta\vert\alpha}$ $+\Gamma^\delta_{\nu\beta}\Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\delta_{\nu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\beta}$	$F_{\alpha\beta a}{}^b = \frac{1}{ig}\left[D_{\alpha a}{}^c, D_{\beta c}{}^b\right]$ $= A_{\beta a}{}^b{}_{\vert\alpha} - A_{\alpha a}{}^b{}_{\vert\beta}$ $+\frac{1}{ig}\left[A_{\alpha a}{}^c, A_{\beta c}{}^b\right]$
$\mathcal{L}_G = R + \underbrace{(c_1 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \ldots)}_{\equiv 0 \text{ for ART}}$	$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu a}{}^b F^{\mu\nu}{}_a{}^b$

QuantumCromoDynamic:

($SU(3)_{(c)}$- Color Yang-Mills-Gauge Theory)

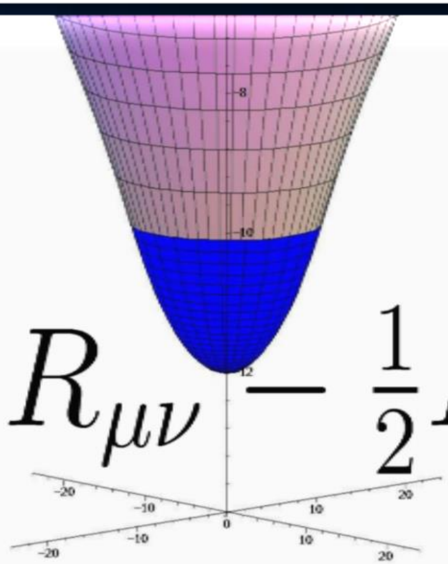
$$\boxed{\begin{array}{c} D_{\beta A}{}^B = \partial_\beta 1_A{}^B + ig\, G_{\beta A}{}^B \\ {}_A,{}^B = \text{red, green, blue} \end{array}}$$



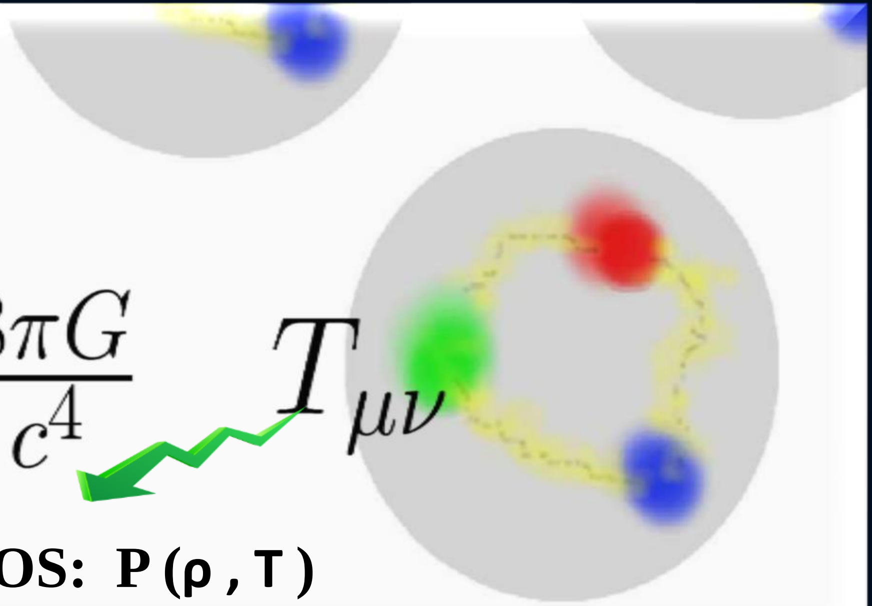
$$\psi^f_A = \begin{pmatrix} \psi^f_r \\ \psi^f_g \\ \psi^f_b \end{pmatrix}$$

Confinement

chiral symmetry, ...

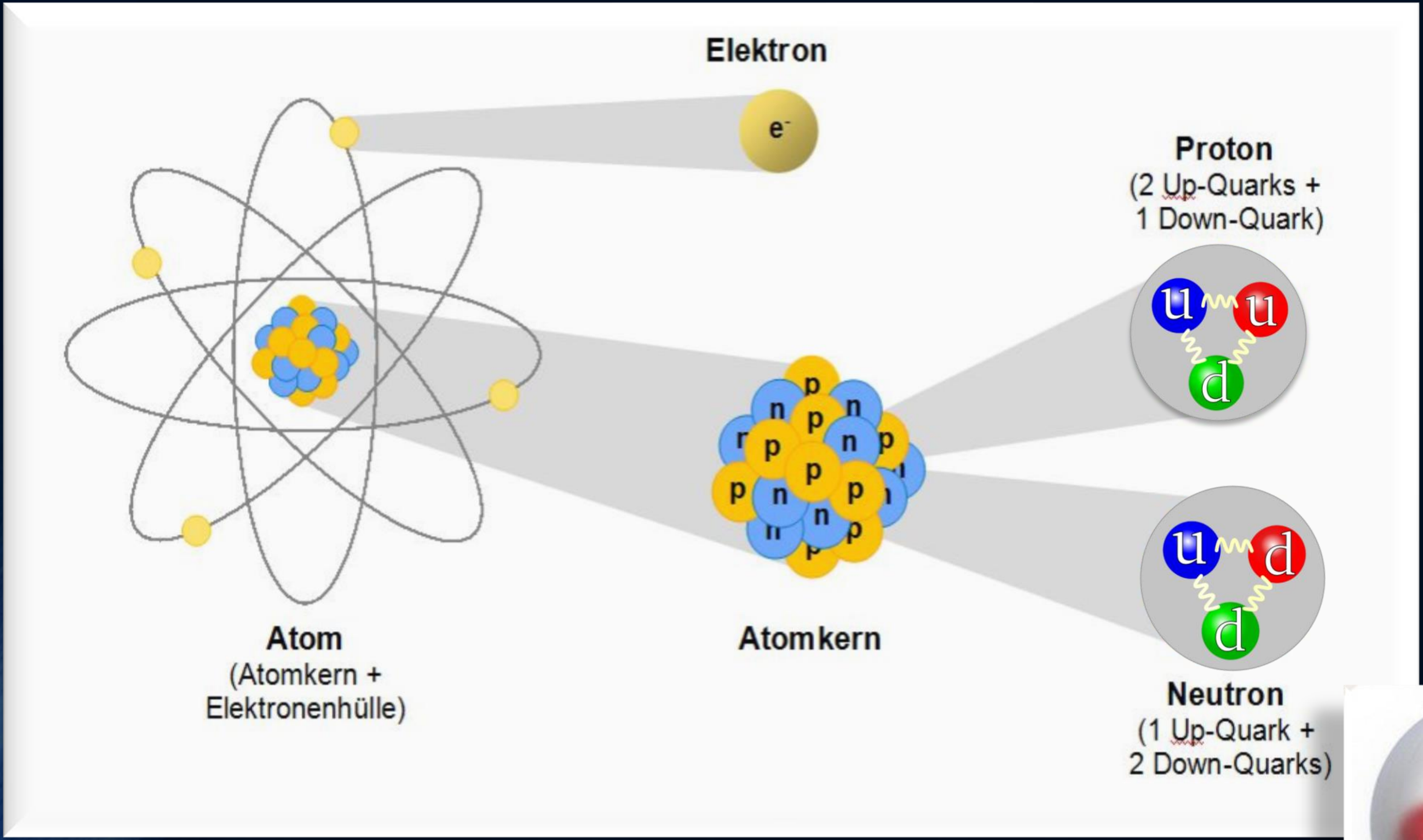


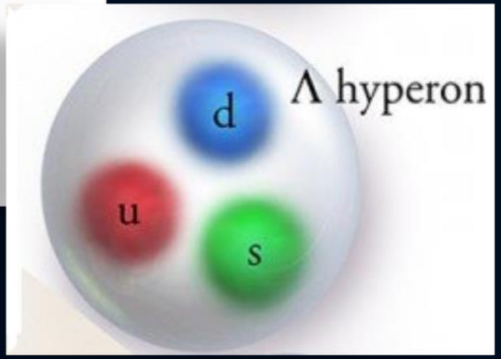
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



EOS: P (ρ , T)

Elementare Materie





Bei sehr hohen Dichten oder Temperaturen können auch **Hyperonen** entstehen

Die Zustandsgleichung der Materie und das Quark-Gluon-Plasma

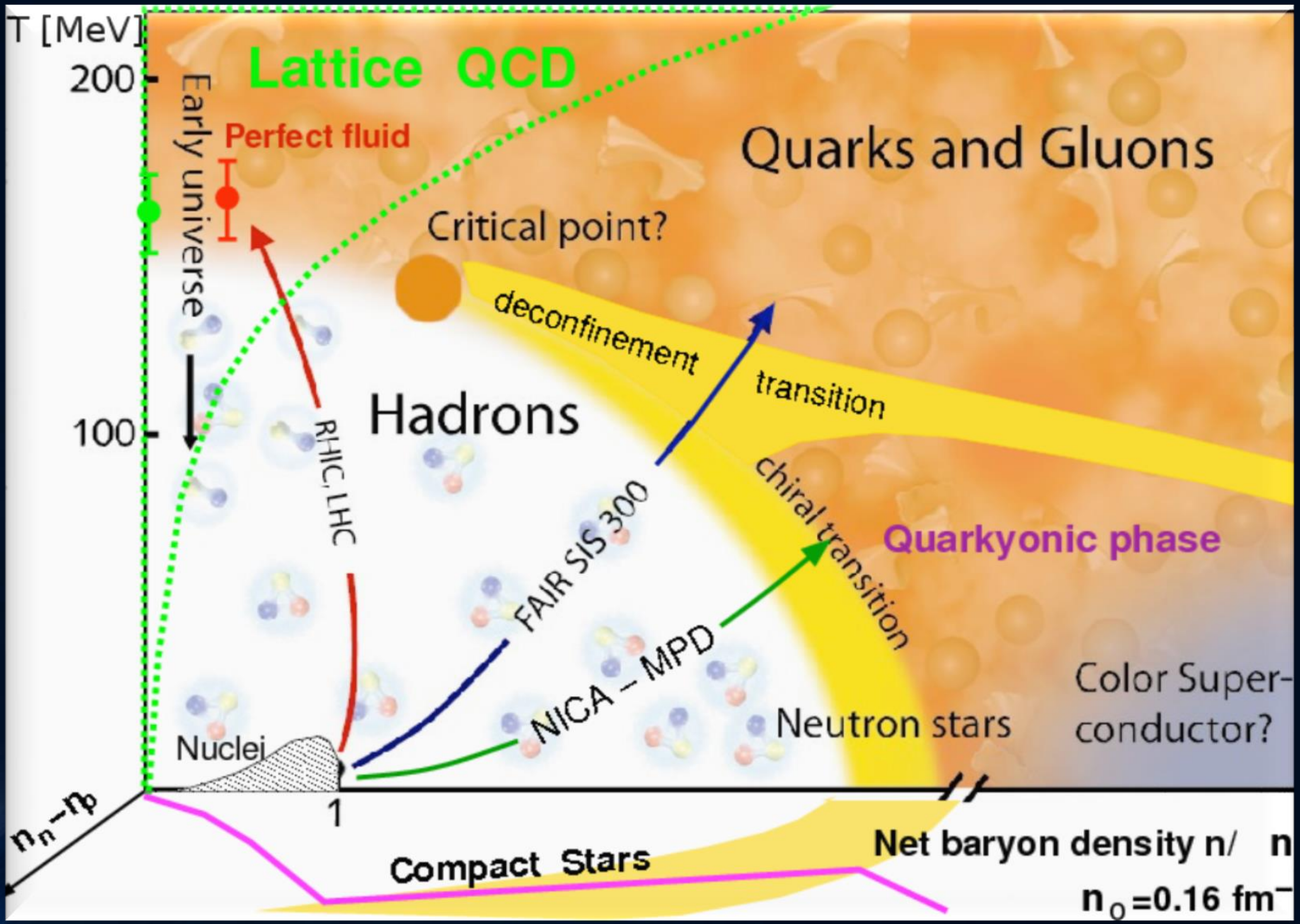
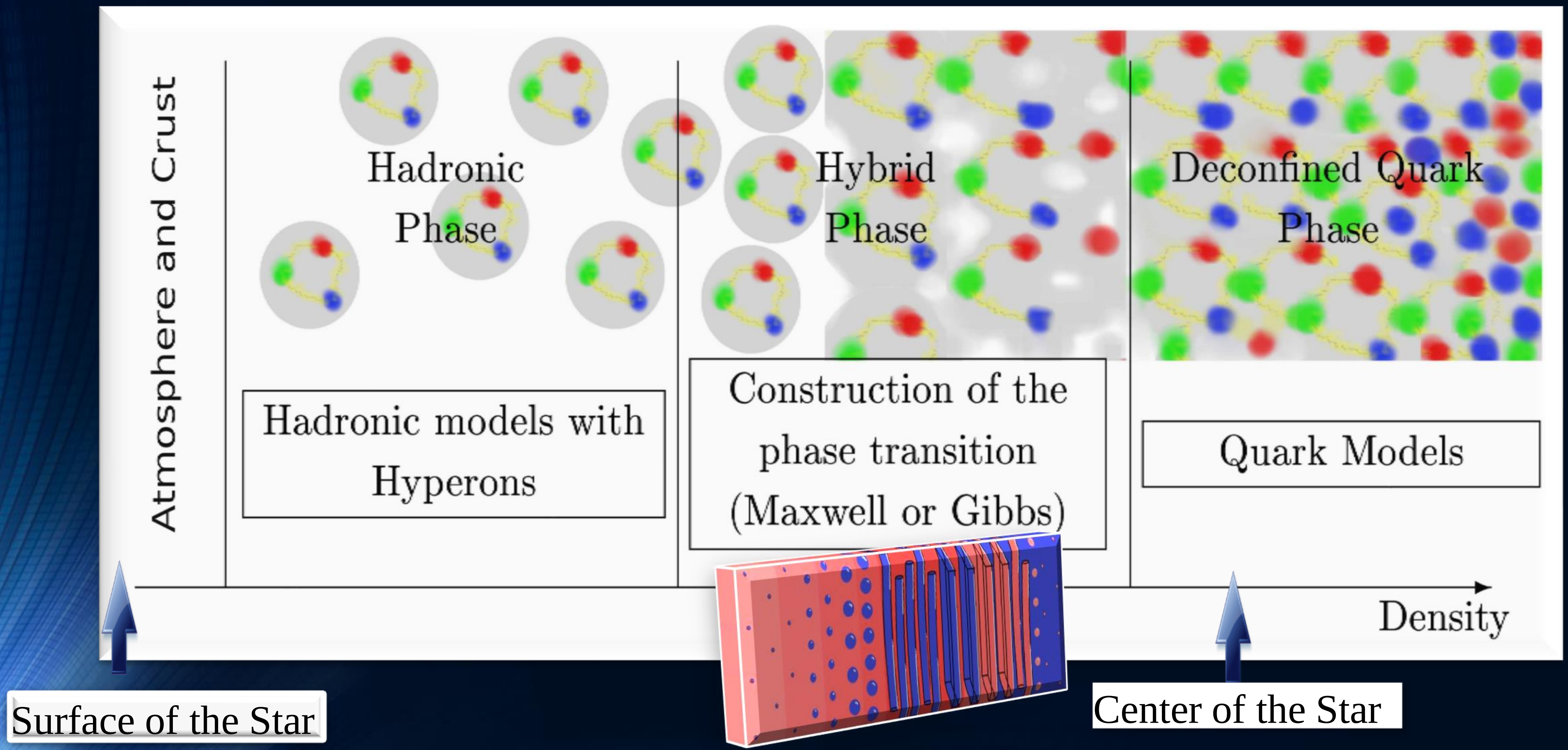


Image from http://inspirehep.net/record/823172/files/phd_qgp3D_quarkyonic2.png

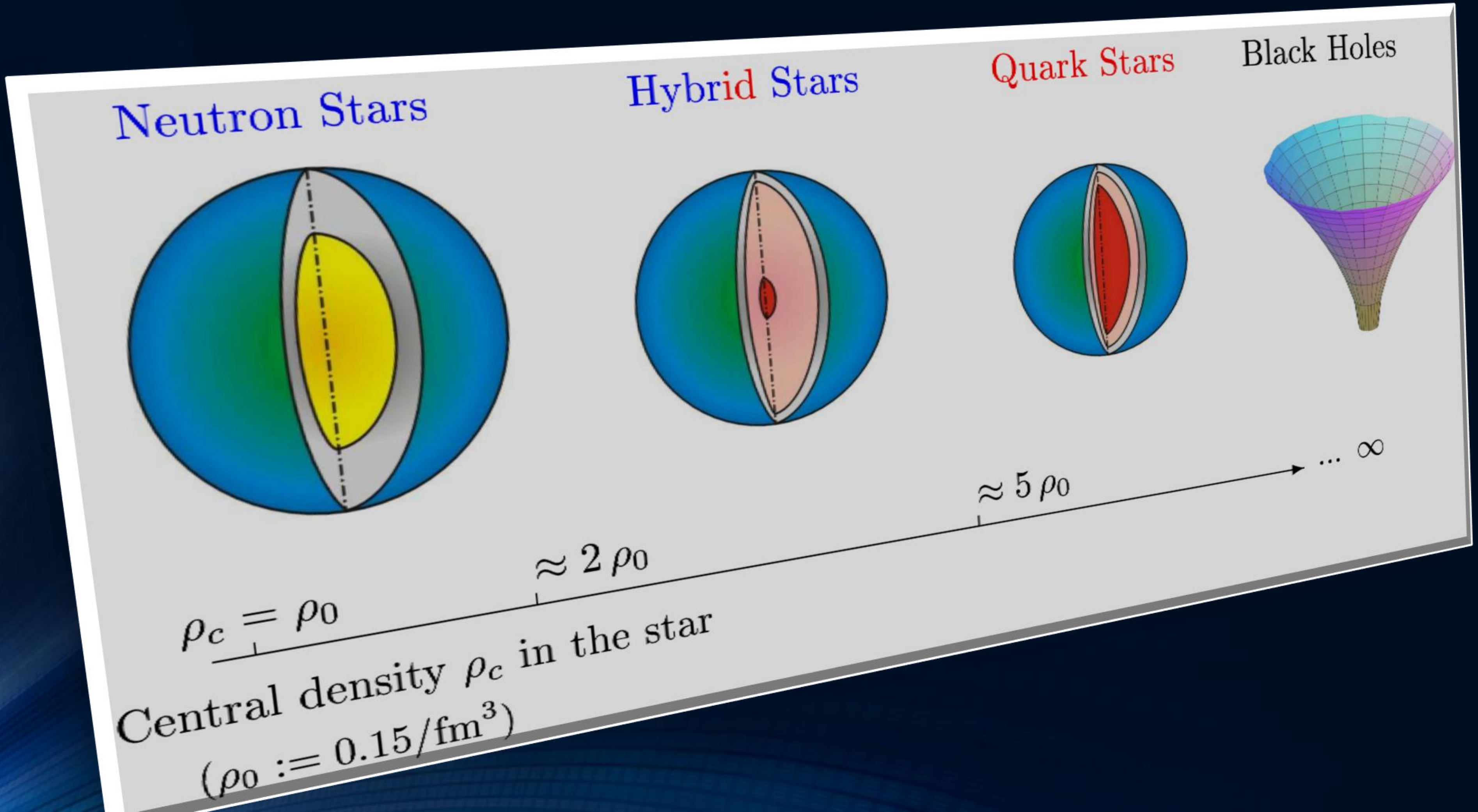
The QCD – Phase Transition and the Interior of a Hybrid Star



See: *Stable hybrid stars within a SU(3) Quark-Meson-Model*,
A.Zacchi, M.Hanauske, J.Schaffner-Bielich, PRD 93, 065011 (2016)

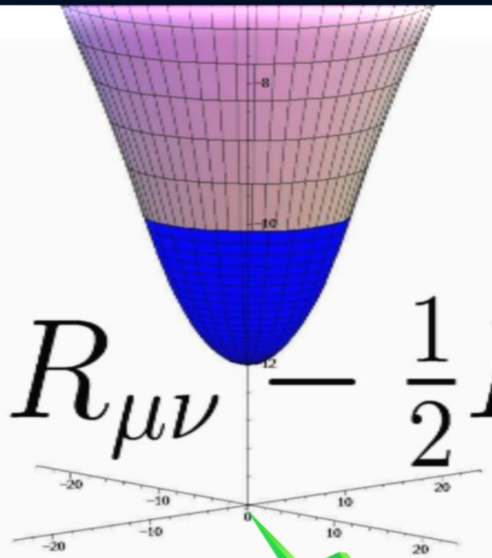
Neutronensterne, Quarksterne und schwarze Löcher

Bei welcher Dichte der Phasenübergang zum Quark-Gluon-Plasma einsetzt und welche Eigenschaften dieser Übergang im Detail hat ist weitgehend unbekannt. Theoretische Modellierung mittels unterschiedlicher effektiver Elementarteilchenmodelle.

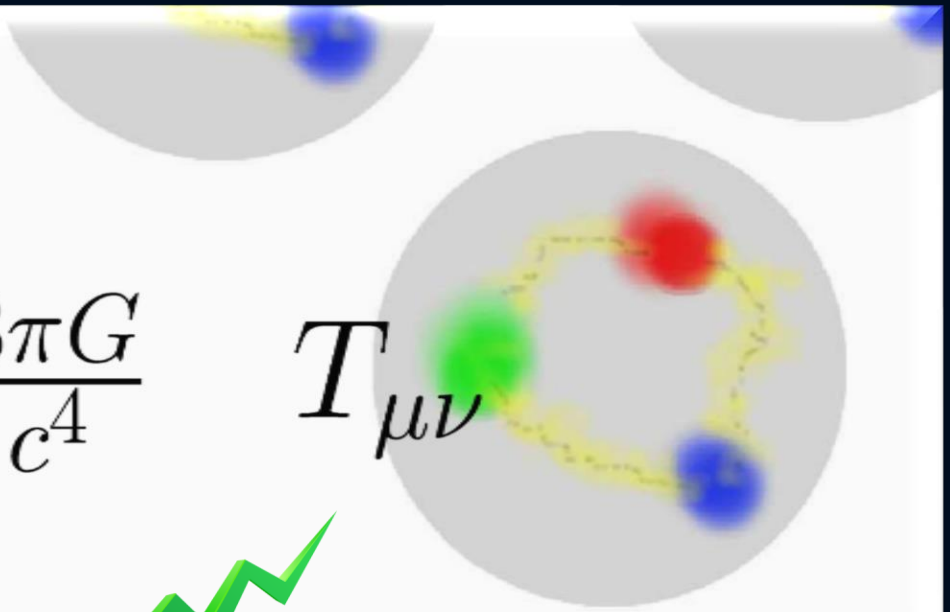


Die Einstein Gleichung

Vor etwa 100 Jahren präsentierte Albert Einstein die Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie – die sogenannte **Einstein-Gleichung**:



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



<u>Raumzeitkrümmung</u>
Eigenschaften der Metrik
der Raumzeit

<u>Masse, Energie und Impuls des Systems</u>
Zustandsgleichung der Materie
Druck (Dichte , Temperatur)

From the Einstein equation to the TOV equation

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad . \tag{2.45}$$

Das Einsetzen dieses Ansatzes der Metrik in die Einsteingleichung

$$G^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} R \, g^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi\kappa T^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.46}$$

liefert das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} G^{t}{}_{t} &= \quad -e^{-\lambda}\left(\tfrac{1}{r^2} - \tfrac{\lambda^{|}}{r}\right) + \tfrac{1}{r^2} &&= 8\pi\kappa T^{t}{}_{t} \\ G^{r}{}_{r} &= \quad -e^{-\lambda}\left(\tfrac{1}{r^2} + \tfrac{\nu^{|}}{r}\right) + \tfrac{1}{r^2} &&= 8\pi\kappa T^{r}{}_{r} \\ G^{\theta}{}_{\theta} &= -\tfrac{e^{-\lambda}}{2}\left(\nu^{||} - \tfrac{\lambda^{|}\nu^{|}}{2} + \tfrac{(\nu^{|})^2}{2} + \tfrac{\nu^{|} - \lambda^{|}}{r}\right) &&= 8\pi\kappa T^{\theta}{}_{\theta} \\ G^{\phi}{}_{\phi} &= \quad G^{\theta}{}_{\theta} &&= 8\pi\kappa T^{\phi}{}_{\phi} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Der Energie-Impuls Tensor

$1..3, i \neq j$) vernachlässigen. Der Energieimpulstensor $T^{\mu\nu}$ einer solchen idealen Flüssigkeit, lokal betrachtet an seinem Ort, kann wie folgt geschrieben werden

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P \quad \text{mit: } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad , \tag{2.48}$$

wobei u^μ die 4er Geschwindigkeit der Materie ist, τ die lokale Eigenzeit an einem betrachteten Materiepunkt beschreibt ($d\tau = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{tt}}\, dt$, t ist die Koordinatenzeit eines unendlich entfernten Beobachters), ϵ die Energiedichte und P der Druck der Materie ist.

Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung

als die **Tollman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen**

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dr} &= -\frac{(\epsilon + P)4\pi r^3 + m}{r(r-2\,m)} \\
m(r) &= \int_0^r 4\pi\tilde{r}^2\epsilon(\tilde{r})\;d\tilde{r} \qquad (2.61) \\
\frac{d\nu}{dr} &= \frac{8\pi P r^3 + 2\,m}{r(r-2\,m)} \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei die raumzeitliche Struktur durch die folgenden Ausdrücke bestimmt ist

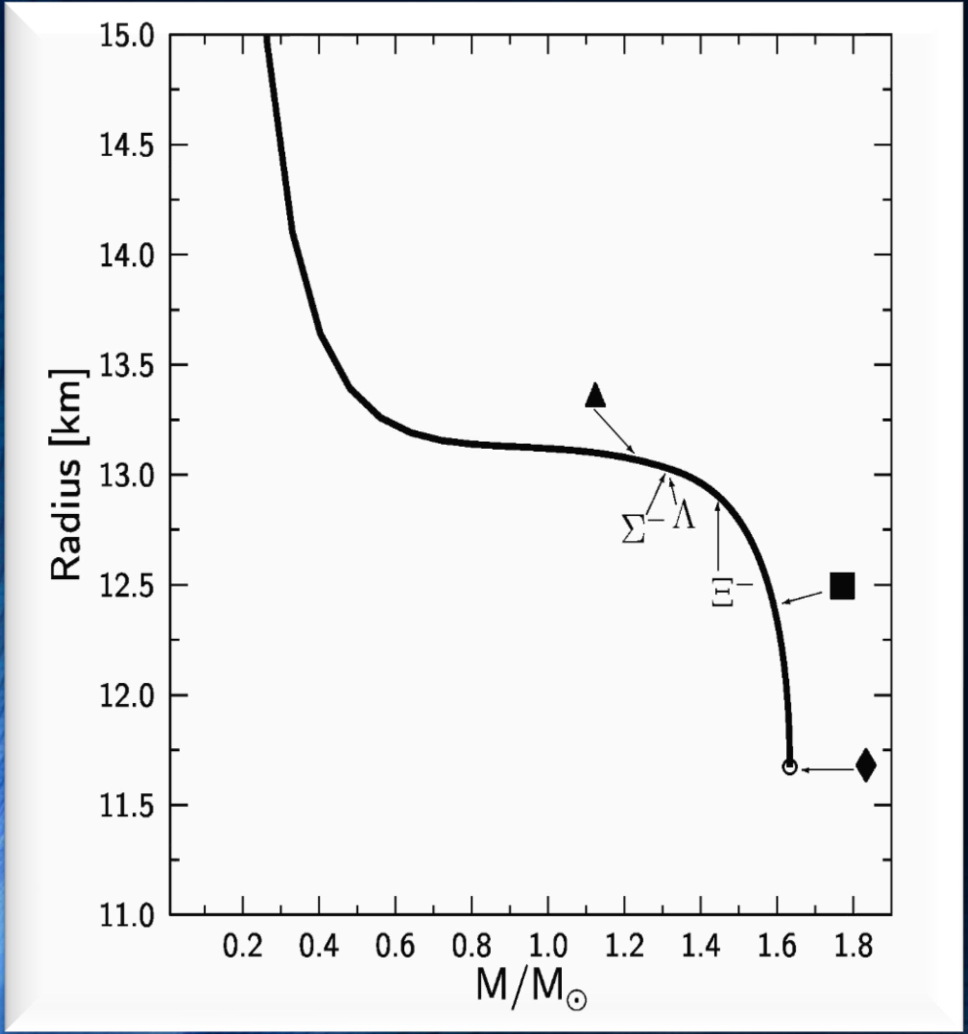
$$
g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2\,m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}
$$

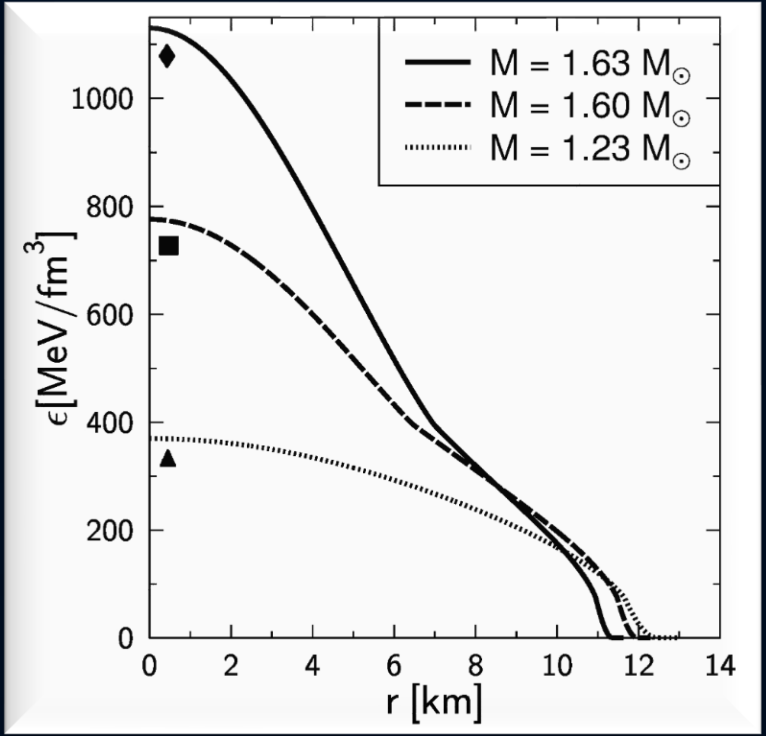
$$
ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - \left(1-\frac{2\,m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \;.
$$

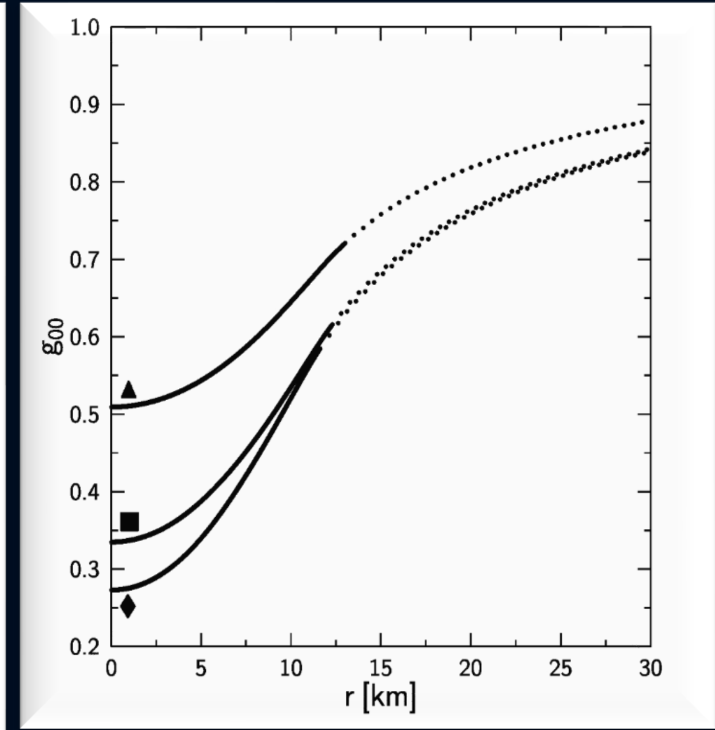
Neutron Star Properties

Left: The neutron star radius as a function of its mass. A low, middle and high density star is displayed within the figure. Additionally the onset of hyperonic particles is visualized.

Middle: Energy density profiles of three neutron stars with different central densities and masses. The low density stars do not contain any hyperons, whereas the other two stars do have hyperons in their inner core.







Right: Time-time component of the metric tensor as a function of the radial coordinate. The solid line corresponds to the inner TOV-solution, whereas the doted curve depicts the outer Schwarzschild part.

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

4. Vorlesung

Einführung

In den folgenden drei Vorlesungen wurde die Geodätengleichung in vorgegebener Schwarzschild Raumzeit für unterschiedliche Anfangsbedingungen numerisch analysiert. Die raumzeitliche Struktur, die Metrik, wurde hierbei als gegeben vorausgesetzt. In der folgenden Vorlesung betrachteten wir nun wie man die Metrik bei vorgegebener Materieverteilung berechnet. Die zugrundeliegende Gleichung die es hier zu lösen gilt ist die Einstein Gleichung.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R \; = \; -\, 8\pi\, T_{\mu\nu}$$

Die innere Schwarzschildlösung eines sphärisch symetrischen, statischen Objektes (z.B. Erde, Neutronenstern)

Im folgenden wird die Einsteingleichung einer sphärisch symetrischen und statischen Matrieverteilung betrachtet. Die Matrie wird hierbei als ideale Flüssigkeit angesetzt.

Von der Einstein Gleichung zur Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung (TOV)

```
>   restart:
 with( tensor ):
```

Wir definieren einen sphärisch symetrischen und statischen Ansatz der Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{mit:} \quad x^\mu = (t, r, \theta, \phi) \quad ,$$

wobei die Funktionen $\phi(r)$ und $m(r)$ an dieser Stelle noch unbekannt sind und keine physikalische Bedeutung besitzen.

```
>          coord := [t, r, theta, phi]:
 g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
         g_compts[1,1] := exp(2*phi(r)):
       #g_compts[2,2] := exp(2*lambda(r)):
```

Kovariante Form des Einsteintensors $G_{\mu\nu}$:

```
> G := Einstein( g, RICCI, RS );
```

$$
\begin{aligned}
G := table\Bigg(\Bigg[compts = \Bigg[\Bigg[&-\frac{2\, e^{2\,\phi(r)} \left(\frac{d}{dr} m(r)\right)}{r^2}, 0, 0, 0\Bigg],\\
\Bigg[&0, -\frac{2\left(2\, r \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) m(r) + m(r) - \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) r^2\right)}{r^2\,(-r + 2\, m(r))}, 0, 0\Bigg],\\
\Bigg[&0, 0, \frac{1}{r}\Bigg(-\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) r^2 + r\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) m(r) + \left(\frac{d}{dr} m(r)\right) r - m(r)\\
&- \left(\frac{d^2}{dr^2}\phi(r)\right) r^3 + \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)\left(\frac{d}{dr} m(r)\right) r^2 + 2\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)^2 r^2\, m(r)\\
&+ 2\left(\frac{d^2}{dr^2}\phi(r)\right) r^2\, m(r) - \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)^2 r^3\Bigg), 0\Bigg],\\
\Bigg[&0, 0, 0, -\frac{1}{r}\Bigg(\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) r^2 - \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) r^2 \cos(\theta)^2 - r\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) m(r)\\
&+ r\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) m(r)\cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr} m(r)\right) r + \left(\frac{d}{dr} m(r)\right) r\cos(\theta)^2 + m(r)\\
&- m(r)\cos(\theta)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2}\phi(r)\right) r^3 - \left(\frac{d^2}{dr^2}\phi(r)\right) r^3 \cos(\theta)^2\\
&- \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)\left(\frac{d}{dr} m(r)\right) r^2 + \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)\left(\frac{d}{dr} m(r)\right) r^2 \cos(\theta)^2\\
&- 2\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)^2 r^2\, m(r) + 2\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)^2 r^2\, m(r)\cos(\theta)^2\\
&- 2\left(\frac{d^2}{dr^2}\phi(r)\right) r^2\, m(r) + 2\left(\frac{d^2}{dr^2}\phi(r)\right) r^2\, m(r)\cos(\theta)^2 + \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)^2 r^3\\
&- \left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)^2 r^3 \cos(\theta)^2\Bigg)\Bigg]\Bigg], index\_char = [-1, -1]\Bigg]\Bigg)
\end{aligned}
\tag{2.1.3}
$$

Der Energie-Impuls Tensor (rechte Seite der Einsteingleichung) wird als ideale Flüssigkeit angesetzt:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei die Funktionen $e(r)$ und $p(r)$ die Energiedichte und den Druck der Neutronensternmaterie darstellen, die ihrerseits über die Zustandsgleichung $p(e)$ miteinander verknüpft sind.

```
> T:=create([1,-1], array([[e(r),0,0,0],[0,-p(r),0,0],[0,0,-p(r),0],[0,0,0,-p(r)]]));
  Tl:=lower(g,T,1);
  Tu:=raise(ginv,T,2):
  prod(ginv, Tl, [2, 1]):
  contract(T, [1, 2]):
```

$$T := table\left(\left[compts = \begin{bmatrix} e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(r) \end{bmatrix}, index\_char = [1, -1]\right]\right)$$

$$Tl := table\left(\left[compts = \begin{bmatrix} e^{2\,\phi(r)}\, e(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r\, p(r)}{-r + 2\, m(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\, p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2\, p(r) \end{bmatrix}, \right.\right. \tag{2.1.4}$$

$$\left.\left. index\_char = [-1, -1] \right]\right)$$

Wir definieren die Einsteingleichung in der folgenden Form:

$$G_{\mu\nu} + 8\pi\, T_{\mu\nu} = 0$$

```
> Einsteingl:=lin_com(G,8*Pi,Tl);
```

$$
\begin{aligned}
&Einsteingl := table\Bigg(\Bigg[compts = \Bigg[\Bigg[-\frac{2\,e^{2\,\phi(r)}\left(\frac{d}{dr}\,m(r) - 4\,\pi\,e(r)\,r^2\right)}{r^2}, 0, 0, 0\Bigg],\\
&\Bigg[0, -\frac{2\left(2\,r\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)m(r) + m(r) - \left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)r^2 + 4\,\pi\,r^3\,p(r)\right)}{r^2\,(-r + 2\,m(r))}, 0, 0\Bigg],\\
&\Bigg[0, 0, \frac{1}{r}\Bigg(-\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)r^2 + r\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)m(r) + \left(\frac{d}{dr}\,m(r)\right)r - m(r)\\
&- \left(\frac{d^2}{dr^2}\,\phi(r)\right)r^3 + \left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\,m(r)\right)r^2 + 2\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)^2 r^2\,m(r)\\
&+ 2\left(\frac{d^2}{dr^2}\,\phi(r)\right)r^2\,m(r) - \left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)^2 r^3 + 8\,\pi\,r^3\,p(r)\Bigg), 0\Bigg],\\
&\Bigg[0, 0, 0, -\frac{1}{r}\Bigg(\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)r^2 - \left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)r^2\cos(\theta)^2 - r\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)m(r)\\
&+ r\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)m(r)\cos(\theta)^2 - \left(\frac{d}{dr}\,m(r)\right)r + \left(\frac{d}{dr}\,m(r)\right)r\cos(\theta)^2 + m(r)\\
&- m(r)\cos(\theta)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2}\,\phi(r)\right)r^3 - \left(\frac{d^2}{dr^2}\,\phi(r)\right)r^3\cos(\theta)^2\\
&- \left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\,m(r)\right)r^2 + \left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\,m(r)\right)r^2\cos(\theta)^2\\
&- 2\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)^2 r^2\,m(r) + 2\left(\frac{d}{dr}\,\phi(r)\right)^2 r^2\,m(r)\cos(\theta)^2
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

```
> A:=get_compts(Einsteingl):
```

Aufgrund der angenommenen Symmetrie ist die Einsteingleichung ein System von 4 gekoppelten Differentialgleichungen. Im folgenden lösen wir die erste Gleichung der Einsteingleichung (tt-Komponente) nach $\frac{dm}{dr}$ und die zweite Gleichung (rr-Komponente) nach $\frac{d\phi}{dr}$ auf.

```
>  Einstein1:=diff(m(r), r)=solve(A[1,1],diff(m(r), r));
 Einstein2:=diff(phi(r),r)=solve(A[2,2],diff(phi(r),r));
```

$$Einstein1 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, m(r) = 4\,\pi\, e(r)\, r^2$$

$$Einstein2 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, \phi(r) = -\frac{m(r) + 4\,\pi\, r^3\, p(r)}{r\,(-r + 2\, m(r))} \tag{2.1.6}$$

Aus der Einsteingleichung folgt die Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen (kovariante Erhaltung des Energie-Impulses) sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert (Bemerke: in der Literatur wird die kovariante Ableitung mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet):

Aus der Einsteingleichung folgt die Erhaltung des Energie-Impulses. Diese sogenannten hydrodynamischen Gleichungen (kovariante Erhaltung des Energie-Impulses) sind durch die folgenden vier Gleichungen definiert (Bemerke: in der Literatur wird die kovariante Ableitung mit unterschiedlichen Symbolen bezeichnet):

$$\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = D_\mu G^\mu{}_\nu = G^\mu{}_{\nu\,||\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad .$$

wobei die kovariante Ableitung eines Tensors zweiter Stufe wie folgt definiert ist:

$$\nabla_\alpha T^\mu{}_\nu = \partial_\alpha T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} T^\rho{}_\nu - \Gamma^\rho_{\alpha\nu} T^\mu{}_\rho \quad ,$$

```
>        DT:=cov_diff(T, coord, Cf2):
 DTa:=get_compts(contract(DT, [1, 3]))[2]=0;
```

$$DTa := -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\phi(r)\right) p(r) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\phi(r)\right) e(r) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,p(r)\right) = 0 \qquad (2.1.7)$$

und nach $\frac{dp}{dr}$ aufgelöst ergibt sich das folgende:

und nach $\frac{dp}{dr}$ aufgelöst ergibt sich das folgende:

```
> diff(p(r), r)=collect(solve(DTa,diff(p(r), r)),diff(phi(r), r));
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,p(r) = (-e(r) - p(r))\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\phi(r)\right) \tag{2.1.8}$$

Die TOV-Gleichung erhalten wir, indem man diese Gleichung nach $\frac{d\phi}{dr}$ auflöst und das Ergebnis in die zweite Gleichung der Einsteingleichung einsetzt:

```
> solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*(e(r)+p(r))*(-1);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,p(r) = \frac{\left(m(r) + 4\,\pi\,r^3\,p(r)\right)\,\left(e(r) + p(r)\right)}{r\,(-r + 2\,m(r))} \tag{2.1.9}$$

```
> TOV1:=solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*(e(r)+p(r))*(-1);
                        TOV2:=Einstein1;
                        TOV3:=Einstein2;
```

$$TOV1 := \frac{d}{dr}\, p(r) = \frac{\left(m(r) + 4\,\pi\, r^3\, p(r)\right)\,\left(e(r) + p(r)\right)}{r\,(-r + 2\, m(r))}$$

$$TOV2 := \frac{d}{dr}\, m(r) = 4\,\pi\, e(r)\, r^2$$

$$TOV3 := \frac{d}{dr}\, \phi(r) = -\frac{m(r) + 4\,\pi\, r^3\, p(r)}{r\,(-r + 2\, m(r))} \tag{2.1.10}$$

Das oben abgebildete System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen bezeichnet man als die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichungen (TOV-Gleichung). Bemerkung: In manchen Büchern werden auch lediglich die ersten beiden Gleichungen als TOV-Gleichungen bezeichnet.

Numerische Lösung der TOV-Gleichungen

Im folgenden werden die TOV-Gleichungen numerisch gelöst, indem wir einerseits eine Zustandsgleichung der Materie (eine Funktion p(e)) festlegen und von einem Startwert der zentralen Energiedichte im Inneren des sphärisch symetrischen Objektes nach Außen integrieren.

```
> a:=10;
  b:=5/3:
  p(r):=a*(e(r))^b;
  W3:=plot(a*x^b,x=0..1,color=blue):
  TOV1:=solve(DTa,diff(phi(r), r))*(e(r)+p(r))*(-1)=rhs(Einstein2)*
  (e(r)+p(r))*(-1);
  TOV2:=Einstein1;
  TOV3:=Einstein2;
```

$$a := 10$$

$$p(r) := 10\, e(r)^{5/3}$$

$$TOV1 := \frac{50}{3}\, e(r)^{2/3} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, e(r)\right) = \frac{\left(m(r) + 40\,\pi\, r^3\, e(r)^{5/3}\right)\left(10\, e(r)^{5/3} + e(r)\right)}{r\,(-r + 2\, m(r))}$$

$$TOV2 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, m(r) = 4\,\pi\, e(r)\, r^2$$

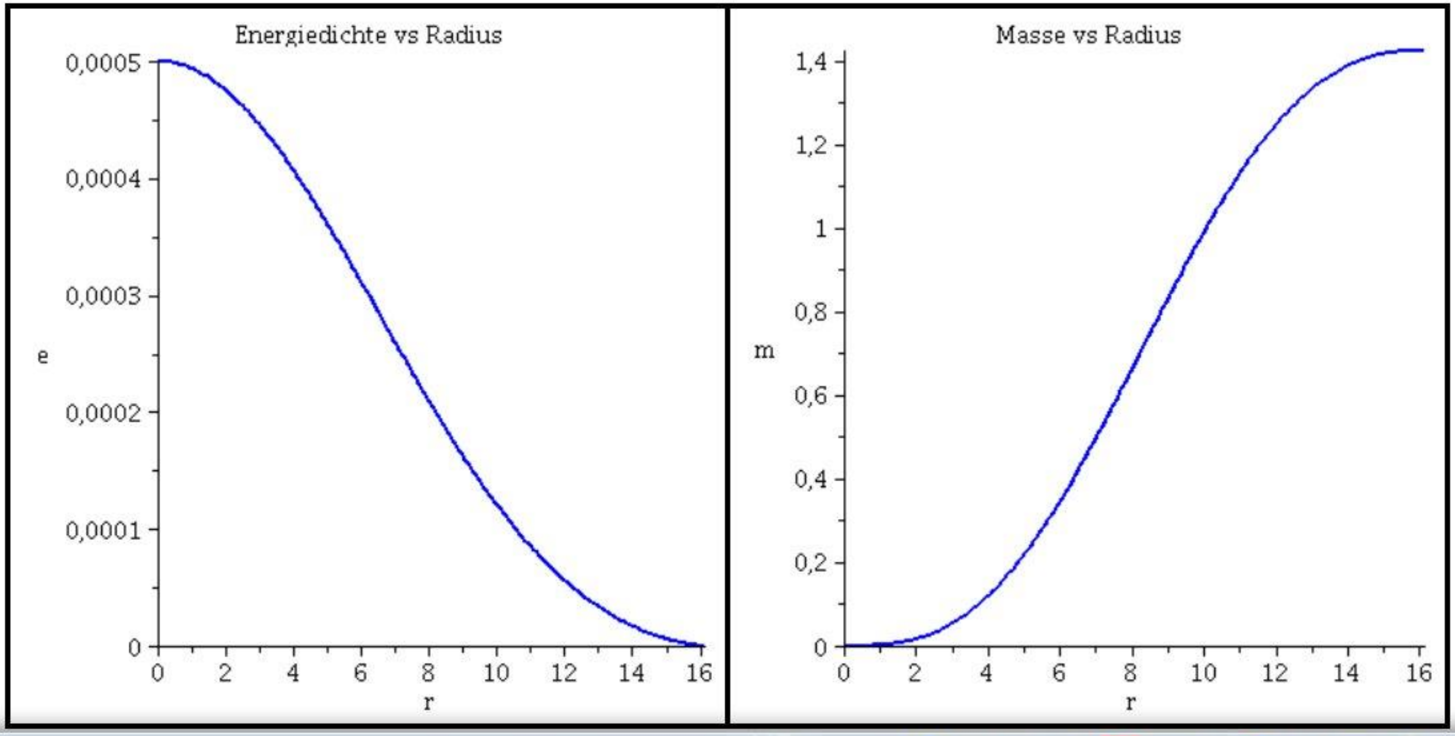
$$TOV3 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\, \phi(r) = -\frac{m(r) + 40\,\pi\, r^3\, e(r)^{5/3}}{r\,(-r + 2\, m(r))} \qquad (2.2.1)$$

Numerische Lösung der Gleichung mit fixierten Randbedingungen im Sternzentrum.

```
> r0:=10^(-14):
  e0:=0.0005;
  Loes:=dsolve({TOV1,TOV2,m(r0)=0,e(r0)=e0},
  {m(r),e(r)},type=numeric,output=listprocedure);
```

Darstellung der Energiedichte (e(r)) und der Sternmasse (m(r)) als Funktion des radialen Abstands r vom Sternzentrum:

```
> with(plots):
rend:=16.12487:
Plot1:=odeplot(Loes,[r,e(r)],r0..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Energiedichte vs Radius"):
Plot2:=odeplot(Loes,[r,m(r)],r0..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Masse vs Radius"):
display(Matrix(1,2,[Plot1,Plot2]));
```



Aufgrund des Birkov Theorems muss die Innenlösung der Metrik in die äussere Schwarzschildmetrik am Sternrand übergehen. Da wir nun die Gesamtmasse des Sterns kennen, können wir auch die innere g_{00} und g_{11} Komponente der Metrik angeben. Wir integrieren nun von der uns schon bekannten Sternoberfläche nach Innen bis r=0:

```
> Mass := subs(Loes,m(r)):
  M:=Mass(rend);
  Phi0:=(0.5*ln(1-2*Mass(rend)/rend)):
  Loes1:=dsolve({TOV1,TOV2,TOV3,m(rend)=Mass(rend),e(rend)=10^(-25),phi(rend)=Phi0},
  {m(r),e(r),phi(r)},type=numeric,output=listprocedure);
```

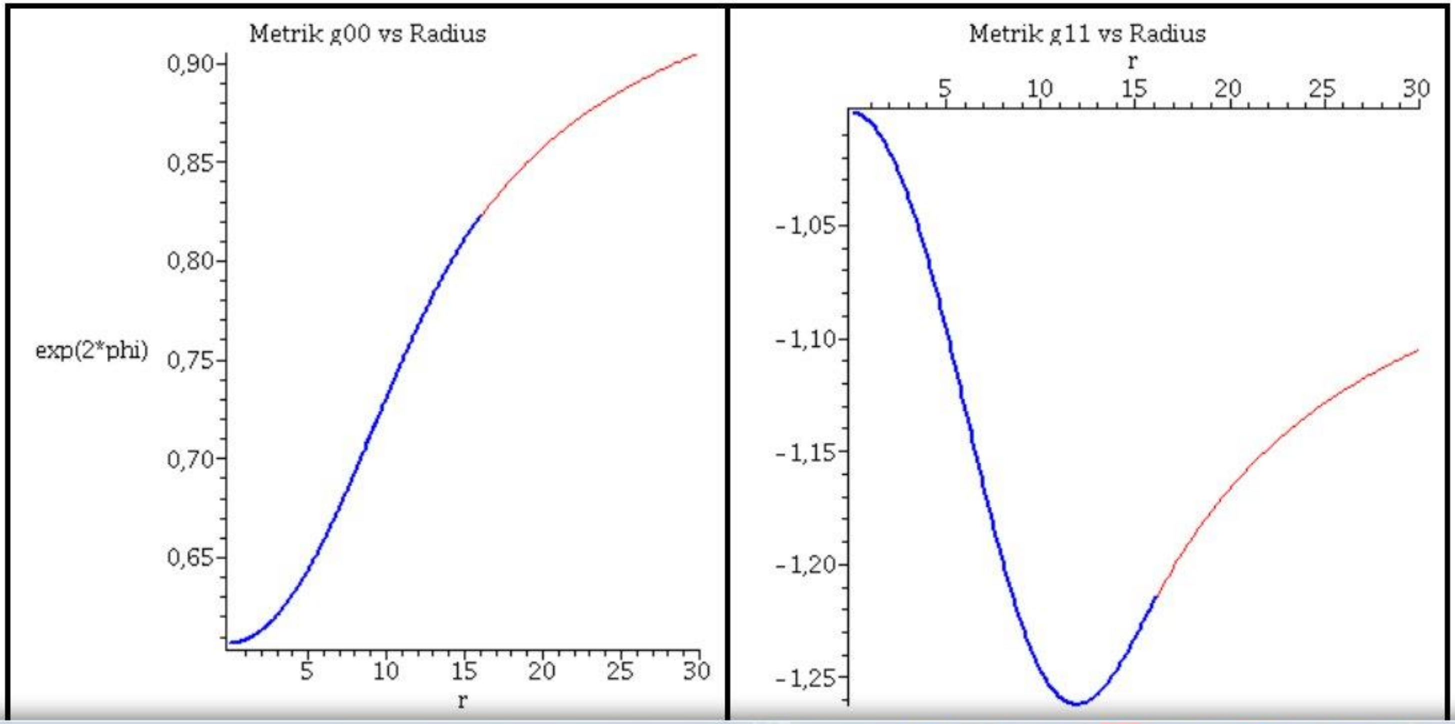
$$M := 1.42503619811206650$$

$$Loes1 := [r = \mathbf{proc}(r)\ \dots\ \mathbf{end\ proc},\ e(r) = \mathbf{proc}(r)\ \dots\ \mathbf{end\ proc},\ m(r) = \mathbf{proc}(r)\ \dots\ \mathbf{end\ proc},\ \phi(r) = \mathbf{proc}(r)\ \dots\ \mathbf{end\ proc}] \qquad (2.2.3)$$

Veranschaulichung der g_{00}-Komponente (linke Abbildung) und g_{11}-Komponente (rechte Abbildung) der Innenraummetrik (blaue Kurven) und Außenraummetrik (rote Kurven).

Veranschaulichung der g_{00}-Komponente (linke Abbildung) und g_{11}-Komponente (rechte Abbildung) der Innenraummetrik (blaue Kurven) und Außenraummetrik (rote Kurven).

```
> ranf:=10^(-1):
Plot3:=odeplot(Loes1,[r,exp(2*phi(r))],ranf..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Metrik g00 vs Radius"):
Plot4:=odeplot(Loes1,[r,-1/(1-2*m(r)/r)],ranf..rend,numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Metrik g11 vs Radius"):
Plot5:=plot(1-2*M/r,r=rend..30,color=red):
Plot6:=plot(-1/(1-2*M/r),r=rend..30,color=red):
display(Matrix(1,2,[[display(Plot3,Plot5),display(Plot4,Plot6)]]));
```



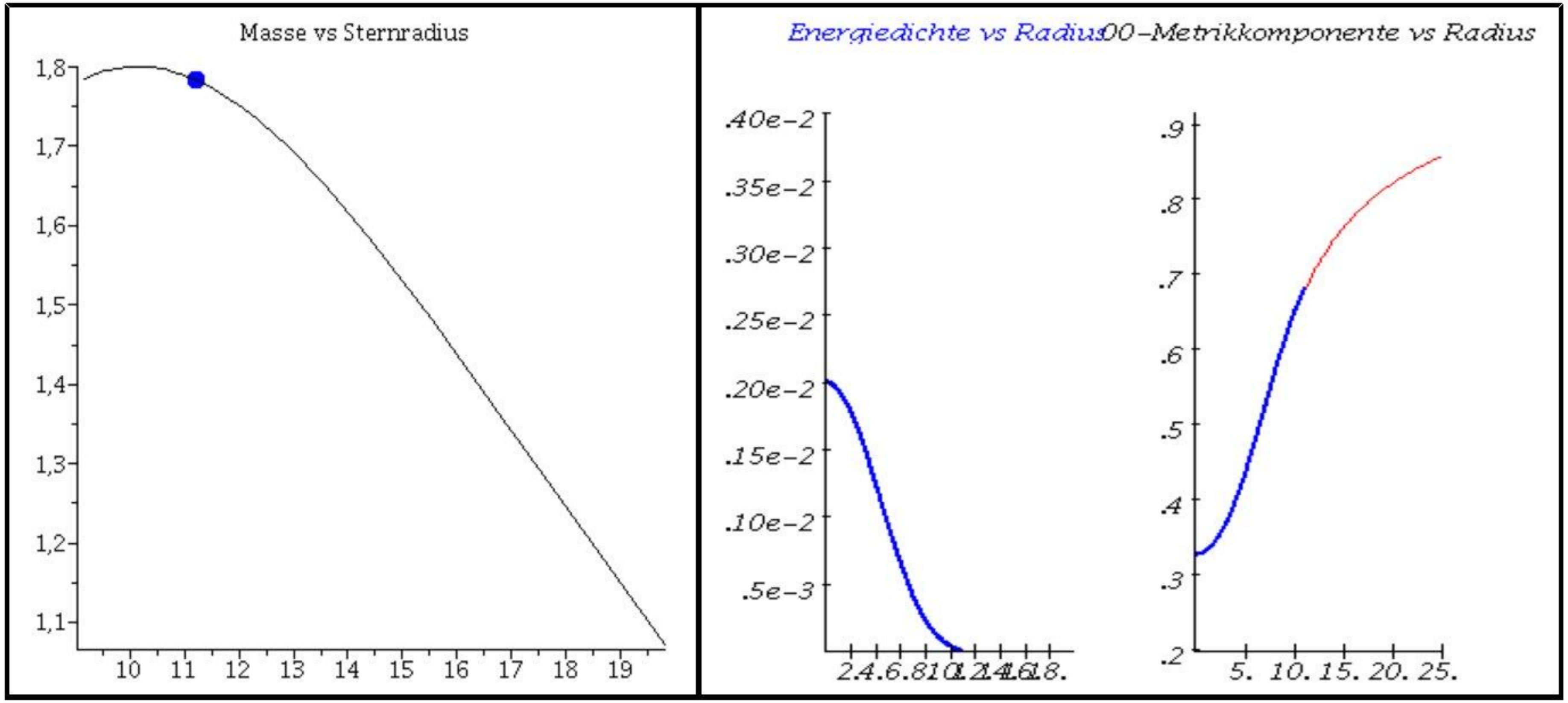
Masse-Radius Beziehung

Im folgenden wird eine Sequenz von Sternen mit unterschiedlichen zentralen Energiedichten-Werten berechnet. Trägt man die Gesamtmasse der einzelnen Sterne gegen deren Radius auf, so erhält man die Masse-Radius Beziehung. Jede Zustandsgleichung besitzt eine eigene Obergrenze, die sogenannte maximale Masse. Die Berechnung erfolgt durch eine for-Schleife über einen geeigneten zentralen Energiedichtebereich:

```
> r0:=10^(-14):
ranf:=10^(-1):
frames:=20:
for i from 1 by 1 to frames do
e0:=i*0.0002:
Loes:=dsolve({TOV1,TOV2,TOV3,m(r0)=0,e(r0)=e0,phi(r0)=0},{m(r),e(r),phi(r)},type=numeric,output=listprocedure):
energiedichte := subs(Loes,e(r)):
Mass := subs(Loes,m(r)):
PPhi := subs(Loes,phi(r)):
for rr from 1 by 0.0001 while energiedichte(rr)>10^(-10) do Radius[i]:=rr: end do:
Masse[i]:=Mass(Radius[i]);
Plot1[i]:=odeplot(Loes,[r,e(r)],r0..Radius[i],numpoints=200,color=blue,thickness=2,title="Energiedichte vs Radius",view=
[r0..20,0..0.004]):
Phi0:=(0.5*ln(1-2*Masse[i]/Radius[i])):
DPhi:=Phi0-PPhi(Radius[i]):
Plot3[i]:=odeplot(Loes,[r,exp(2*(phi(r)+DPhi))],r0..Radius[i],numpoints=200,color=blue,thickness=2,labels=[Radius,"00-
Metrikkomponente"],labeldirections=[horizontal, vertical],title="00-Metrikkomponente vs Radius"):
Plot5[i]:=plot(1-2*Masse[i]/r,r=Radius[i]..25,color=red):
Ani1[i]:=display(Matrix(1,2,[[Plot1[i],display(Plot3[i],Plot5[i])]]));
PointA[i]:=pointplot({[Radius[i], Masse[i]]}, symbol=solidcircle,symbolsize=23,color=blue):
od:
```

```
> MR:=listplot([seq([Radius[i], Masse[i]], i = 1 .. frames)],title="Masse vs Sternradius"):
for i from 1 by 1 to frames do
Ani2[i]:=display(PointA[i],MR);
od:
```

```
> Animat:=display([seq(Ani1[i],i=1..frames)],insequence=true):
  Animat1:=display([seq(Ani2[i],i=1..frames)],insequence=true):
              display(Array([Animat1,Animat]));
```



Weiße Zwerge, Neutronensterne und Quarksterne

Die zugrundeliegende Zustandsgleichung der Materie (die Funktion p(e)) zusammen mit dem Startwert der zentralen Energiedichte im Inneren des Sterns legen die Eigenschaften des Sterns fest. Weiße Zwerge haben eine viel geringere zentrale Energiedichte und ihre Zustandsgleichung wird durch den Elektronendruck verursacht. Bei Neutronen und Quarksternen ist die Zustandsgleichung maßgeblich durch den Druck der Neutronen bzw. der Quarks bestimmt. Im Teil 2 dieser Vorlesung werden wir die Eigenschaften dieser unterschiedlicher Sterne im Detail betrachten.

Literatur:

Sagert, Irina, Matthias Hempel, and Carsten Greiner. "Compact stars for undergraduates." European journal of physics 27.3 (2006): 577.

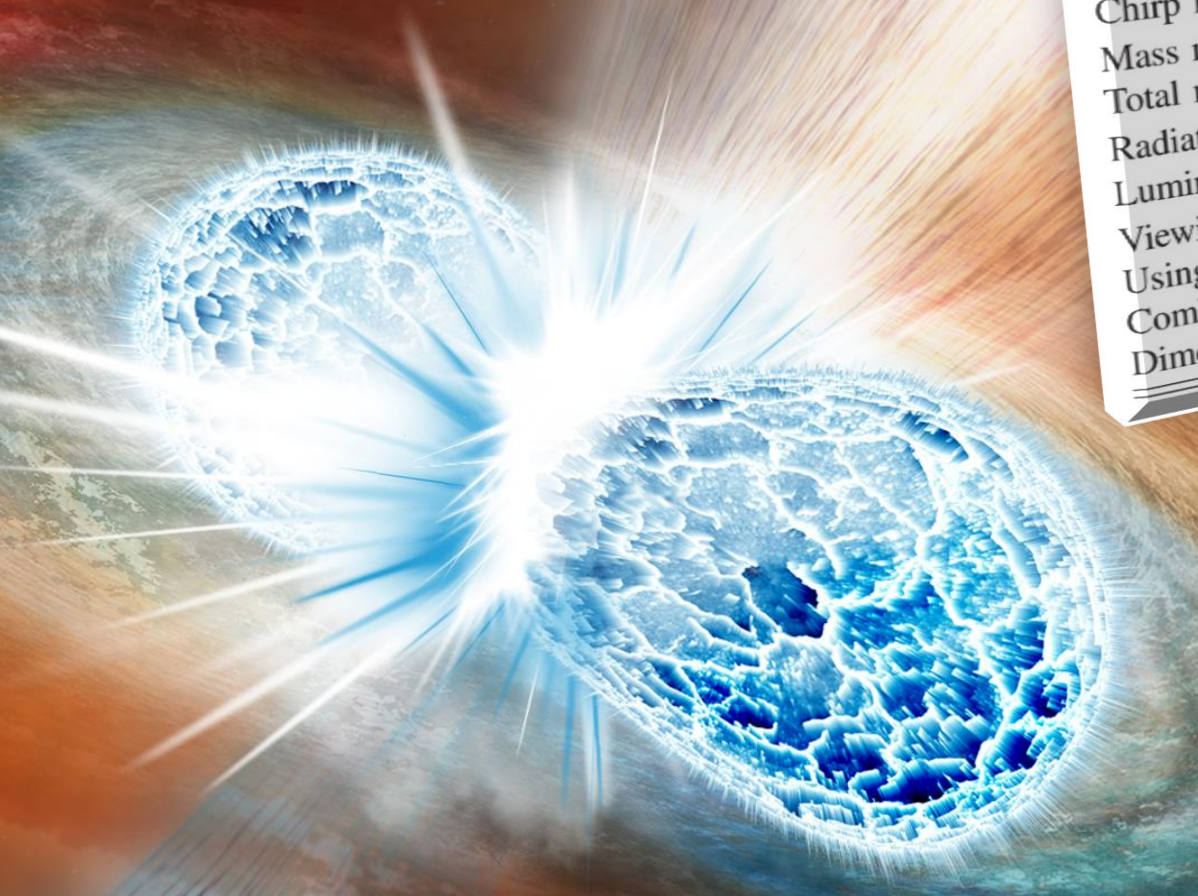
Silbar, Richard R., and Sanjay Reddy. "Neutron stars for undergraduates." American journal of physics 72.7 (2004): 892-905.

David Blaschke, "Structure of White Dwarfs and Neutron Stars" (siehe www.ift.uni.wroc.pl-blaschke-vorles-CS_2.pdf)

Das lang ersehnte Ereignis GW170817

	Low-spin priors ($|\chi| \leq 0.05$)	High-spin priors ($|\chi| \leq 0.89$)
Primary mass m_1	1.36–1.60 $M_\odot$	1.36–2.26 $M_\odot$
Secondary mass m_2	1.17–1.36 $M_\odot$	0.86–1.36 $M_\odot$
Chirp mass $\mathcal{M}$	$1.188^{+0.004}_{-0.002} M_\odot$	$1.188^{+0.004}_{-0.002} M_\odot$
Mass ratio m_2/m_1	0.7–1.0	0.4–1.0
Total mass m_{tot}	$2.74^{+0.04}_{-0.01} M_\odot$	$2.82^{+0.47}_{-0.09} M_\odot$
Radiated energy E_{rad}	$> 0.025 M_\odot c^2$	$> 0.025 M_\odot c^2$
Luminosity distance D_L	40^{+8}_{-14} Mpc	40^{+8}_{-14} Mpc
Viewing angle Θ	$\leq 55°$	$\leq 56°$
Using NGC 4993 location	$\leq 28°$	$\leq 28°$
Combined dimensionless tidal deformability $\tilde{\Lambda}$	≤ 800	≤ 700
Dimensionless tidal deformability $\Lambda(1.4 M_\odot)$	≤ 800	≤ 1400

17. August 2017



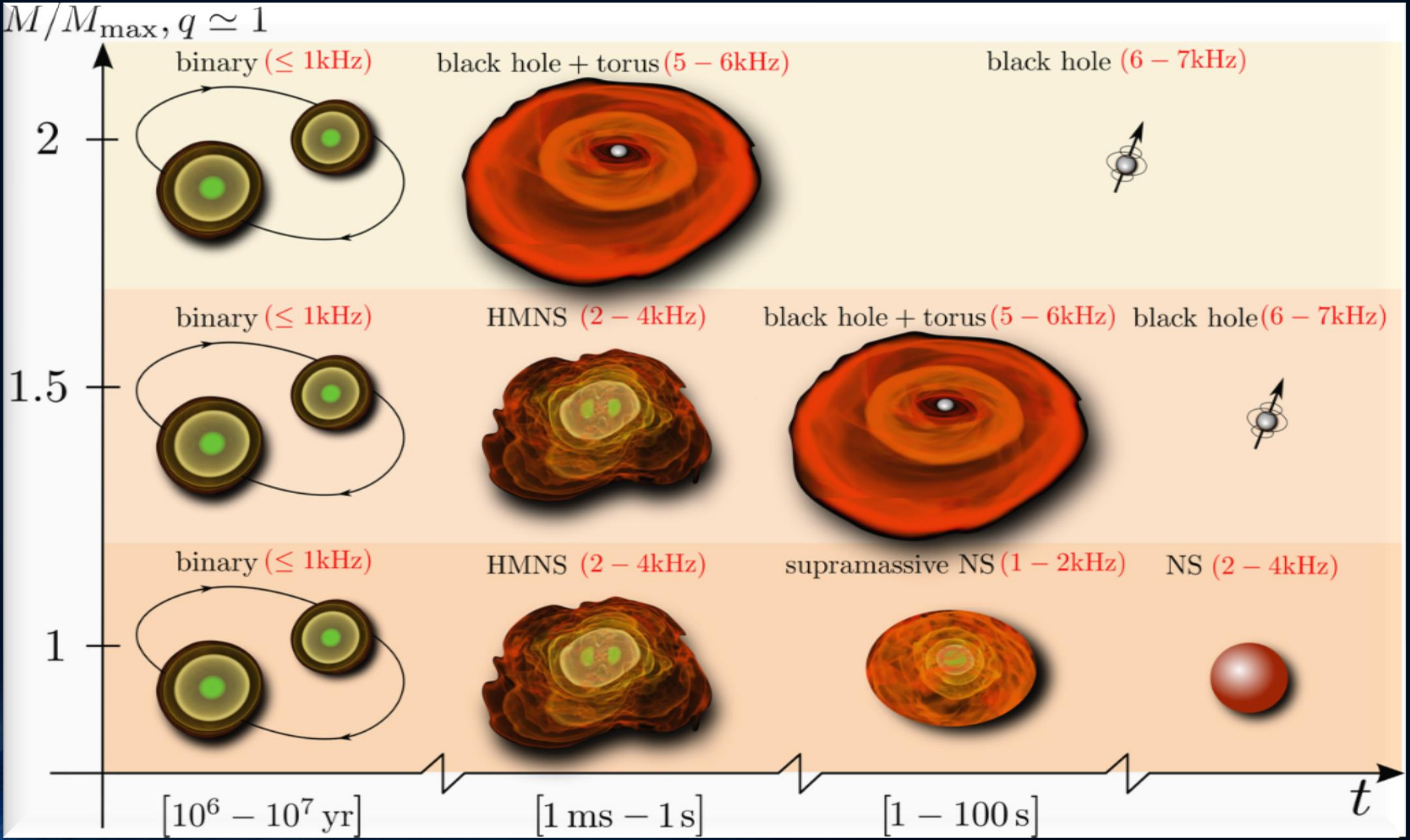
Gravitationswelle einer
Neutronenstern Kollision gemessen!

Was geschieht wenn zwei Neutronensterne miteinander kollidieren?

Zwei sehr massive Neutronensterne

Zwei mittelschwere Neutronensterne

Zwei leichte Neutronensterne



Computer Simulation einer Neutronenstern Kollision

Credits: Cosima Breu, David Radice und Luciano Rezzolla

Dichte der Neutronenstern Materie

8.5 14

lg(rho) [g/cm^3]

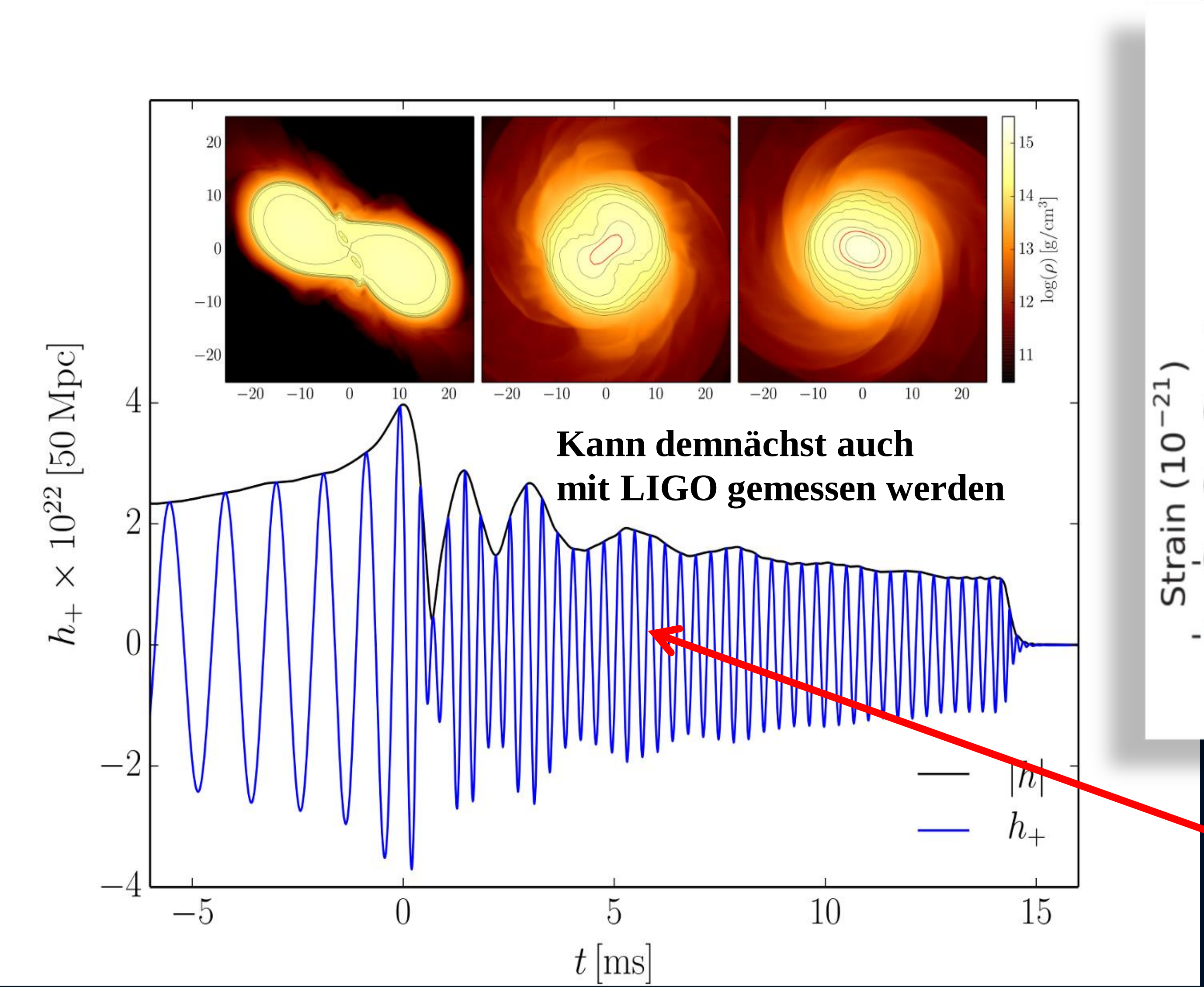
Temperatur der Neutronenstern Materie

0 50

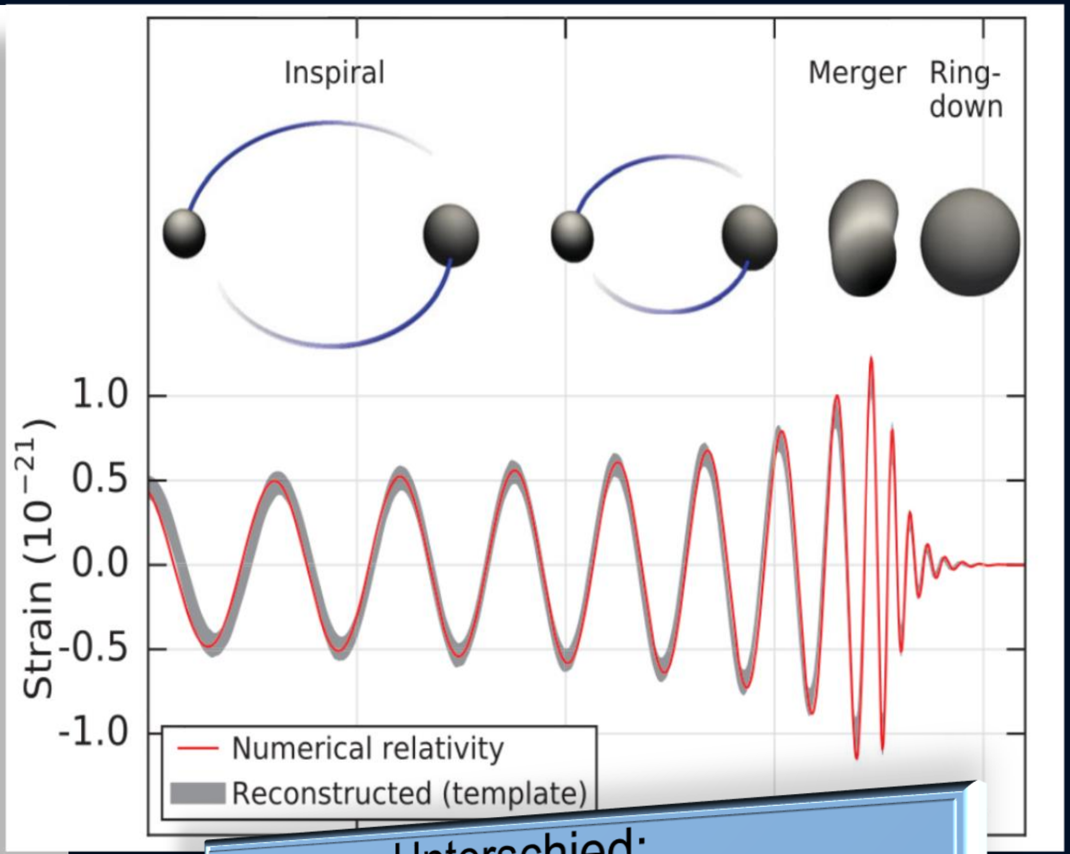
T [MeV]

Gravitationswelle einer Neutronenstern Kollision

Neutronenstern Kollision (Simulation)



Kollision zweier schwarzer Löcher

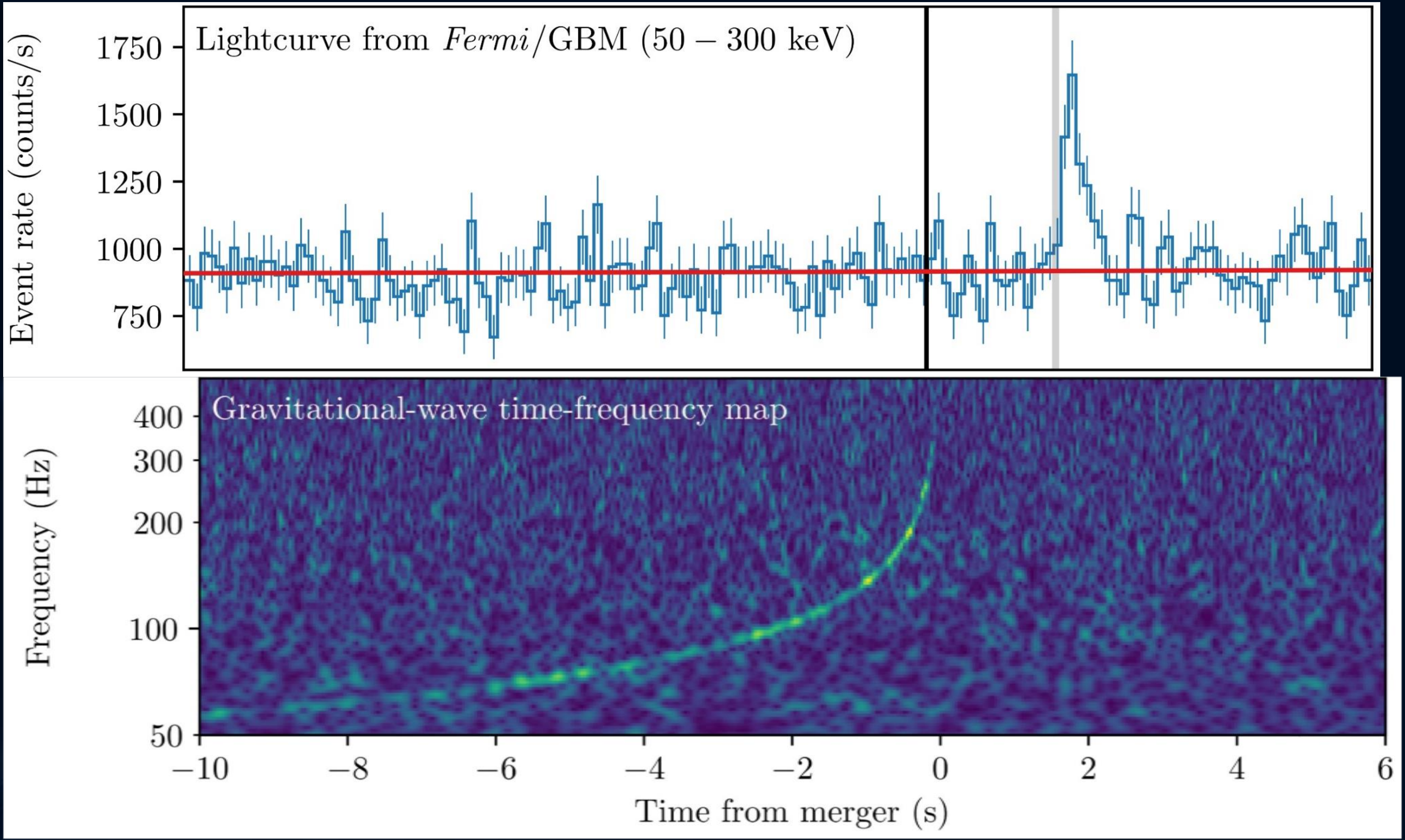


<u>Unterschied:</u>
Bei Neutronenstern Kollisionen gibt es meistens eine ***Post-Kollisionsphase***

Die gemessene Gravitationswelle und der darauf folgende hochenergetische Lichtblitz

Der von dem Gammastrahlen Detektor FERMI gemessene Gammastrahlen Ausbruch
(1.7 Sekunden später)

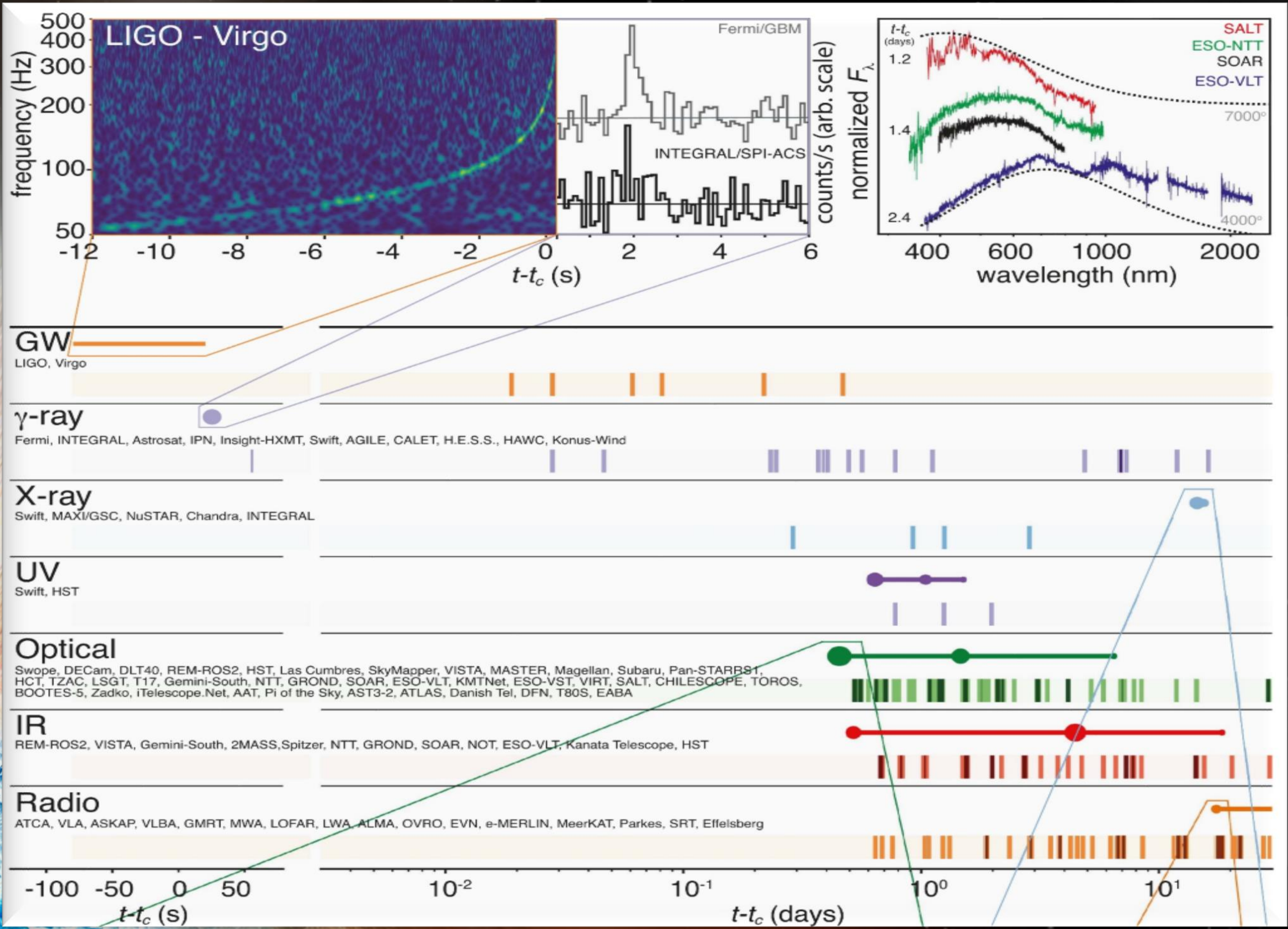
Die von dem Gravitationswellen Detektor LIGO detektierte Frequenz der Gravitationswelle



GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral, LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, Phys. Rev. Lett. 119, 161101 (2017), Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB170817A, LIGO, Virgo, Fermi GBM, and INTEGRAL Collaborations, Astrophys. J. Lett. 848, L13 (2017)

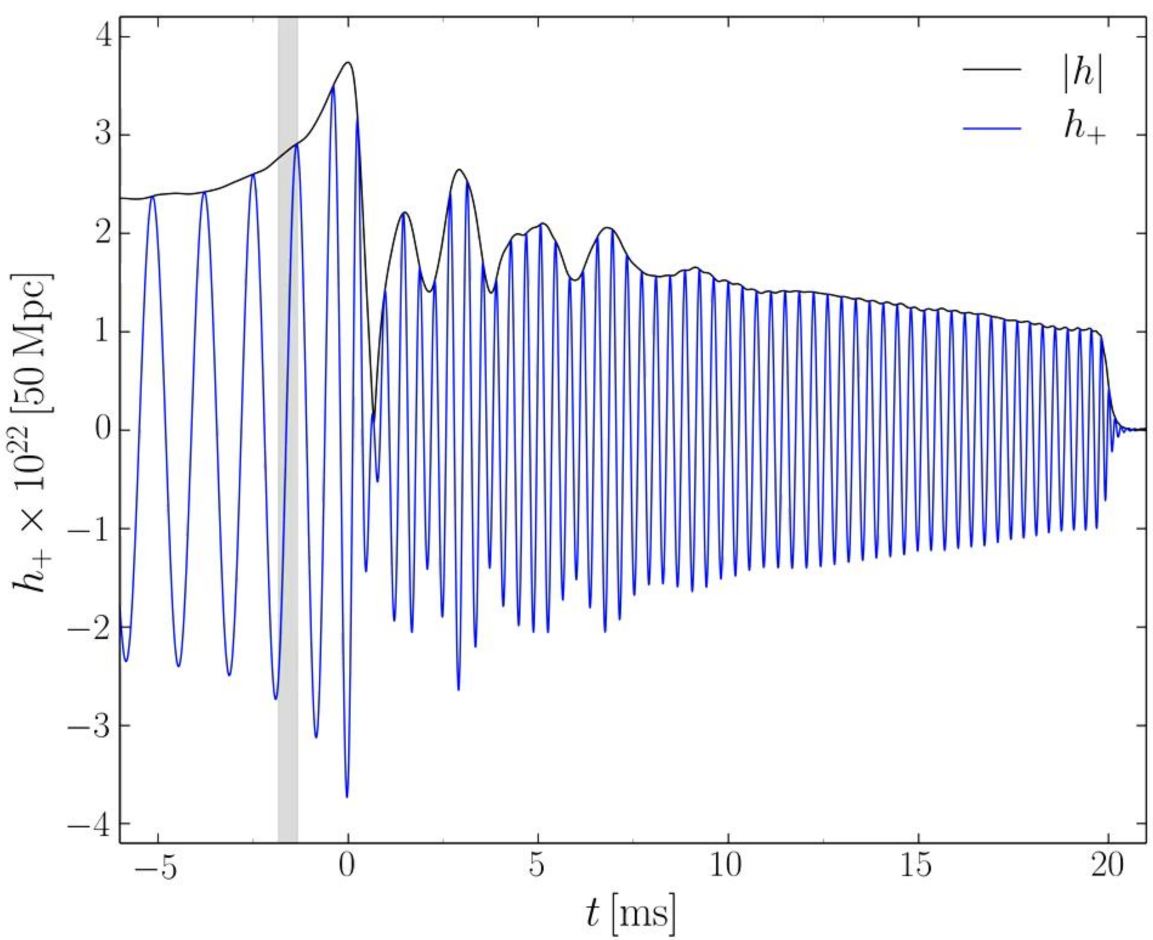
GW170817

Tage, Wochen und Monate später detektierten weltweit unterschiedliche Teleskope (radio, infrarot, optische,…) eine Nachstrahlung dieser Neutronenstern Kollision

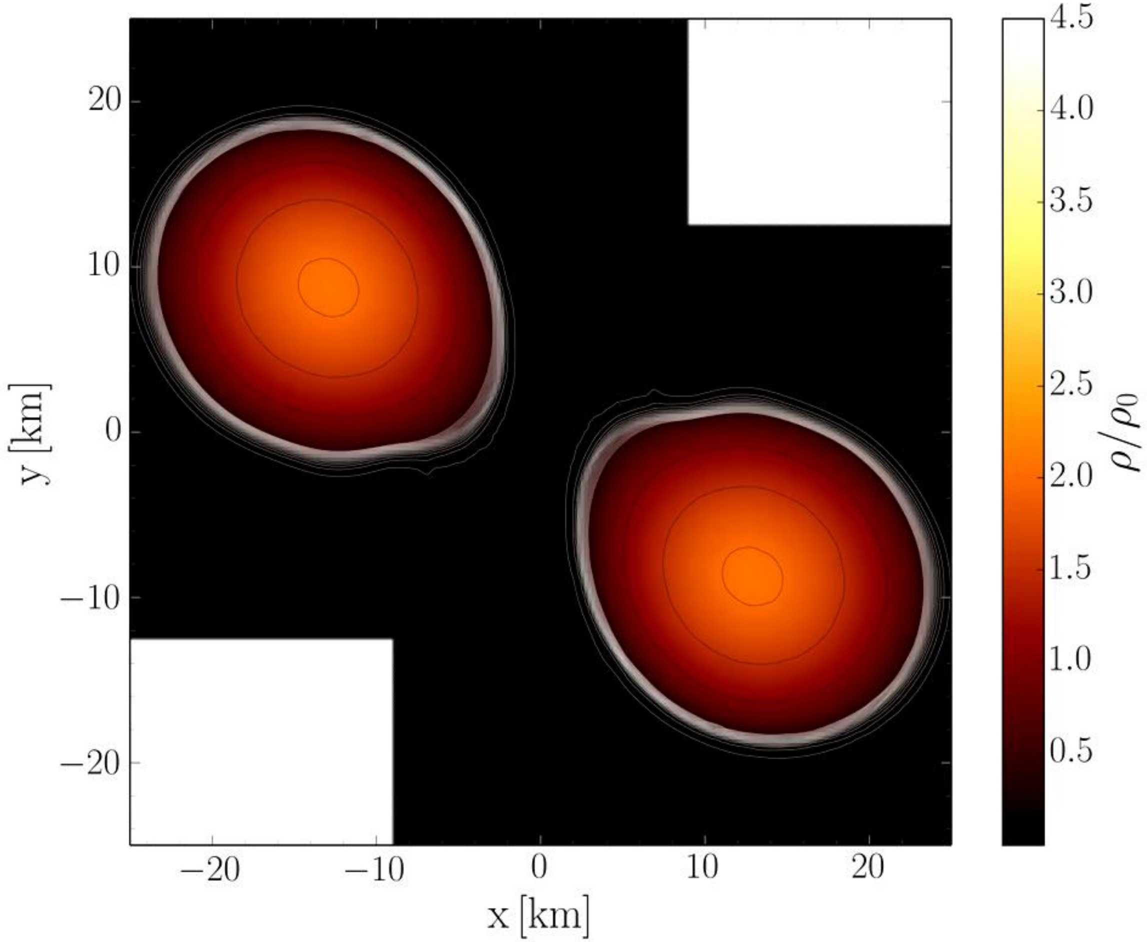


Multi-Messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger, LIGO and Virgo Collaborations together with 50 teams of electromagnetic and neutrino astronomers, Astrophys. J. Lett. 848, L12 (2017)

Was geschieht zwischen der Kollision und dem Kollaps zum schwarzen Loch?

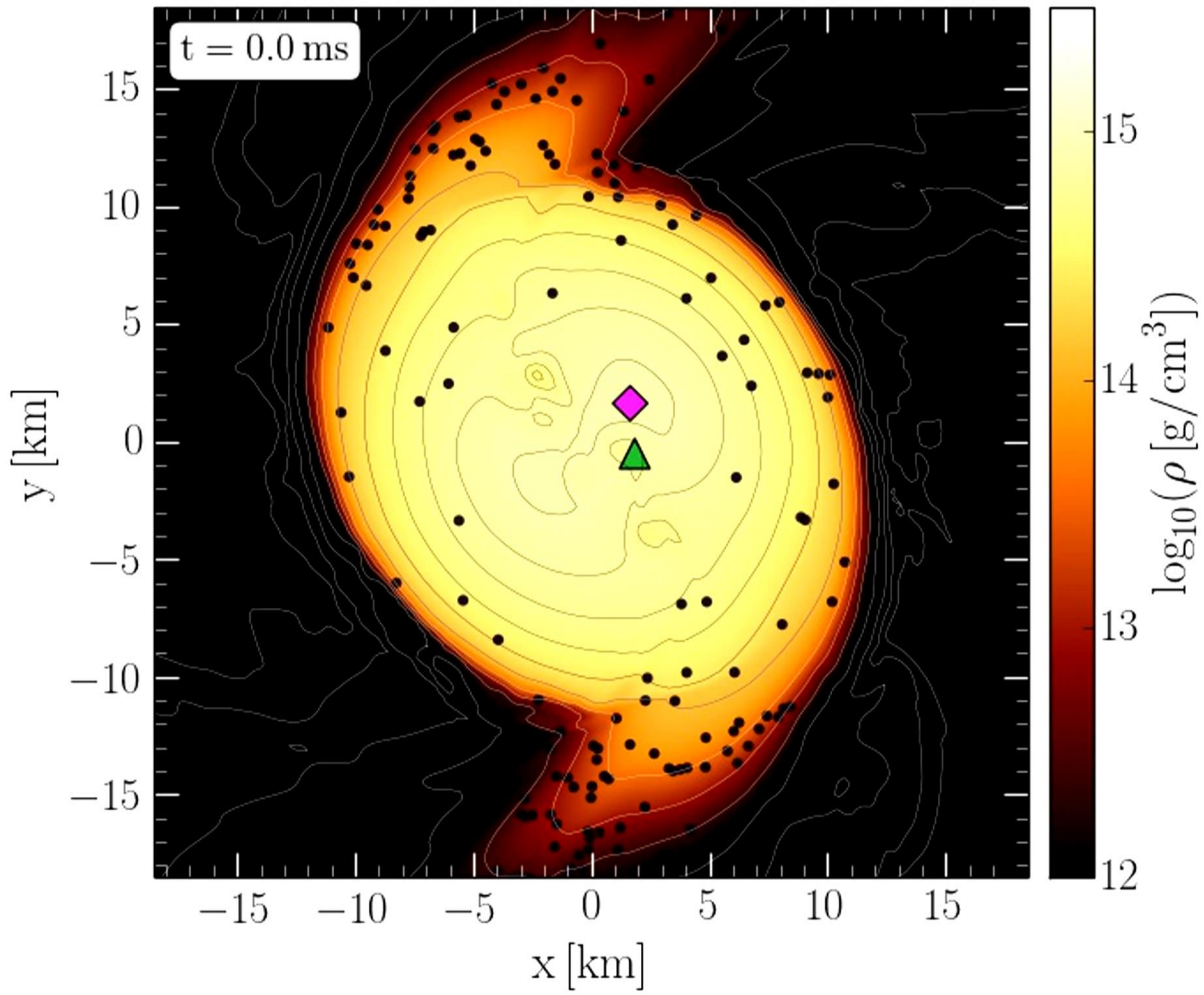


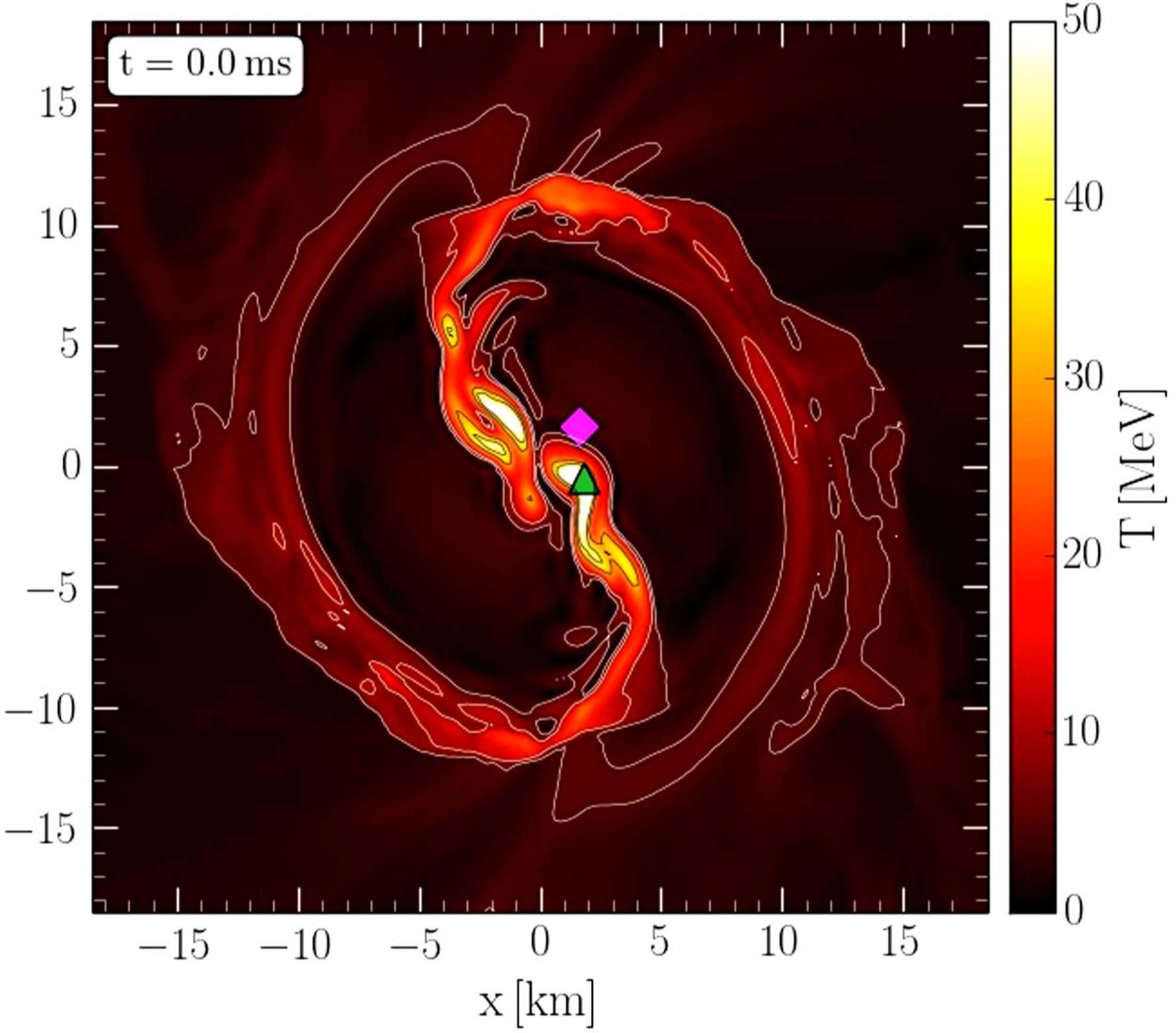
Amplitude der emittierten Gravitationswelle



Dichteprofil in der äquatorialen Ebene

Density and Temperature Evolution inside the HMNS

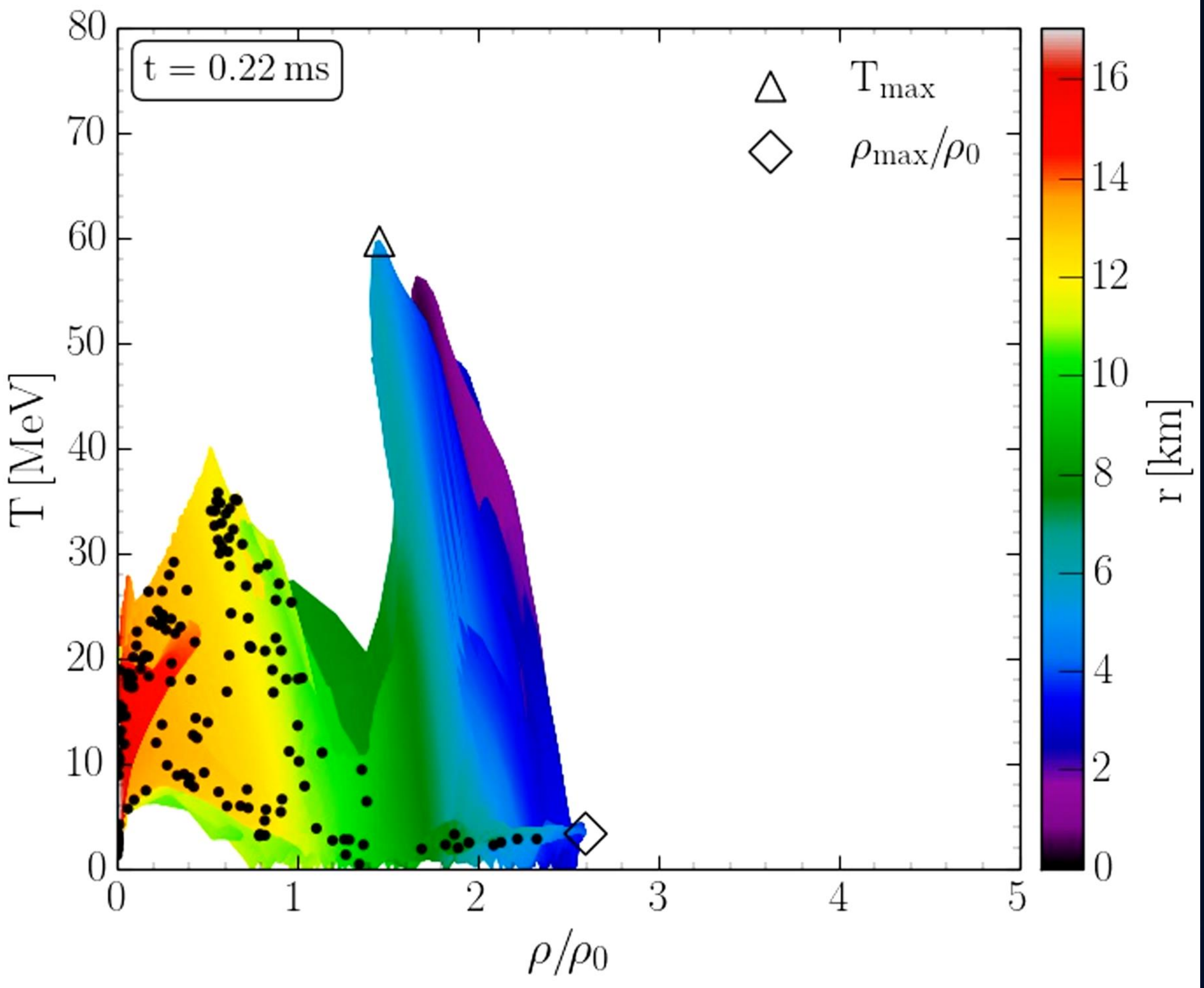




Rest mass density on the equatorial plane

Temperature on the equatorial plane

Binary Neutron Star Mergers in the QCD Phase Diagram

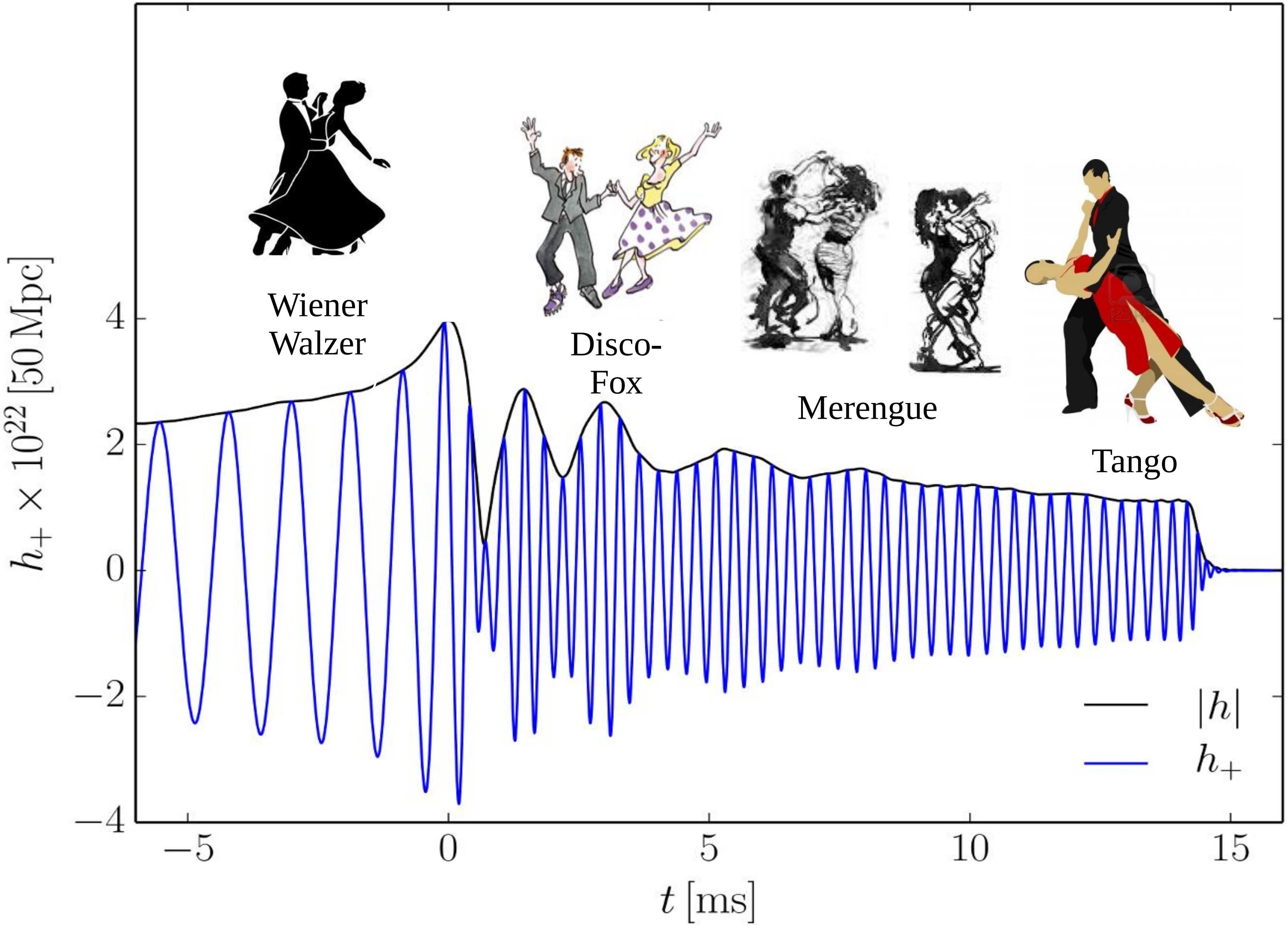


Evolution of hot and dense matter inside the inner area of a hypermassive neutron star simulated within the LS220 EOS with a total mass of M_{total}=2.7 M_{solar} in the style of a (T- ρ) QCD phase diagram plot

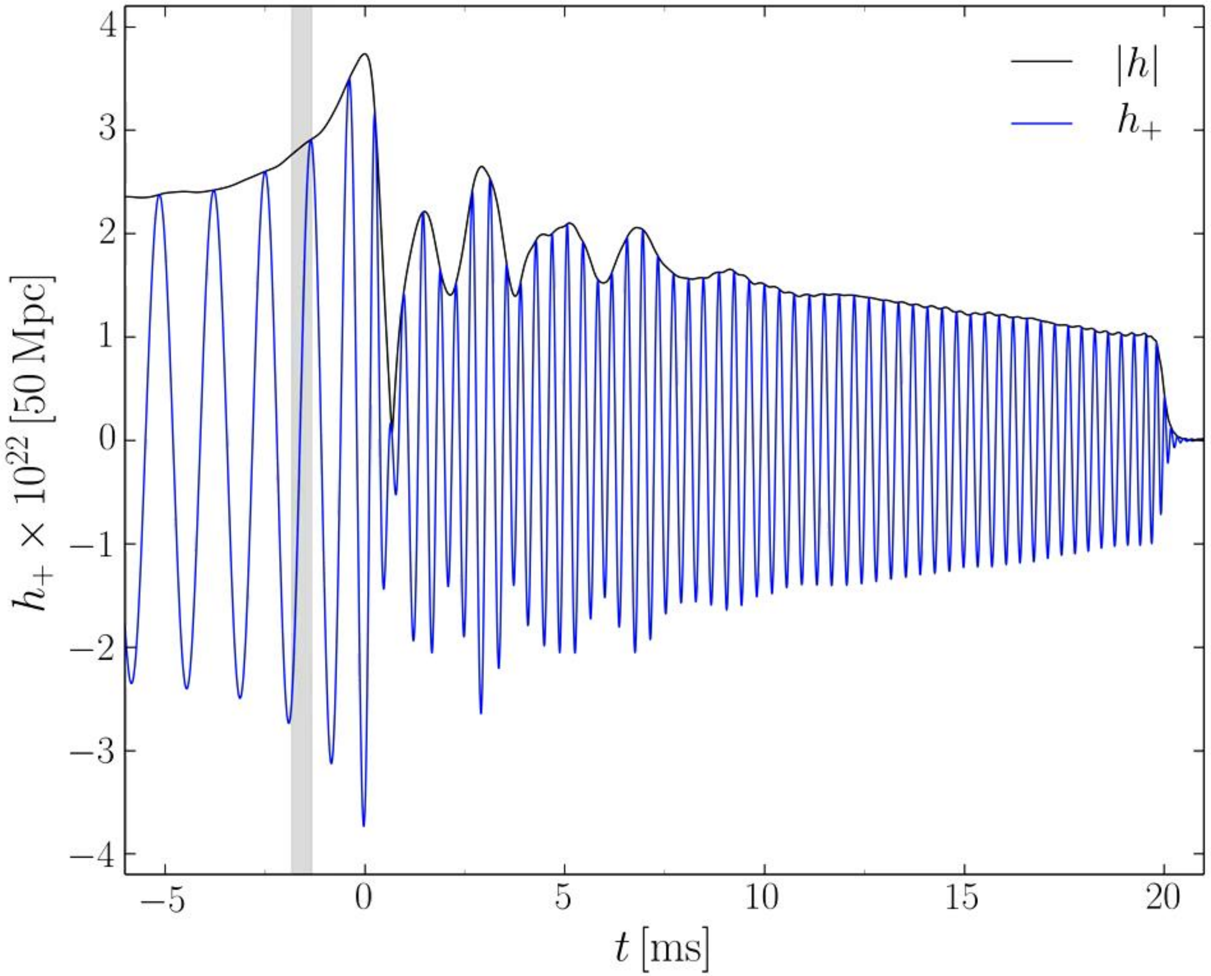
The color-coding indicate the radial position r of the corresponding (T- ρ) fluid element measured from the origin of the simulation (x , y) = (0 , 0) on the equatorial plane at z = 0.

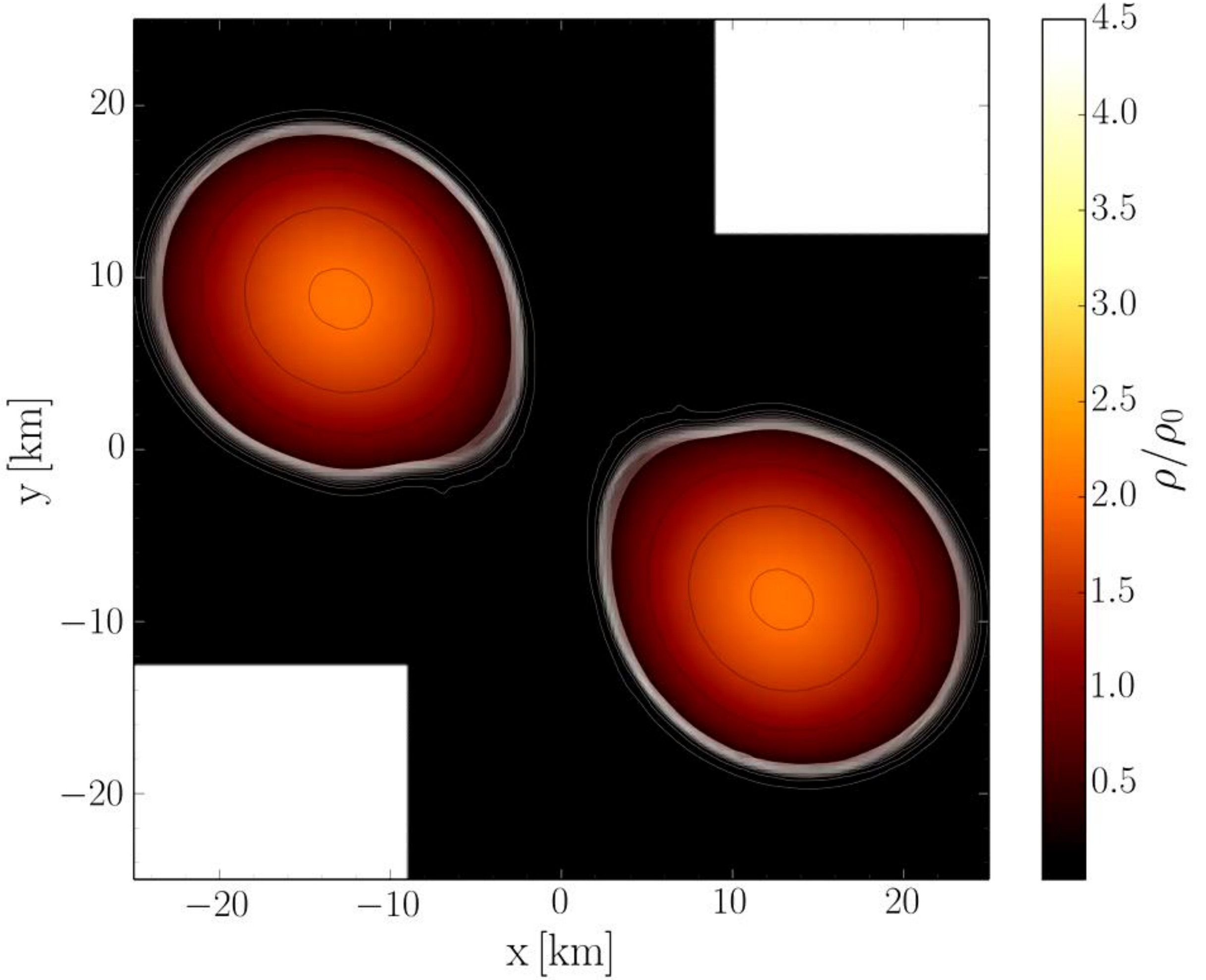
The open triangle marks the maximum value of the temperature while the open diamond indicates the maximum of the density.

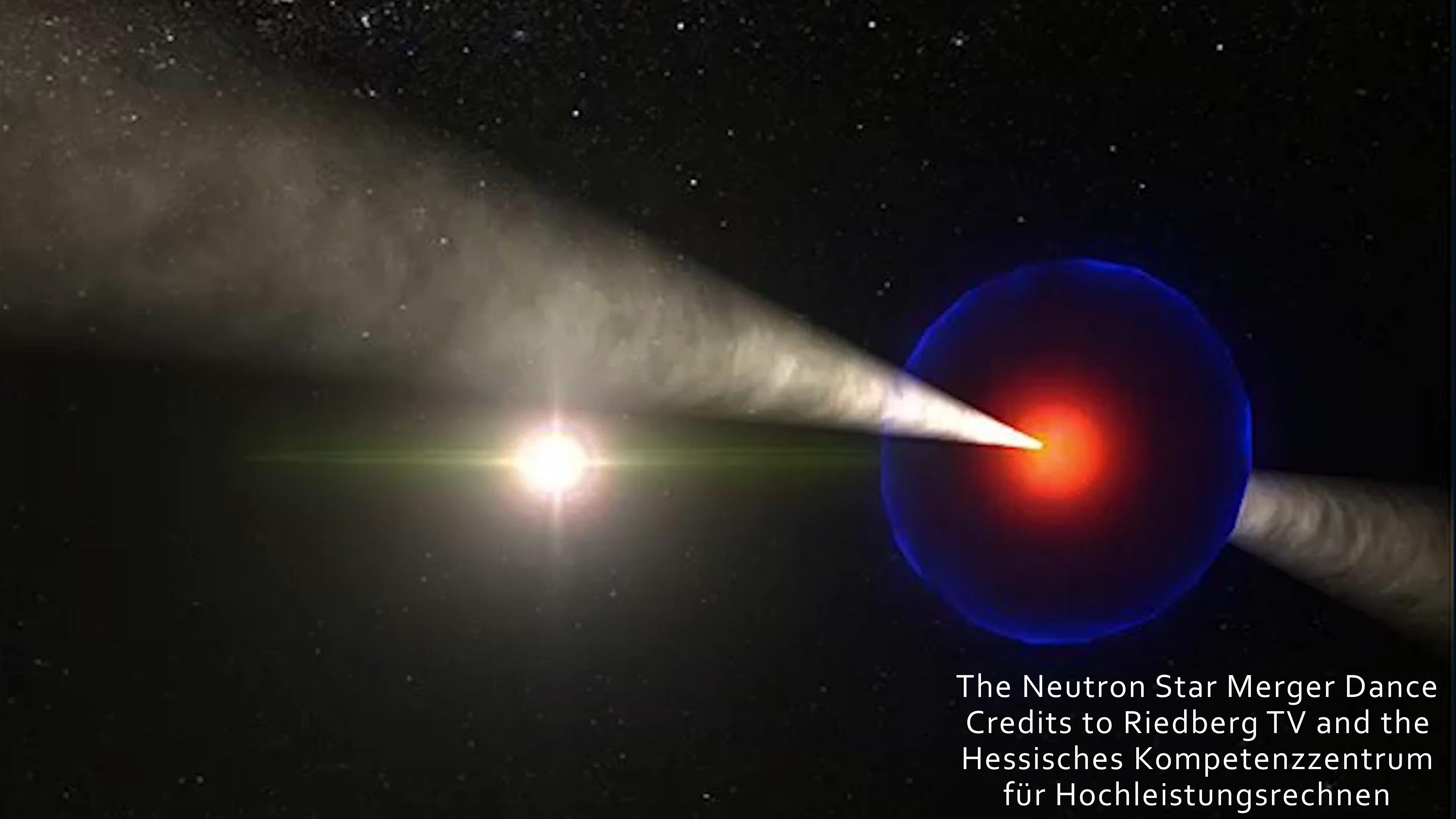
Tanz der Neutronensterne



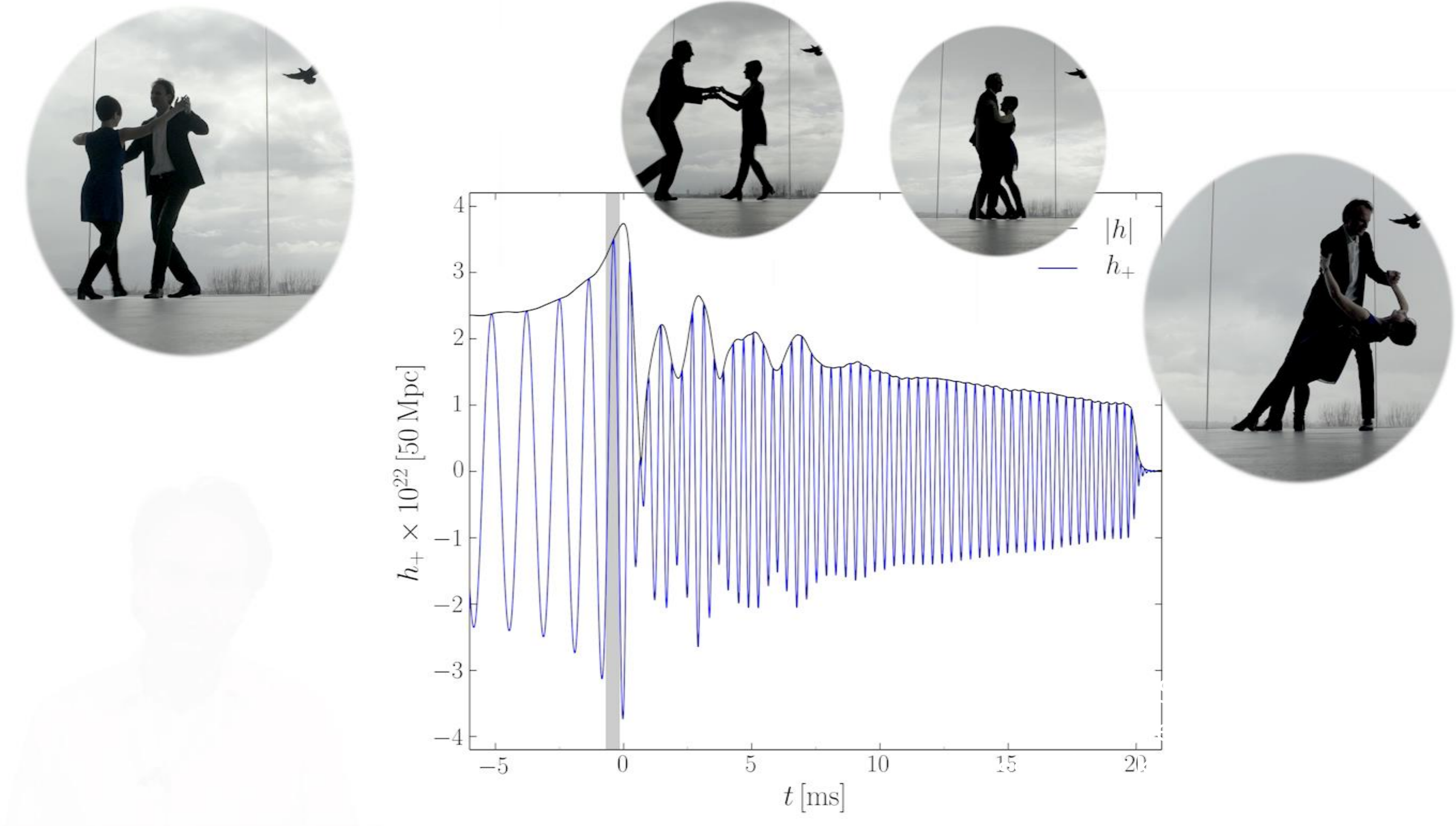
Disco-Fox, Merengue und Tango Phase





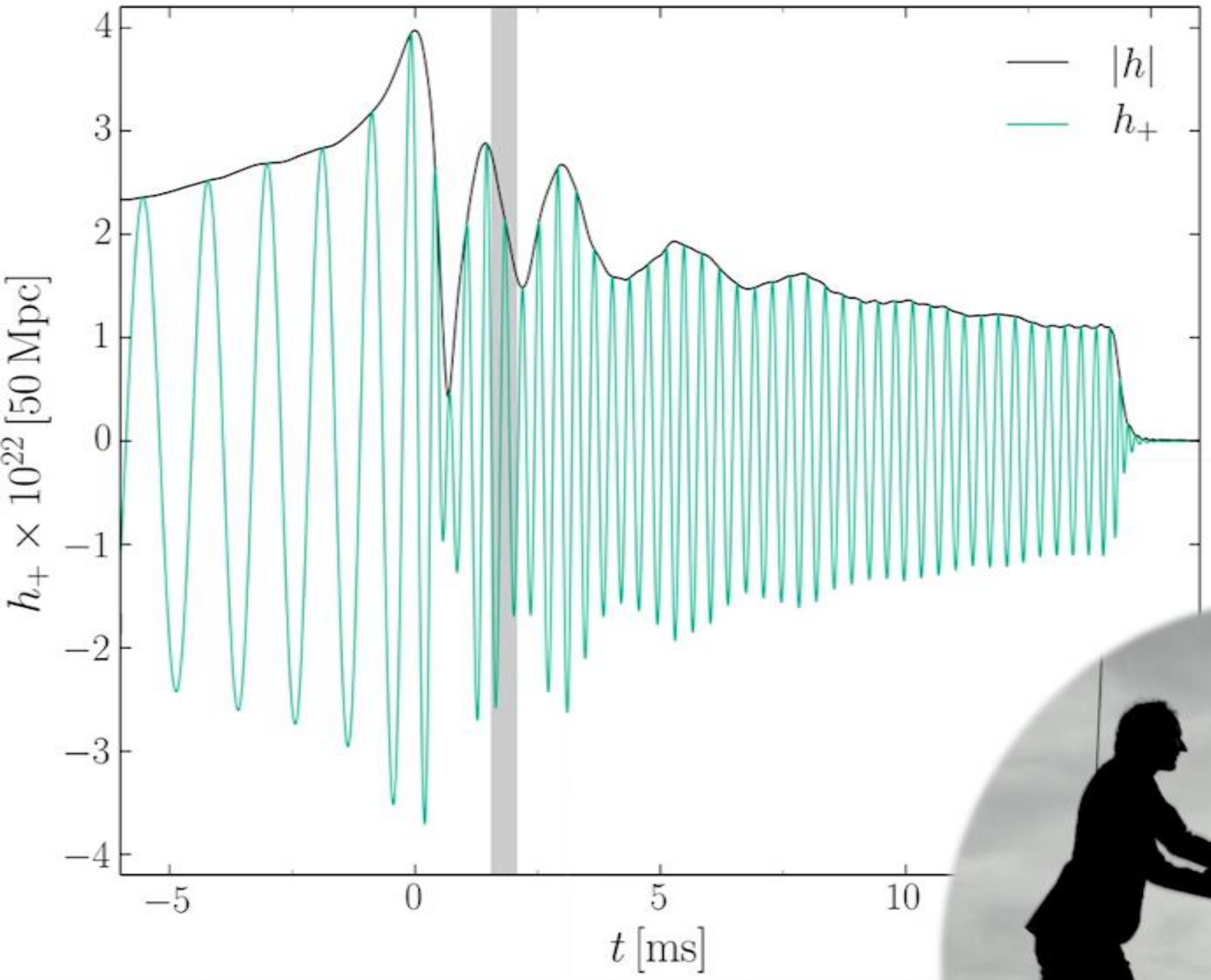


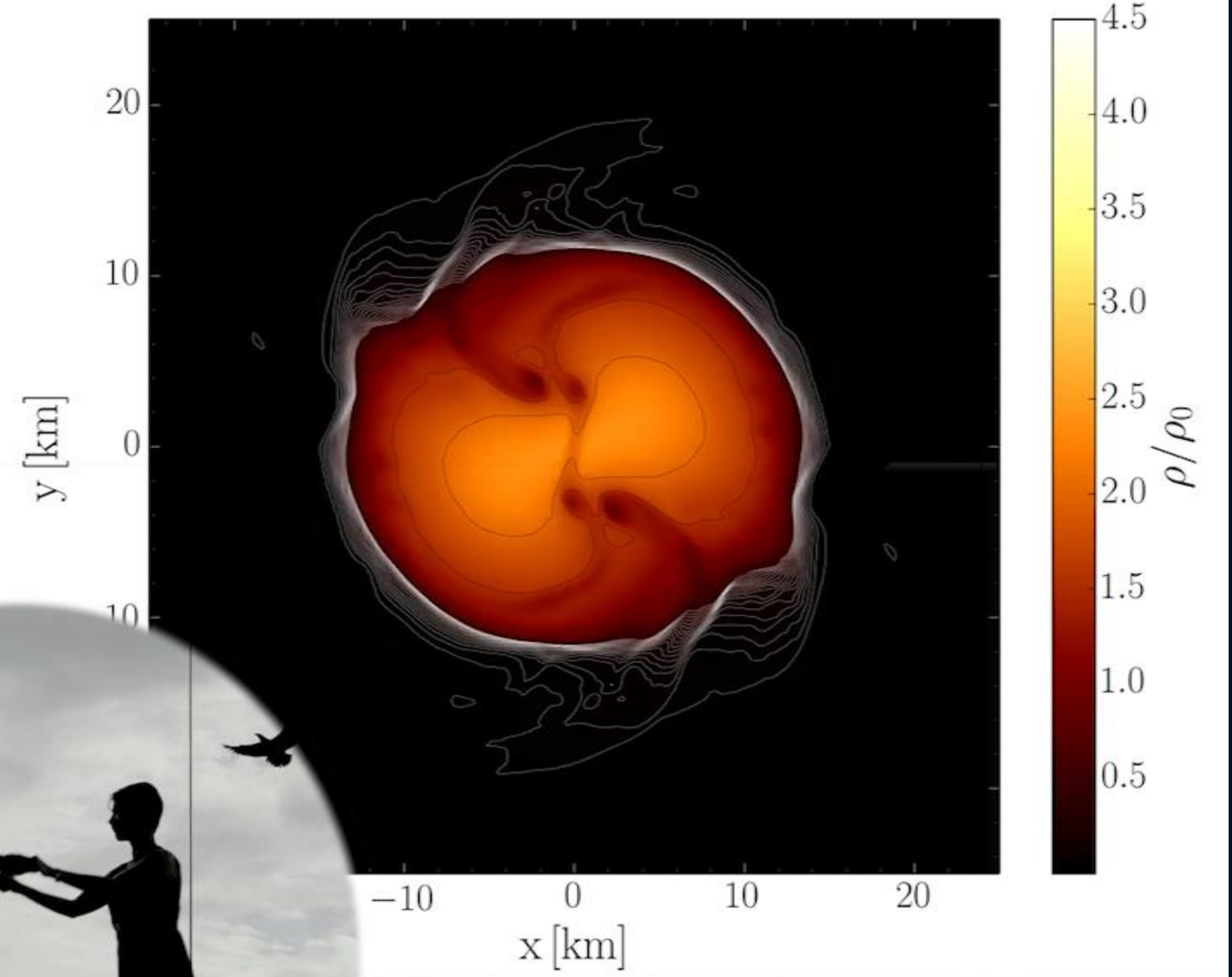
The Neutron Star Merger Dance
Credits to Riedberg TV and the
Hessisches Kompetenzzentrum
für Hochleistungsrechnen



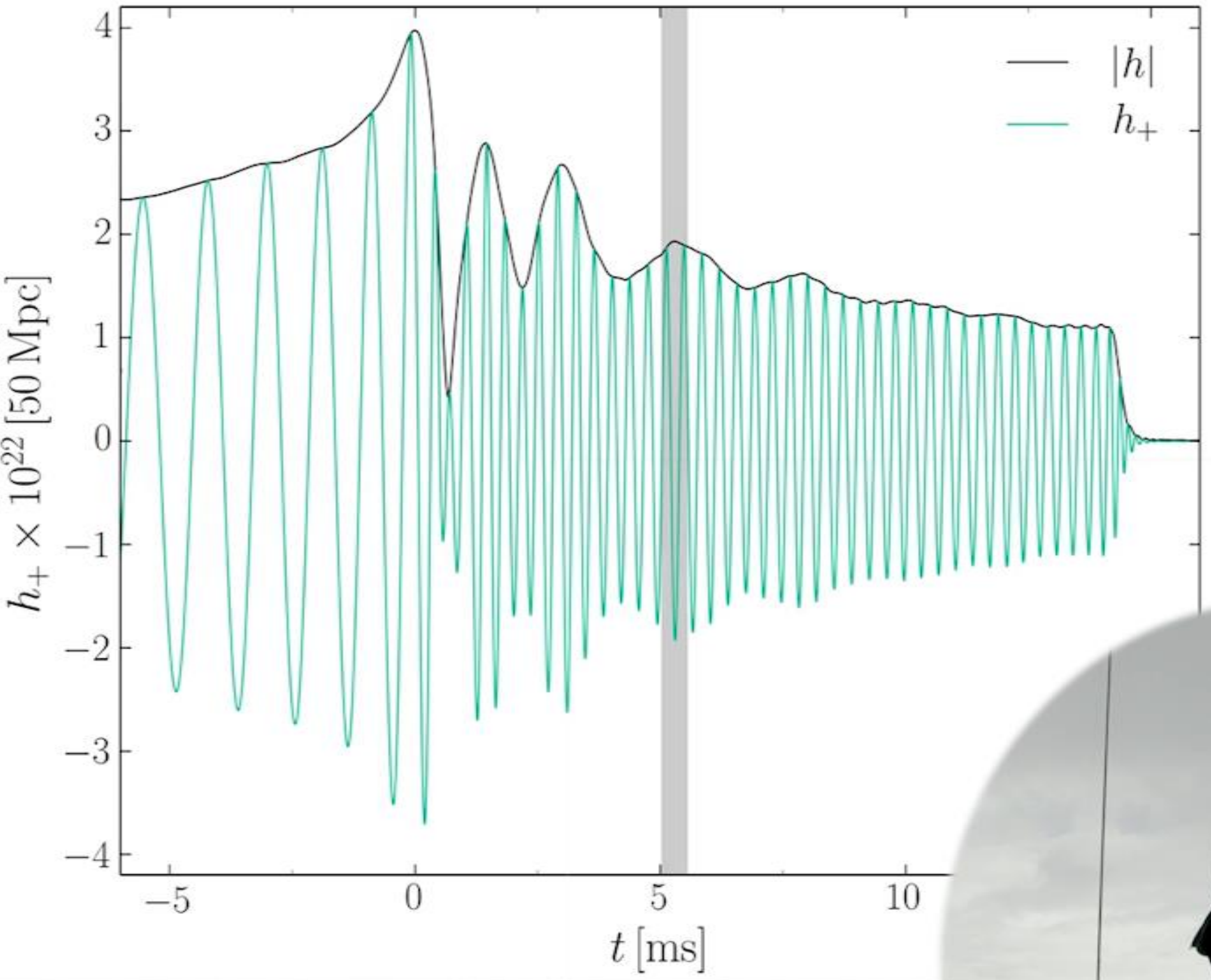
$|h|$
h_+
$h_+ \times 10^{22}\,[50\,\mathrm{Mpc}]$
$t\,[\mathrm{ms}]$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
0
5
10
15
20

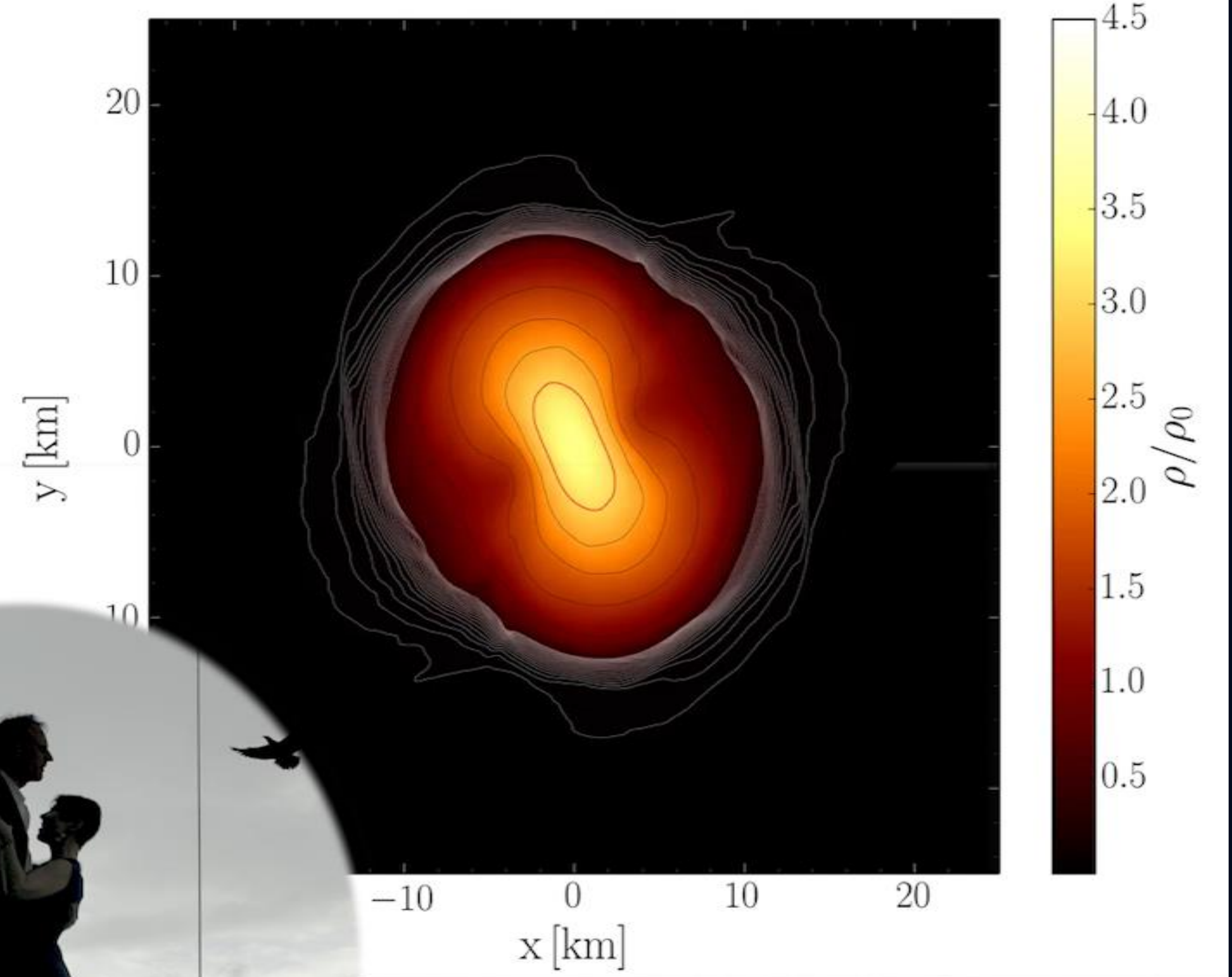

Wiener Walzer



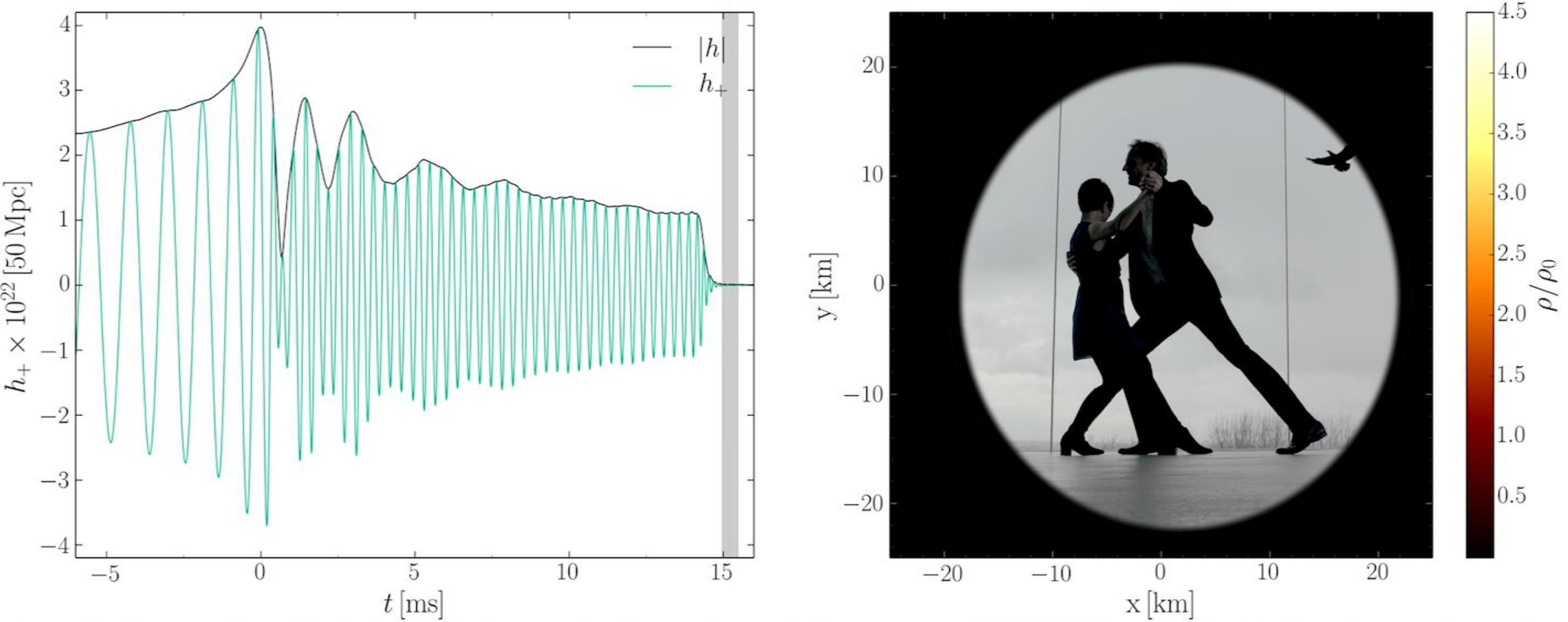


Disco Fox


$|h|$
h_+
$h_+ \times 10^{22}$ [50 Mpc]
t [ms]
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
0
5
10


y [km]
x [km]
ρ/ρ_0
20
10
0
−10
20
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5

Merengue



Tango

Ludmila und

[redacted] Matthias Hanauske

Kamera Pablo Rengel
Lorena

Schnitt Luise Schulte

The Neutron Star Merger Dance
Credits to Riedberg TV and the
Hessisches Kompetenzzentrum
für Hochleistungsrechnen