

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
25. MAI, 2018*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

7. Vorlesung

Plan für die heutige Vorlesung

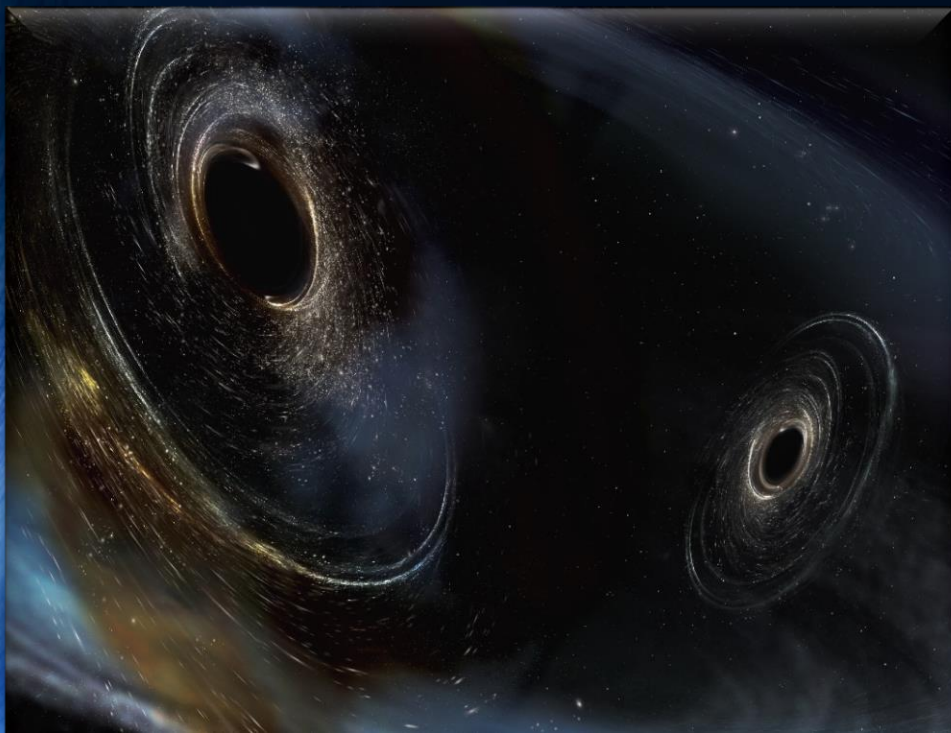
- Einführung in die Kerr-Metrik eines rotierenden schwarzen Loches, Ereignishorizonte und Flächen der stationären Grenze (bzw. der unendlichen Rotverschiebung), der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging"), geodätische Bewegung eines Probekörpers in der Kerr Metrik)
- Klassifizierung der möglichen Bahnbewegungen um ein rotierendes schwarzes Loch (Kerr Metrik) mittels eines effektiven Potentials
- Kreisförmige Bewegungen in der äquatorialen Ebene

Gravitationswellen und rotierende Schwarze Löcher

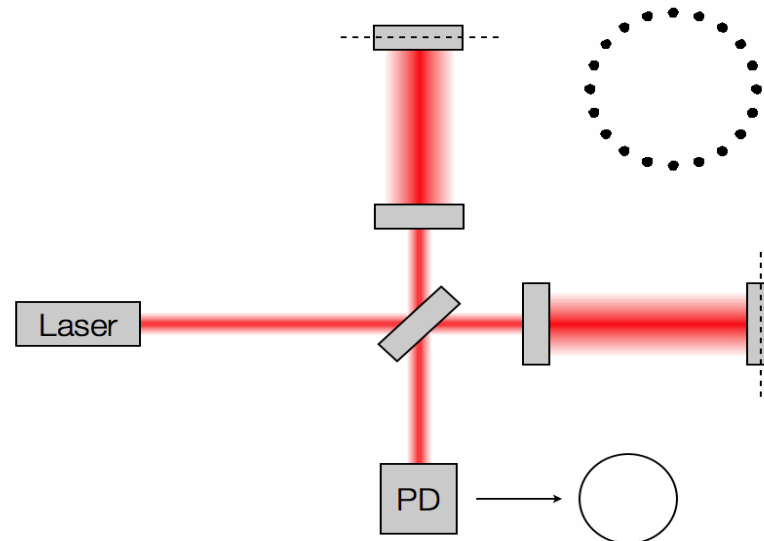
Kollision zweier Schwarzer Löcher GW170104

Massen: 31 & 19 Sonnenmassen

Abstand zur Erde 880 Mpc
(mehr als 2.5 Milliarden Lichtjahre)

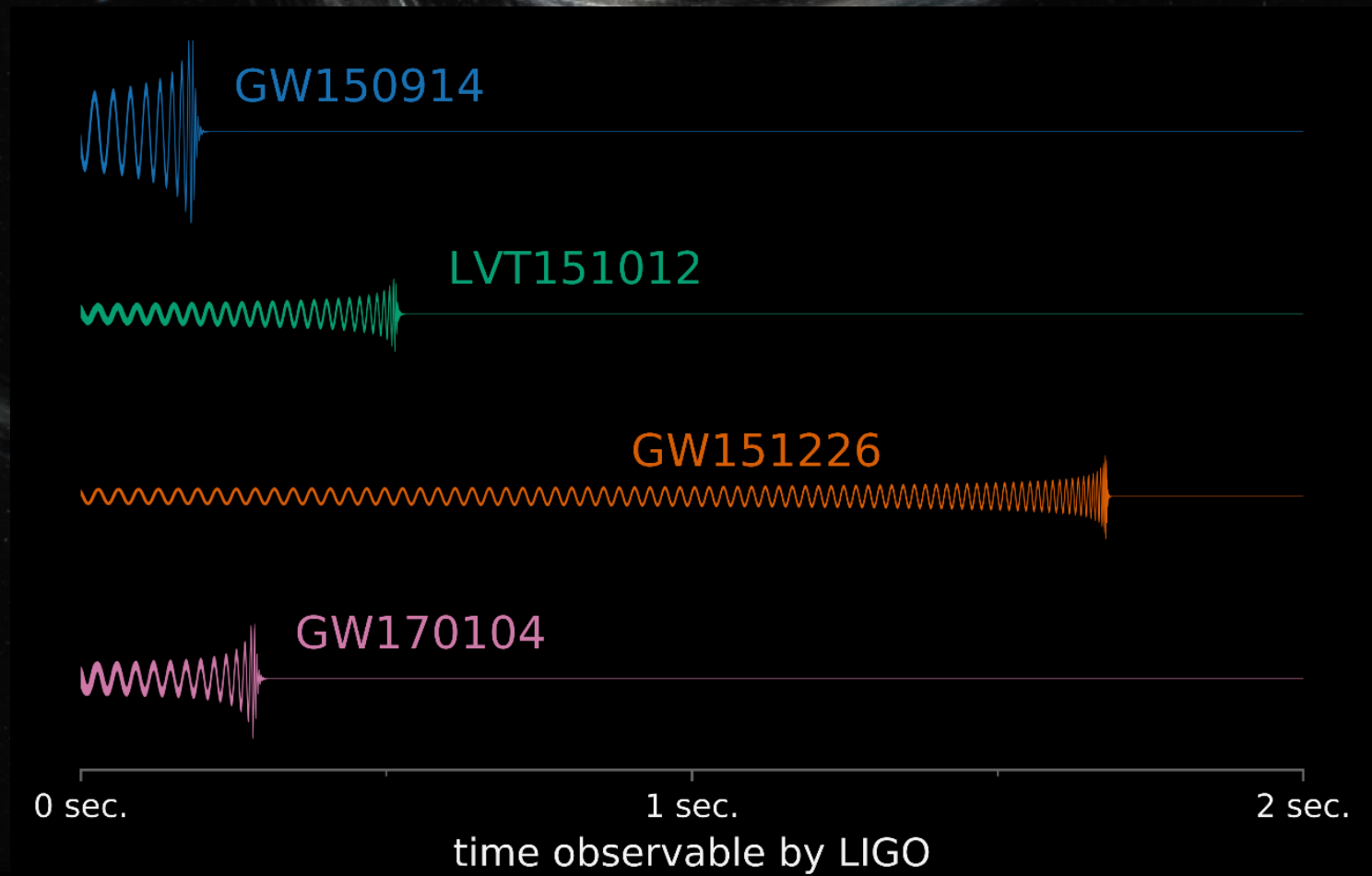


Längen – Differenz $< 10^{-18}$ m



Credit: Les Wade from Kenyon College

GW170104 and the other GWs





GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2

B. P. Abbott *et al.**

(LIGO Scientific and Virgo Collaboration)

(Received 9 May 2017; published 1 June 2017)

We describe the observation of GW170104, a gravitational-wave signal produced by the coalescence of a pair of stellar-mass black holes. The signal was measured on January 4, 2017 at 10:11:58.6 UTC by the twin advanced detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory during their second observing run, with a network signal-to-noise ratio of 13 and a false alarm rate less than 1 in 70 000 years. The inferred component black hole masses are $31.2_{-6.0}^{+8.4} M_{\odot}$ and $19.4_{-5.9}^{+5.3} M_{\odot}$ (at the 90% credible level). The black hole spins are best constrained through measurement of the effective inspiral spin parameter, a mass-weighted combination of the spin components perpendicular to the orbital plane, $\chi_{\text{eff}} = -0.12_{-0.30}^{+0.21}$. This result implies that spin configurations with both component spins positively aligned with the orbital angular momentum are disfavored. The source luminosity distance is 880_{-390}^{+450} Mpc corresponding to a redshift of $z = 0.18_{-0.07}^{+0.08}$. We constrain the magnitude of modifications to the gravitational-wave dispersion relation and perform null tests of general relativity. Assuming that gravitons are dispersed in vacuum like massive particles, we bound the graviton mass to $m_g \leq 7.7 \times 10^{-23}$ eV/ c^2 . In all cases, we find that GW170104 is consistent with general relativity.

GW170104

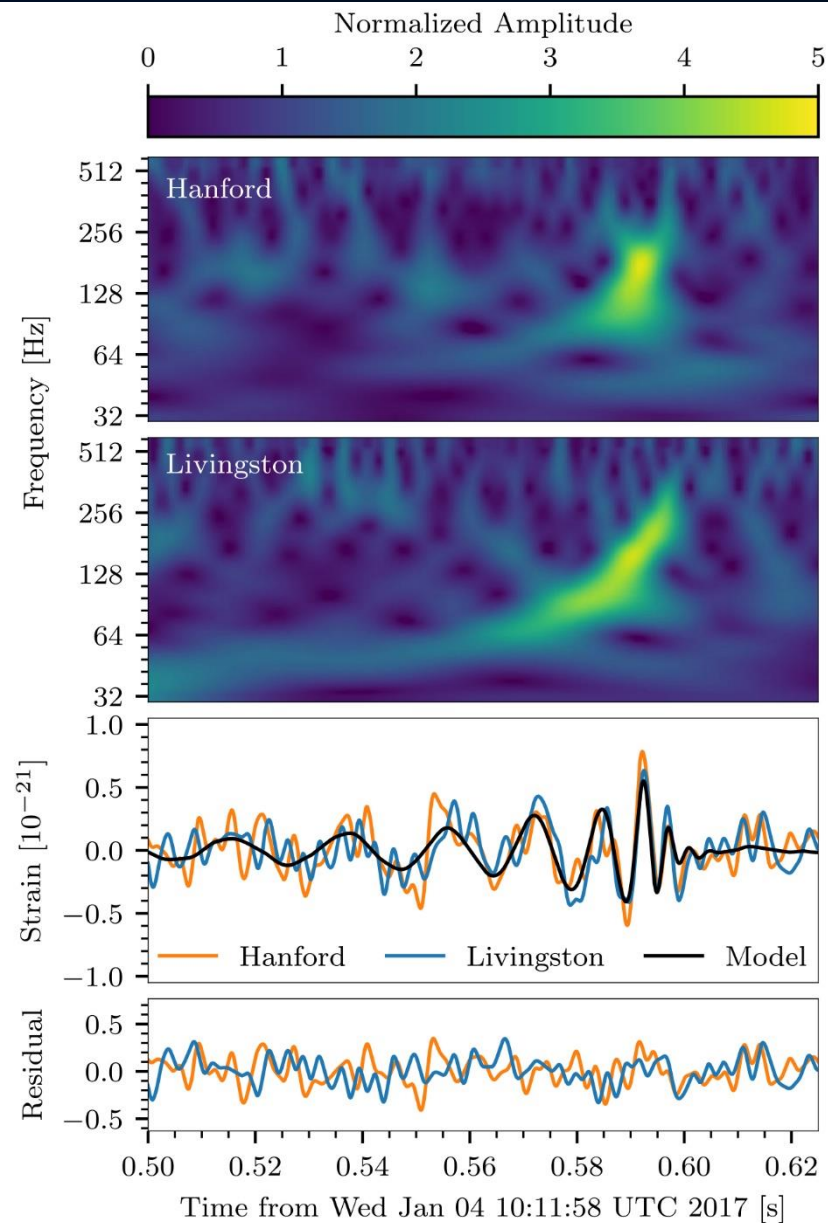
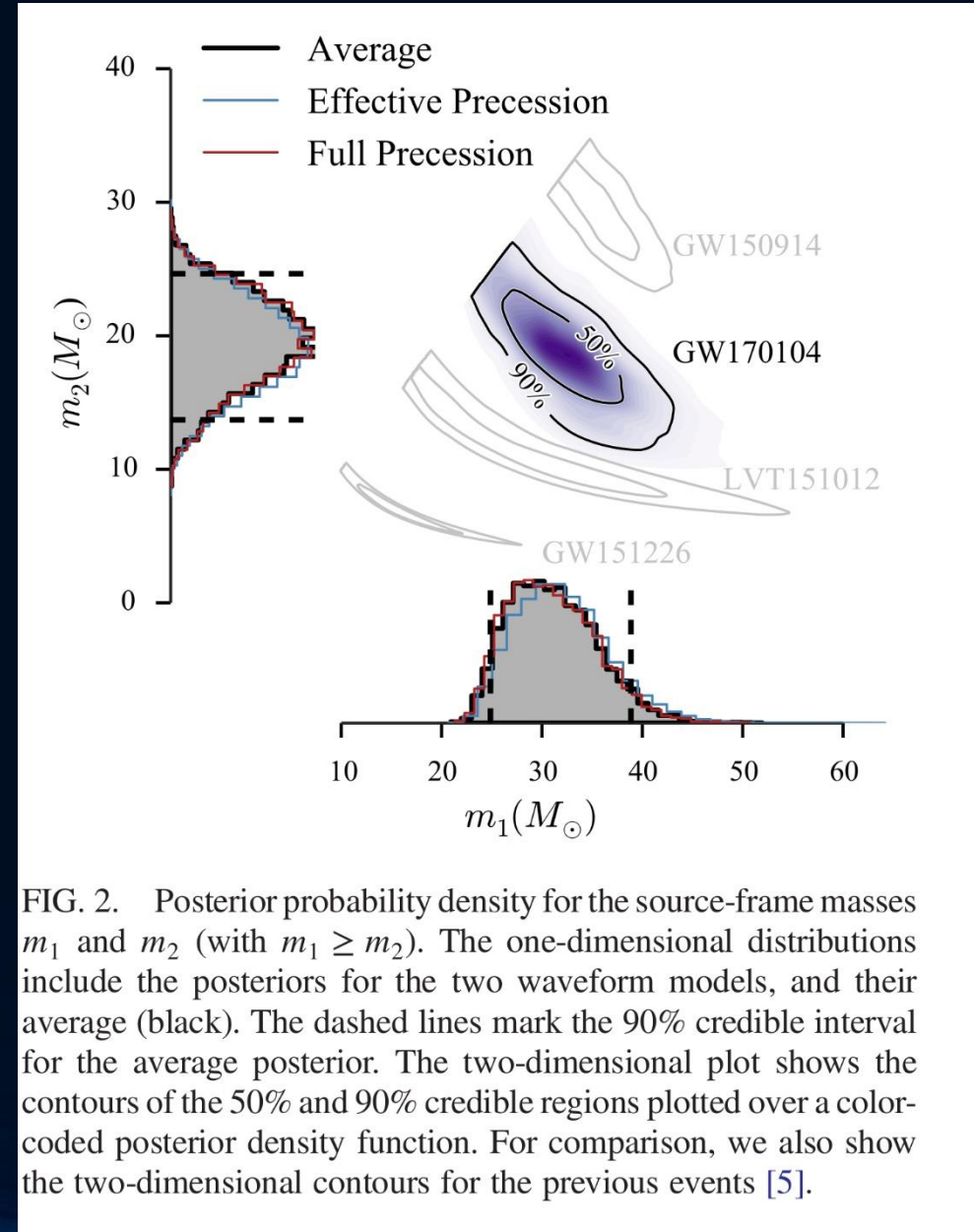
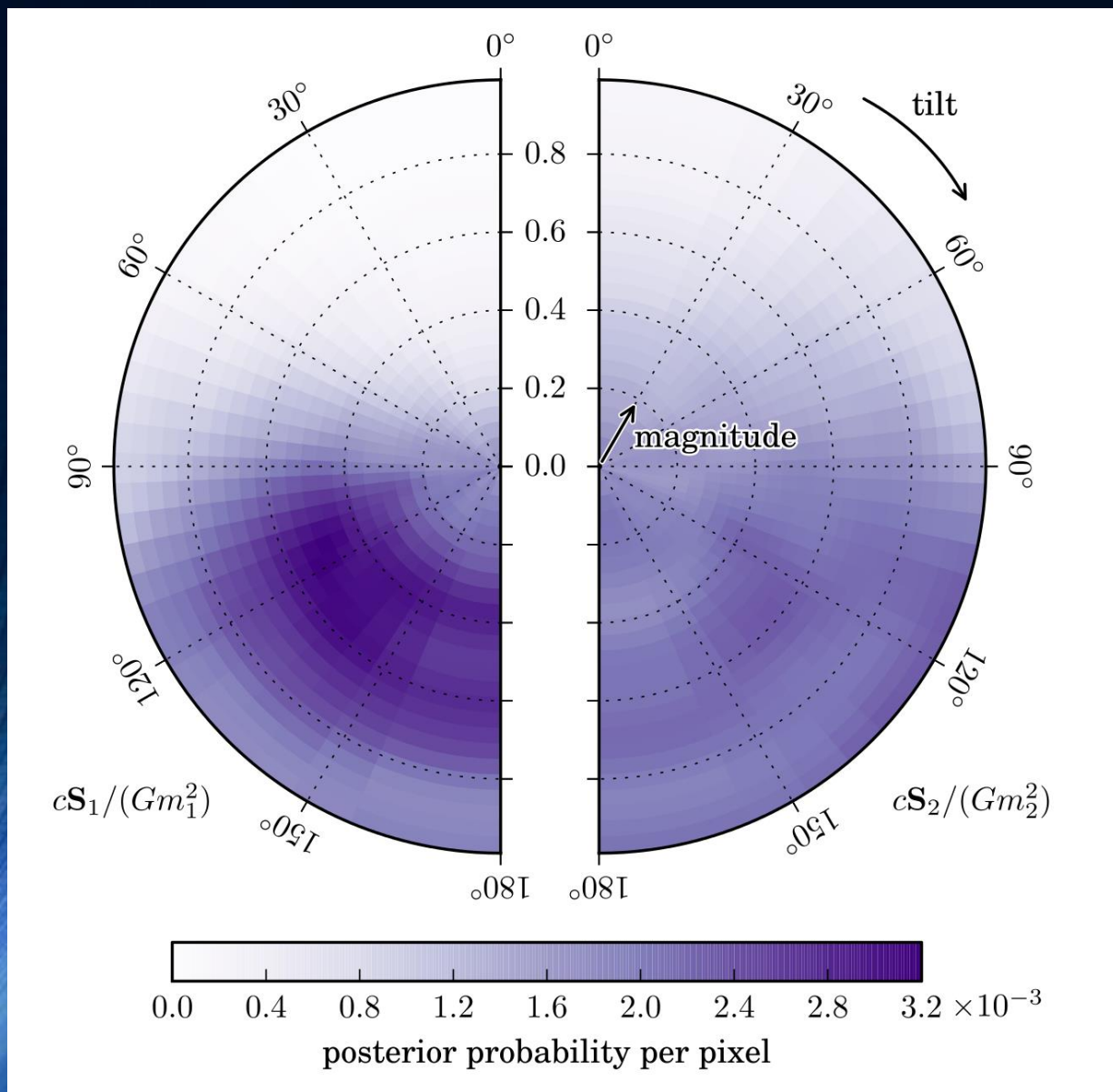


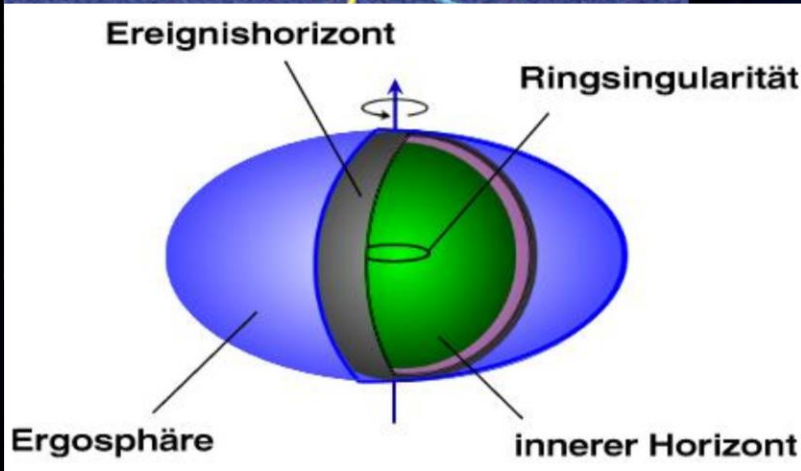
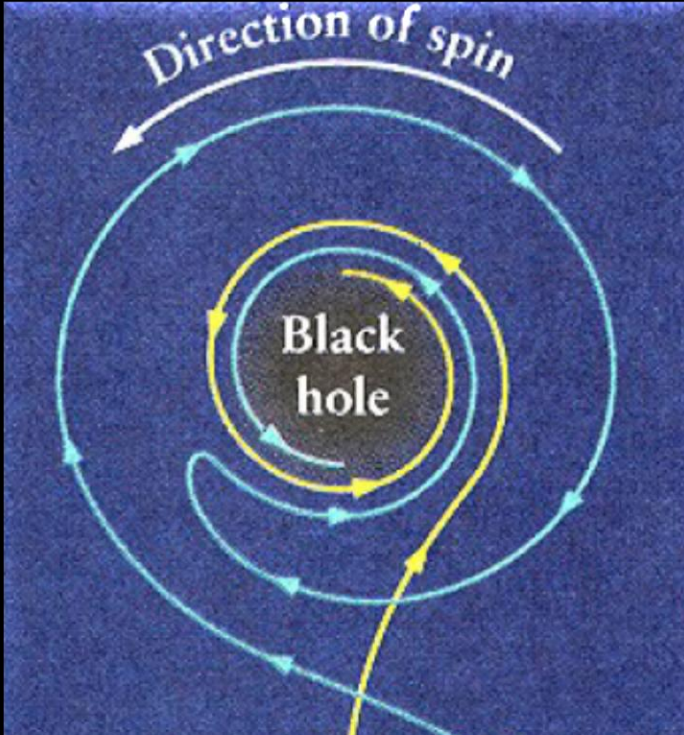
TABLE I. Source properties for GW170104: median values with 90% credible intervals. We quote source-frame masses; to convert to the detector frame, multiply by $(1+z)$ [50,51]. The redshift assumes a flat cosmology with Hubble parameter $H_0 = 67.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ and matter density parameter $\Omega_m = 0.3065$ [52]. More source properties are given in Table I of the Supplemental Material [11].

Primary black hole mass m_1	$31.2^{+8.4}_{-6.0} M_\odot$
Secondary black hole mass m_2	$19.4^{+5.3}_{-5.9} M_\odot$
Chirp mass \mathcal{M}	$21.1^{+2.4}_{-2.7} M_\odot$
Total mass M	$50.7^{+5.9}_{-5.0} M_\odot$
Final black hole mass M_f	$48.7^{+5.7}_{-4.6} M_\odot$
Radiated energy E_{rad}	$2.0^{+0.6}_{-0.7} M_\odot c^2$
Peak luminosity ℓ_{peak}	$3.1^{+0.7}_{-1.3} \times 10^{56} \text{ erg s}^{-1}$
Effective inspiral spin parameter χ_{eff}	$-0.12^{+0.21}_{-0.30}$
Final black hole spin a_f	$0.64^{+0.09}_{-0.20}$
Luminosity distance D_L	$880^{+450}_{-390} \text{ Mpc}$
Source redshift z	$0.18^{+0.08}_{-0.07}$

GW170104



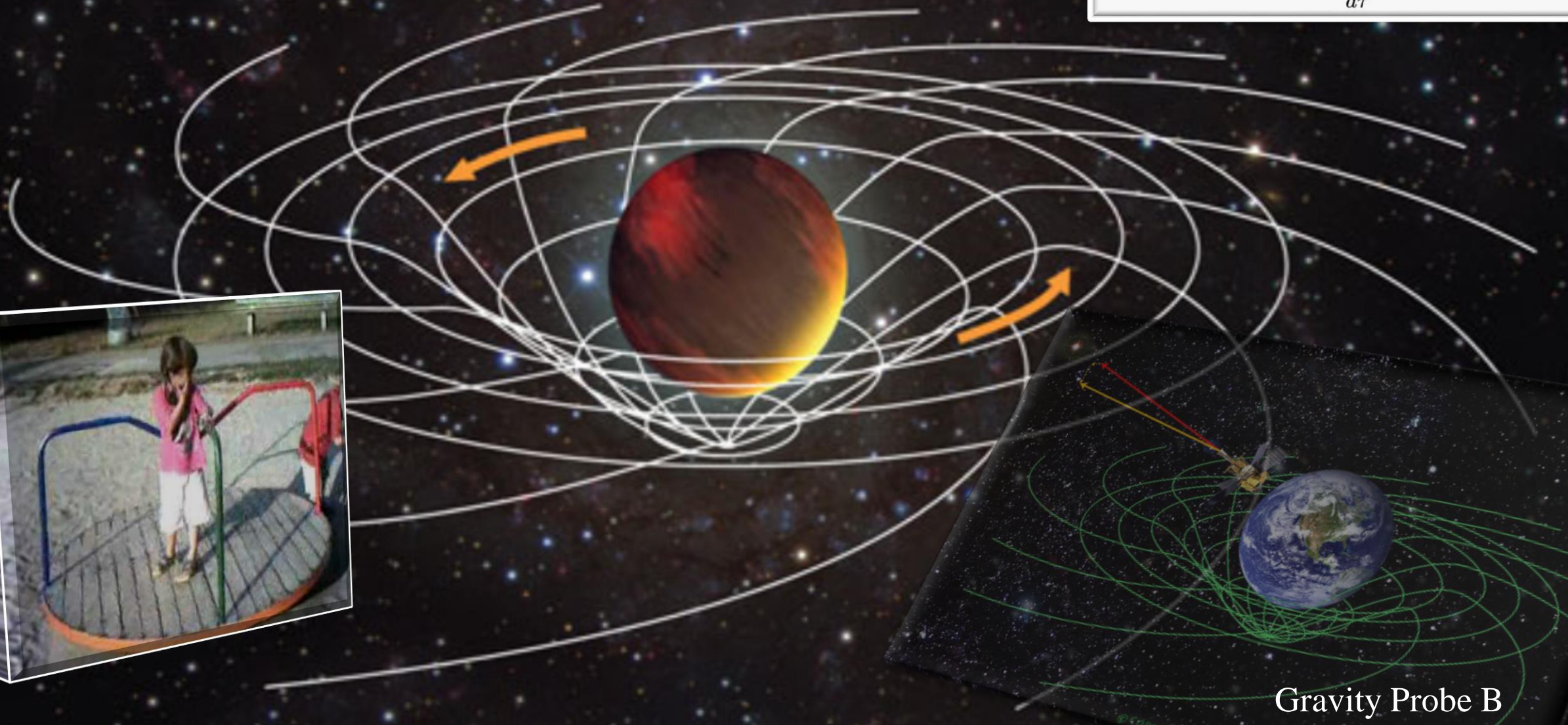
Rotierende schwarze Löcher und die Kerr Metrik



Der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging")

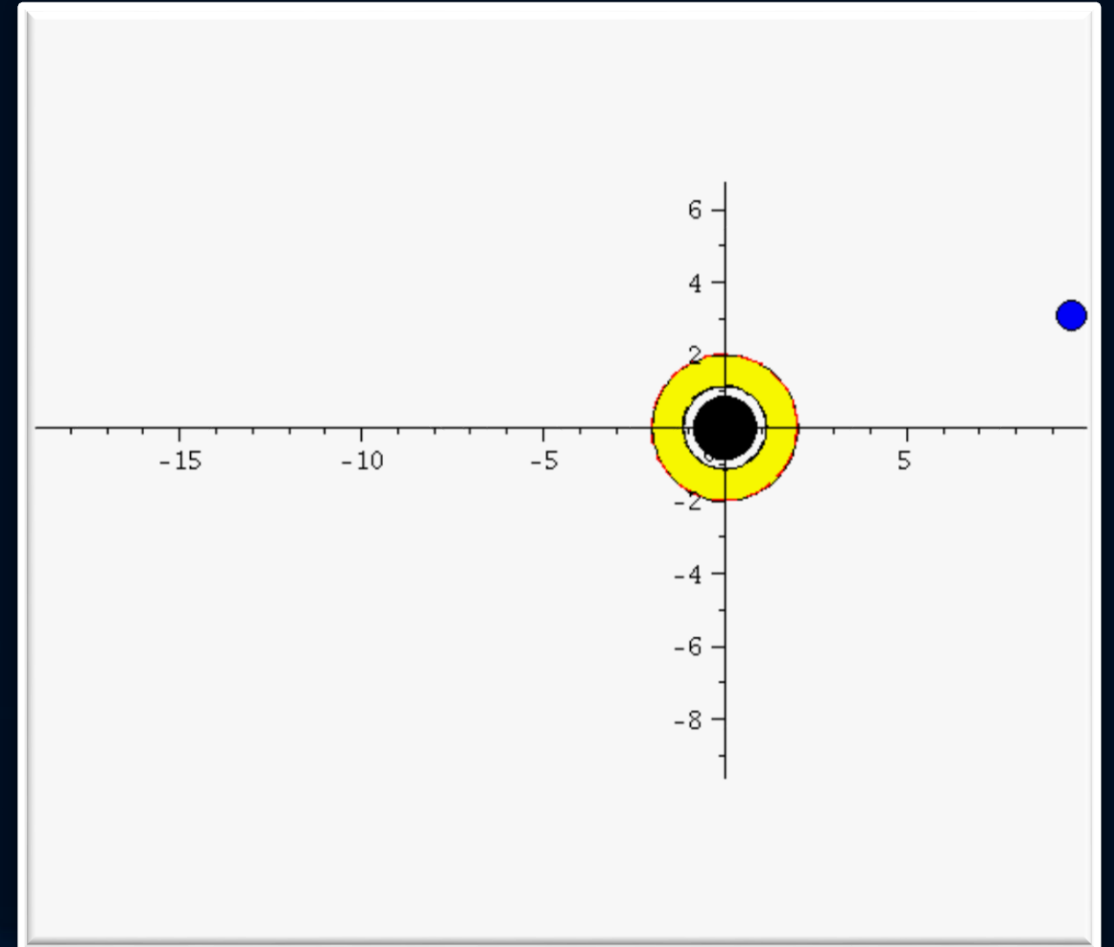
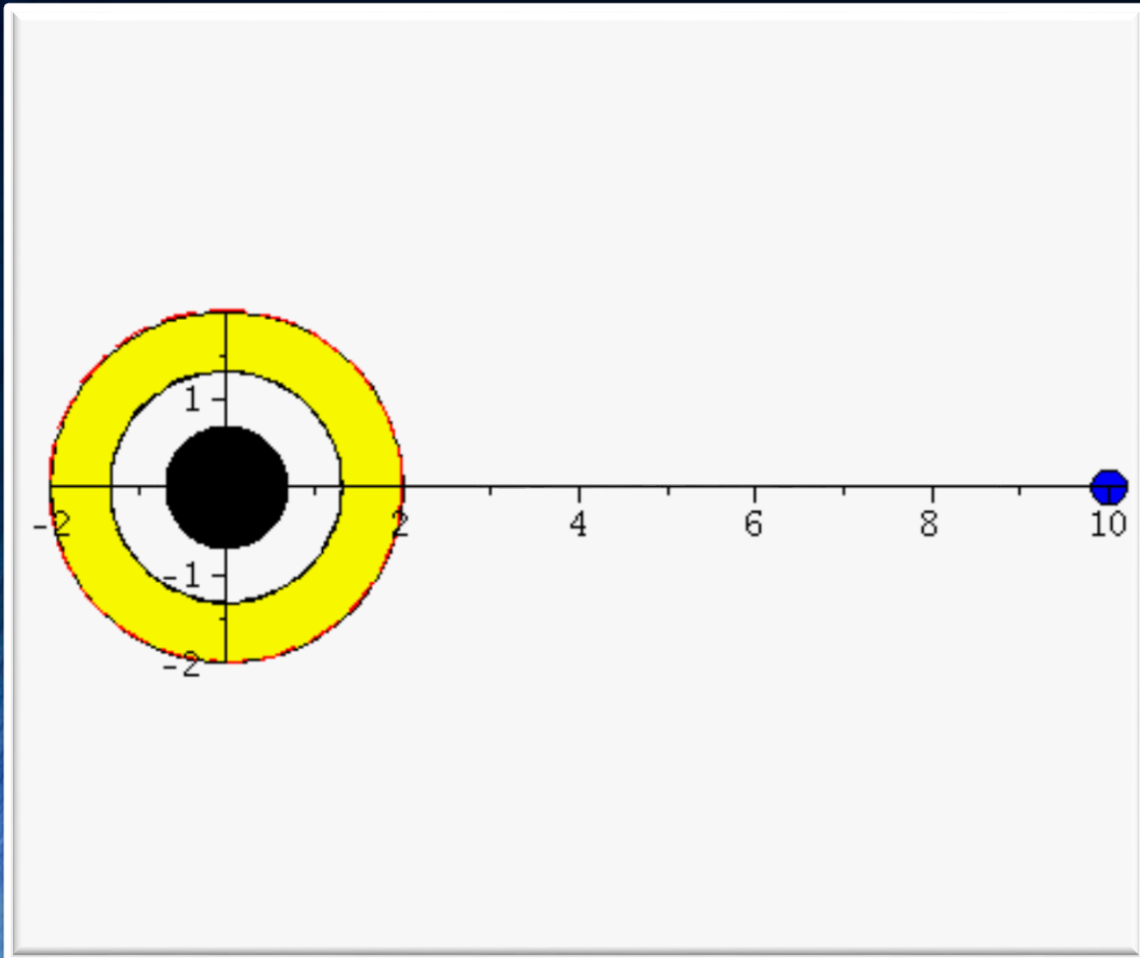
Experimente zur Bestätigung des Effektes: LARES, Gravity Probe B

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$



Gravity Probe B

Der Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging") und der Gravitomagnetische Effekt

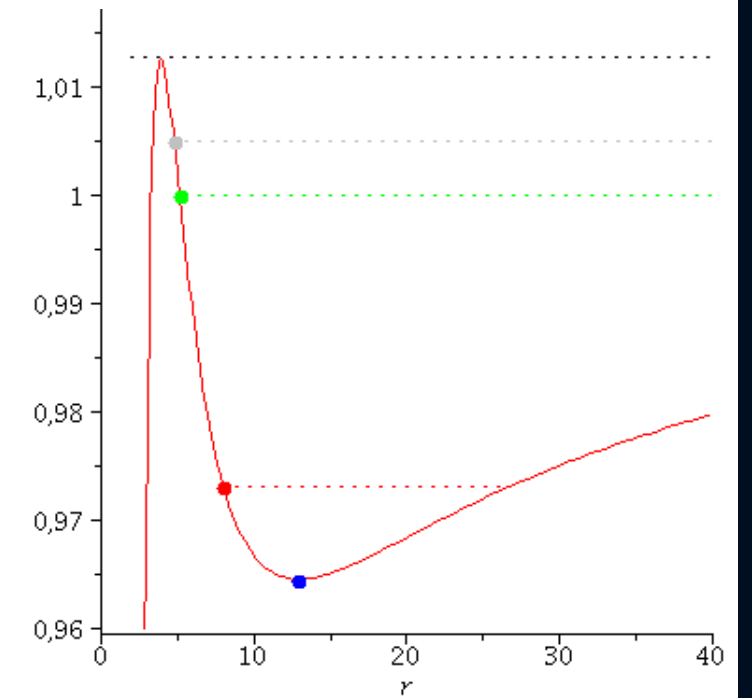
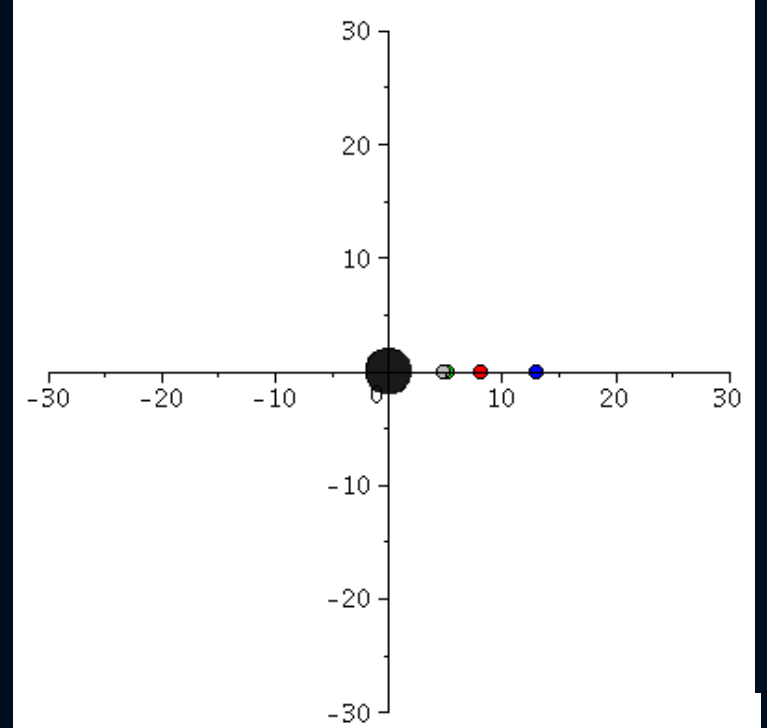
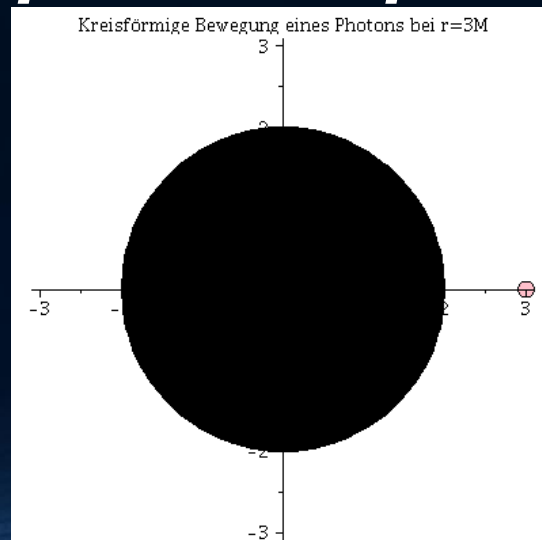
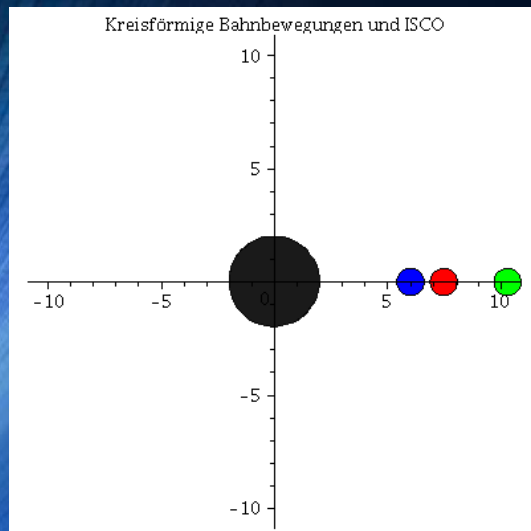


Geodätische Bewegung um ein nicht-rotierendes schwarzes Loch

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

The *ISCO* and the *photon sphere*



Effektives Potential des nicht-rotierendes schwarzes Loch

4. Gleichung: $\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, M, l) = \frac{1}{2} (E^2 - 1)$

wobei: $V(r, M, l) = \frac{l^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{M}{r}$,

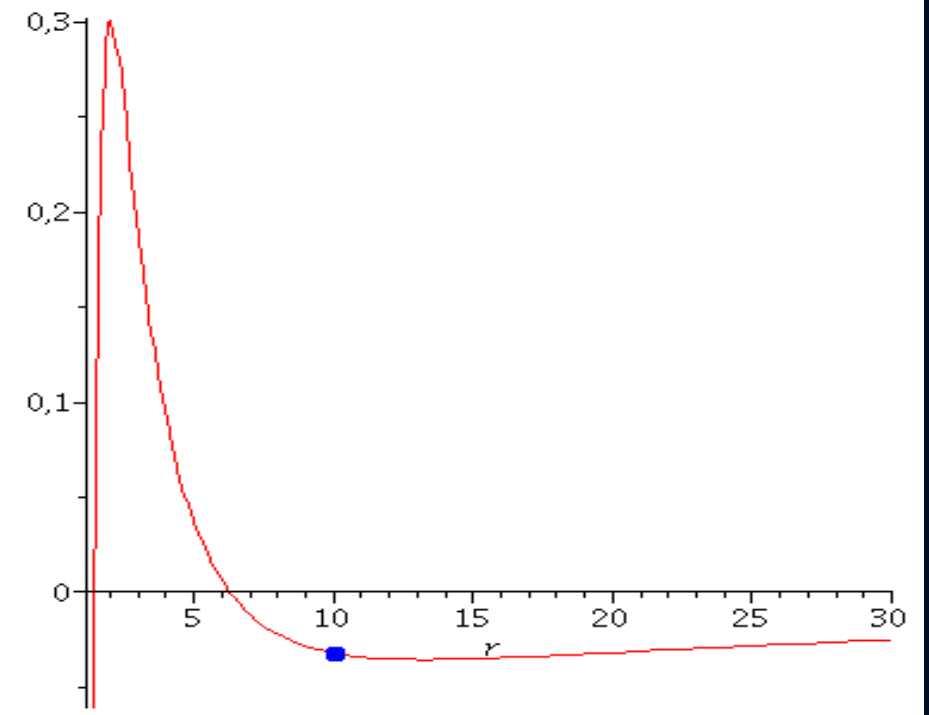
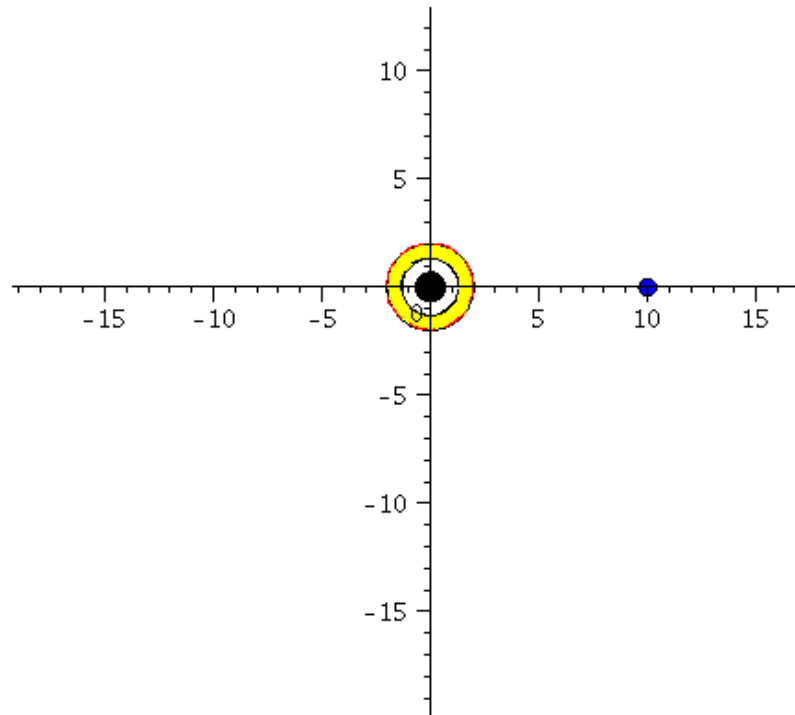
das Potential $V(r, M, l)$ hingegen wie folgt definiert:

4. Gleichung: $\rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + (V(r, M, l))^2 = E^2$

wobei: $V(r, M, l) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right)}$,

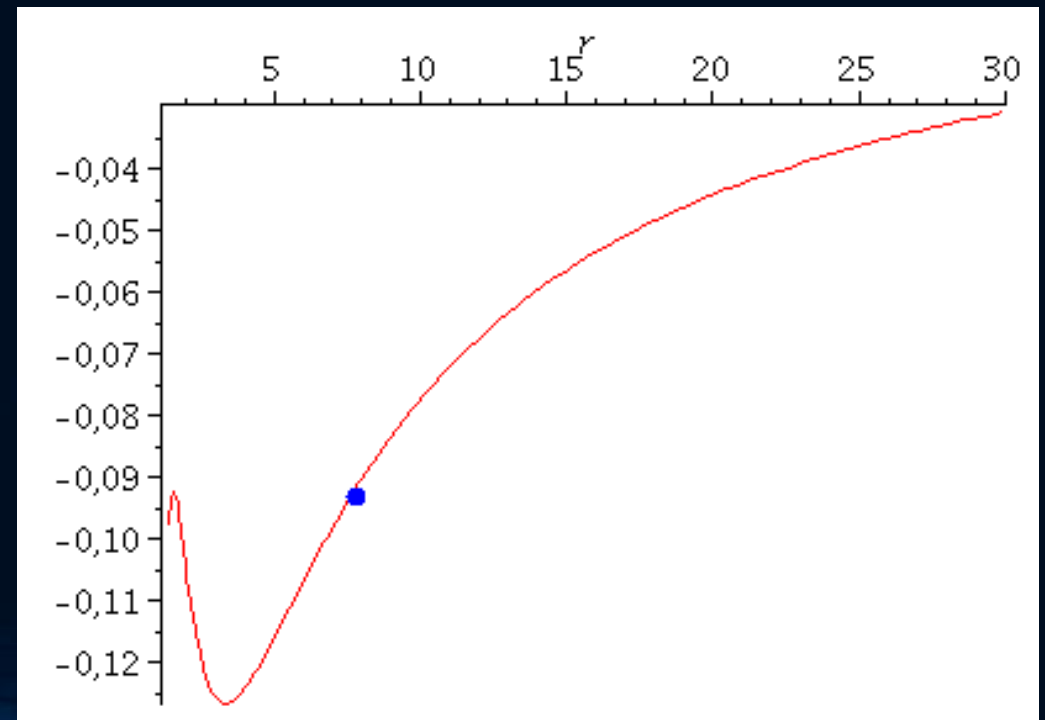
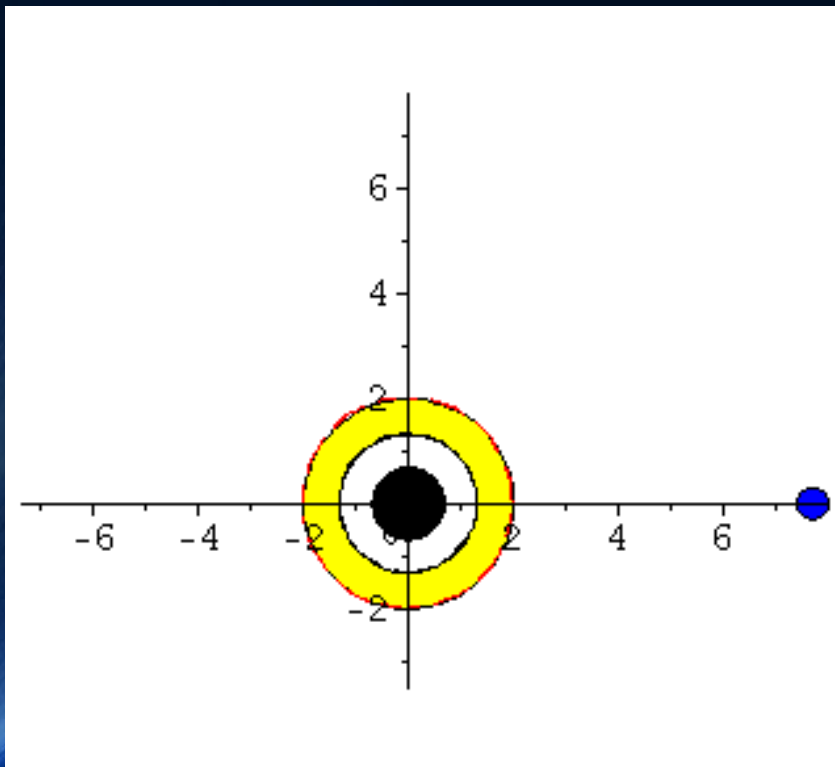
Kerr Metrik: Effektives Potential

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$



Kerr Metrik: Effektives Potential

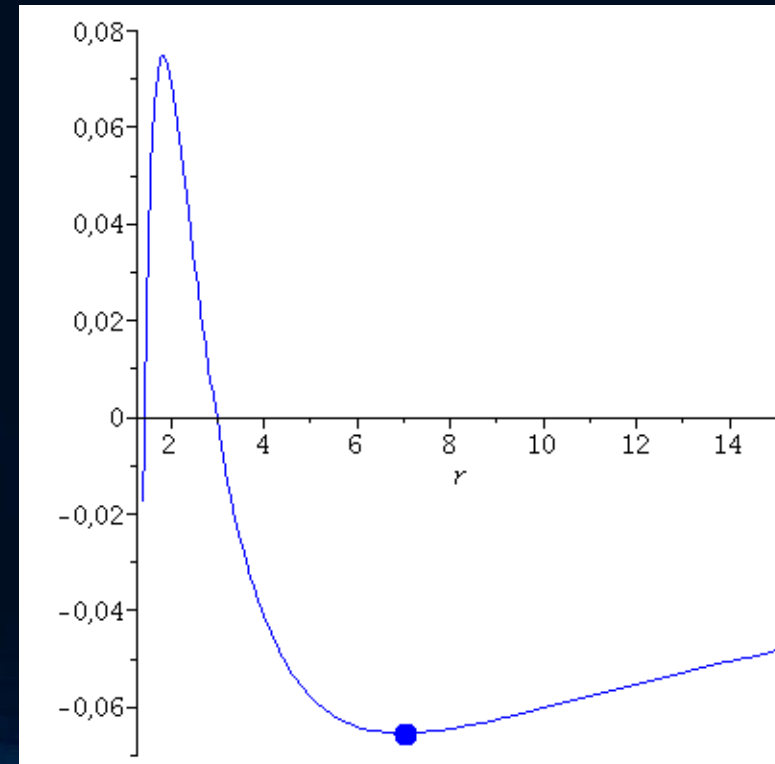
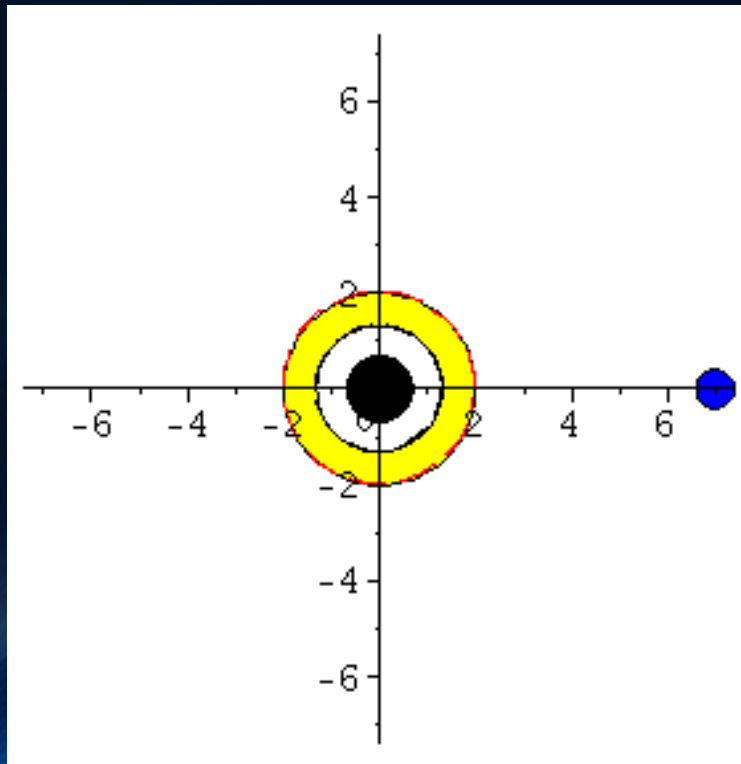
$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$



Kerr Metrik: Effektives Potential

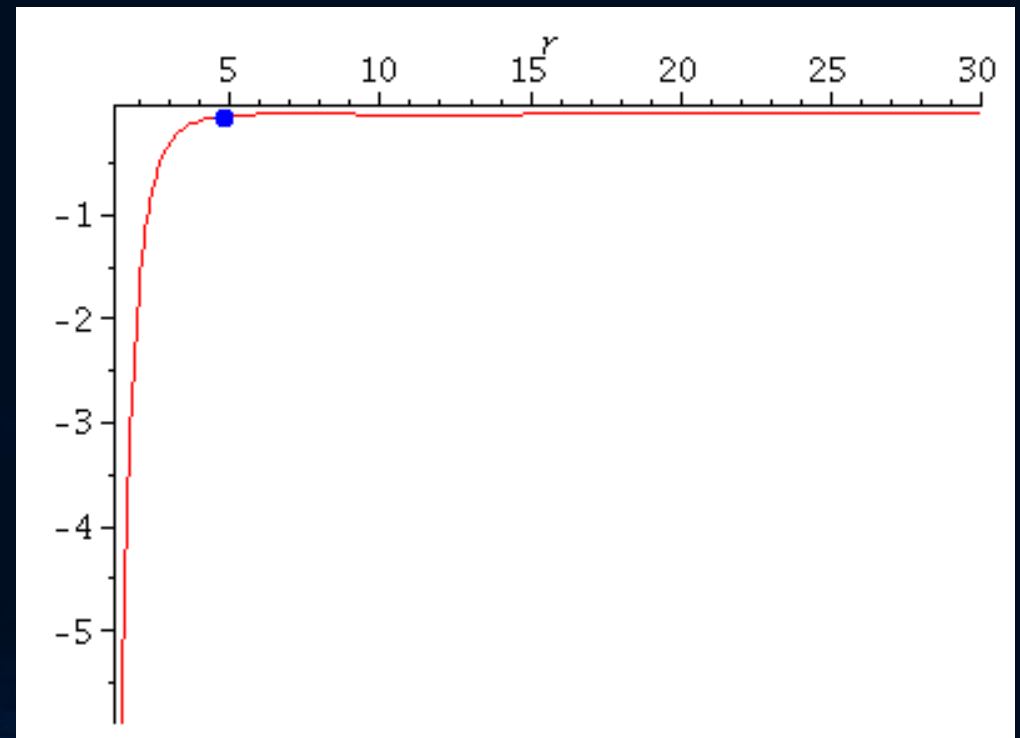
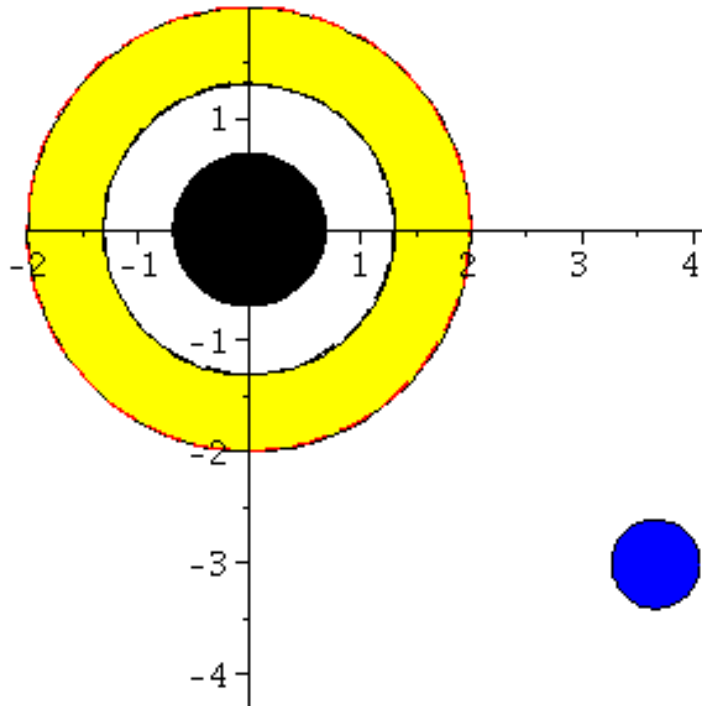
Kreisförmige Bahnbewegungen

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$



Kerr Metrik: Bewegungen innerhalb der Ergosphäre

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$



[Einführung](#)

[Teil I: Analytische Berechnungen und numerische Simulationen in Maple](#)

[Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)

[Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit](#)

[Aufgaben](#)

Download Maple Worksheed

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

5. Vorlesung

Einführung

Basierend auf den Ergebnissen der dritten Vorlesung des ersten Teils wird im folgenden die Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch vorgestellt.

Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch

Im folgenden wird die Geodätengleichung in vorgegebener Kerr-Raumzeit (in Boyer-Lindquist Koordinaten) betrachtet. Die Geodätengleichung beschreibt wie sich ein Probekörper (Masse = 0) im Raum bewegt und sagt voraus, dass diese Bewegung sich stets entlang der kürzesten Kurve, in der durch die Metrik beschriebenen gekrümmten

Eigenschaften der Kerr-Metrik

> **restart:**
with(tensor):
with(plots):
with(plottools):

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a in Boyer-Lindquist Koordinaten (a ist ein spezifischer Drehimpuls $a=J/M$ und wird als der sogenannte Kerr-Rotationsparameter bezeichnet). Die Kerr Metrik besitzt folgendes Aussehen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt}(r, \theta) & 0 & 0 & g_{t\phi}(r, \theta) \\ 0 & g_{rr}(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}(r, \theta) & 0 \\ g_{\phi t}(r, \theta) & 0 & 0 & g_{\phi\phi}(r, \theta) \end{pmatrix}, \text{ wobei:}$$
$$g_{tt}(r, \theta) = \left(\frac{1 - 2Mr}{\rho^2} \right), \quad g_{t\phi}(r, \theta) = \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\rho^2}, \quad g_{rr}(r, \theta) = -\frac{\rho^2}{\Delta},$$
$$g_{\theta\theta}(r, \theta) = -\rho^2, \quad g_{\phi\phi}(r, \theta) = -\left(\frac{r^2 + a^2 + 2Mra^2 \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right) \sin^2(\theta),$$
$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

Struktur der Ereignishorizonte, Flächen der stationären Grenze und Flächen unendlicher Rotverschiebung

Die Flächen der stationären Grenze (stationary limit surfaces) und die der unendlichen Rotverschiebung sind durch $g_{tt} = 0$ bestimmt. Man erhält zwei Lösungen, die man gewöhnlich mit den Symbolen r_{S^+} und r_{S^-} bezeichnet.

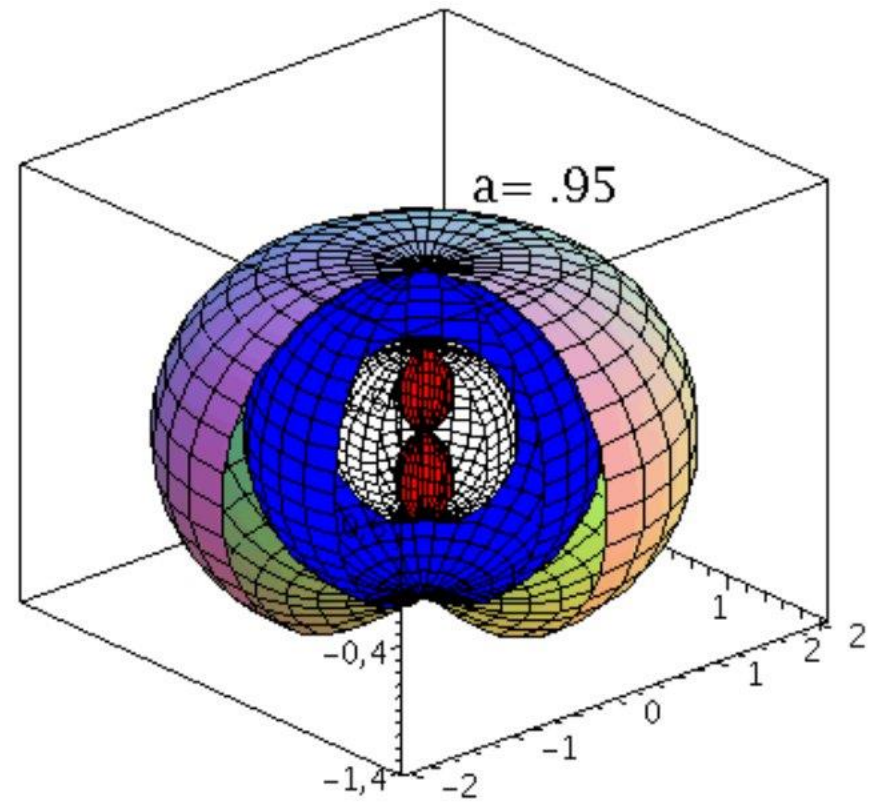
```
> UnRot:=solve(get_compts(g)[1,1]=0,r);
```

$$\text{UnRot} := M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)}, M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)} \quad (2.1.1.1)$$

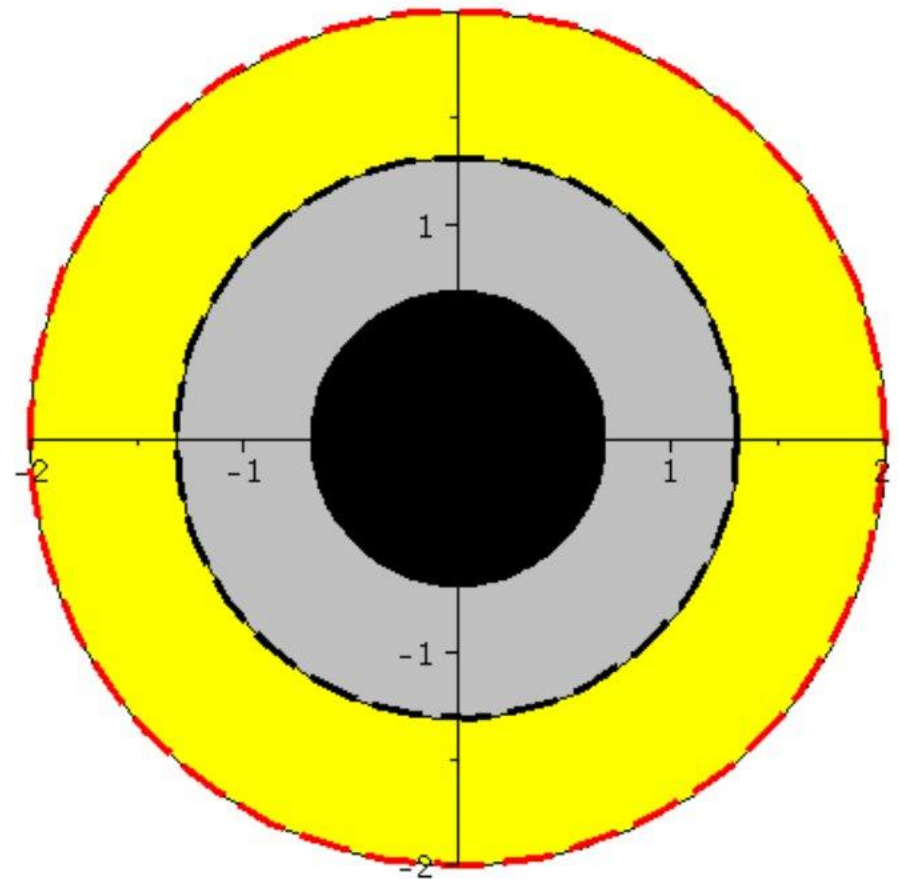
Die Ereignishorizonte sind durch $g^{rr} = 0$ (bzw. $g_{rr} \rightarrow \infty$) bestimmt. Man erhält wieder zwei Lösungen, die man gewöhnlich mit den Symbolen r_+ und r_- bezeichnet.

```
> Horizon:=solve(get_compts(ginv)[2,2]=0,r);
```

$$\text{Horizon} := M + \sqrt{M^2 - a^2}, M - \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2.1.1.2)$$

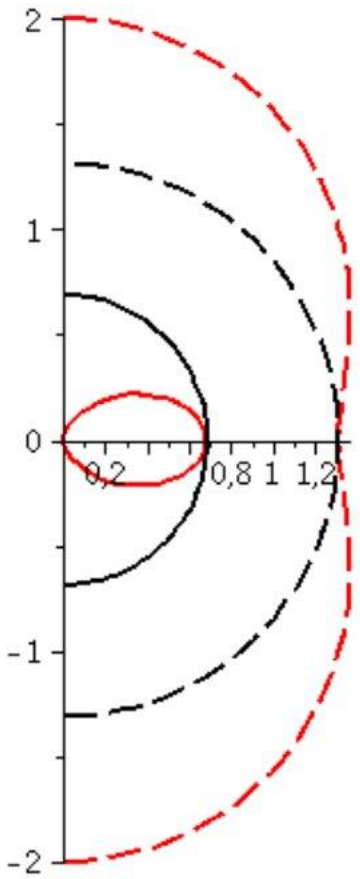


Horizontstruktur in der äquatorialen Ebene (Gelb: Ergosphäre, grau: Bereich zwischen äußerem und innerem Ereignishorizont, $a=0.95$):



Horizontstruktur in der polaren Ebene ($a=0.95$):

```
display({A,B,C,DD},scaling=constrained);
```



Animation der Horizontstruktur bei ansteigender Rotation des schwarzen Lochs:

1	-3	1	-3	1	-3
---	----	---	----	---	----

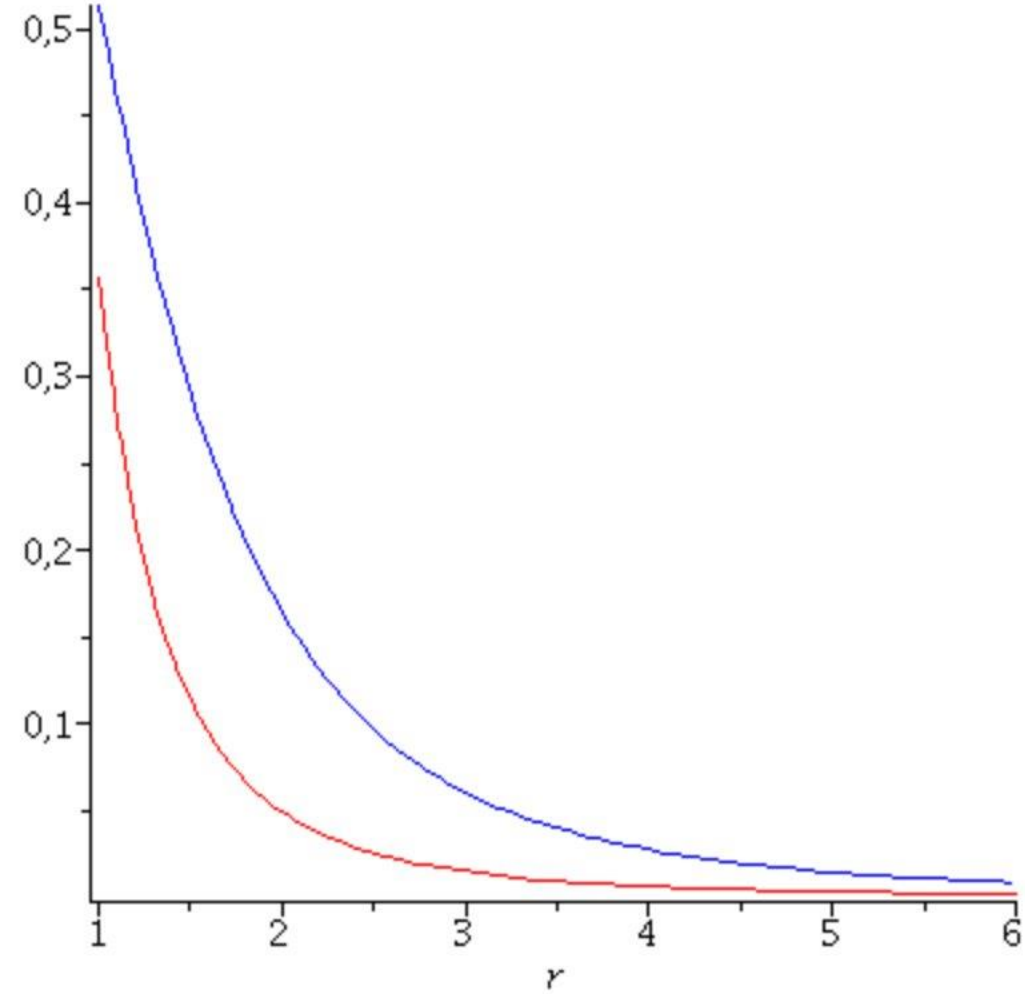
Die Rotation der raumzeitlichen Struktur um das schwarze Loch (das Frame dragging)

Ein rotierendes schwarzes Loch zieht die Raumzeit mit sich mit. Die Rotationsfrequenz mit der die Raumzeit mitgeführt wird nennt man "Frame dragging" Frequenz; sie quantisiert, mit welcher Frequenz ein im Eigensystem "ruhender" Probekörper von der ihm zugrundeliegenden Raumzeit mitgezogen wird:

$$\omega(r) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{d\phi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}}$$

```
> FrameDrag:=get_compts(ginv)[1,4]/get_compts(ginv)[1,1];
#FrameDrag:=-get_compts(g)[1,4]/get_compts(g)[4,4];
```


Frame dragging Frequenz ($a=0.95$ (blau) , $a=0.2$ (rot))



Radial in ein rotierendes schwarzes Loch einfallender Probekörper

Wir betrachten nun einen Probekörper der radial in ein rotierendes schwarzes Loch fällt.

```
> restart:  
with( tensor ):  
with(plots):  
with(plottools):
```

Definition der kovarianten Raumzeit-Metrik eines rotierenden schwarzen Lochs der Masse M und Rotation a in Kerrschildkoordinaten:

```
> coord := [t, r, theta, phi]:  
rho2:=r^2+(a*cos(theta))^2:  
Delta:=r^2-2*M*r+a^2:Sig2:=(r^2+a^2)^2-a^2*Delta*(sin(theta))^2:  
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):  
g_compts[1,1] := (1-2*M*r/rho2):  
g_compts[1,4] := +(2*a*M*r*(sin(theta))^2)/rho2:  
g_compts[2,2] :=-rho2/Delta:  
g_compts[3,3] := -rho2:  
g_compts[4,4] := (r^2+a^2-2*M*r*a^2*(sin(theta))^2)/rho2:
```

Anfangswerte:

Zur Zeit $t=0$ sei der fallende Körper an der folgenden Position: $(r=10, \theta=\pi/2, \phi=0)$, die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0. Wir beschreiben den Fall aus der Sichtweise eines im Unendlichen ruhenden Beobachters. Bemerkung: Der Anfangswert dt_0 ergibt sich hierbei aus dem infinitesimalen Weglängenelement $ds^2=1$ eines massiven Probekörpers:

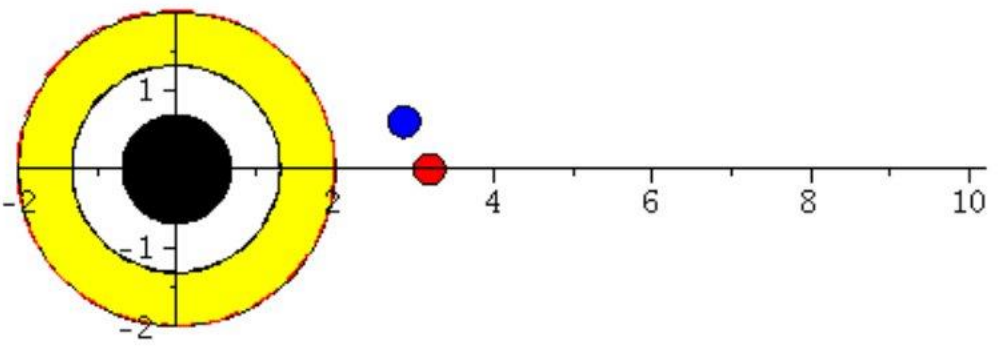
```
> dt=solve(evalf(subs({M=setM,a=seta,theta=Pi/2,dr=0,dtheta=0,dphi=0,r=10},ds2=1)),dt);
```

$$dt = (1.118033989, -1.118033989) \quad (2.2.4)$$

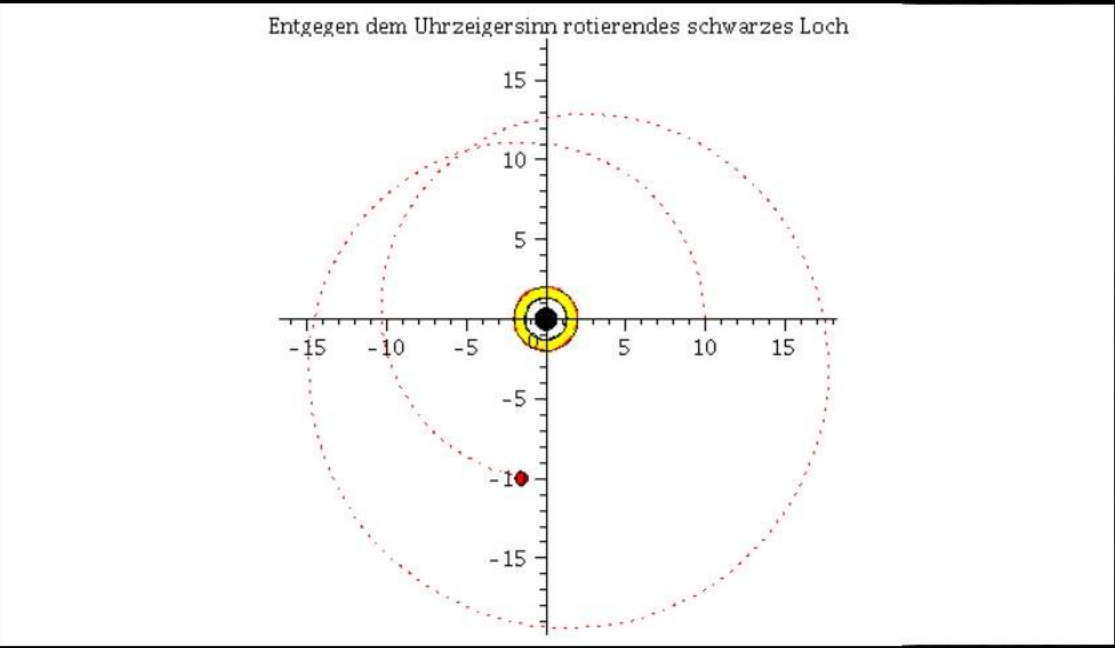
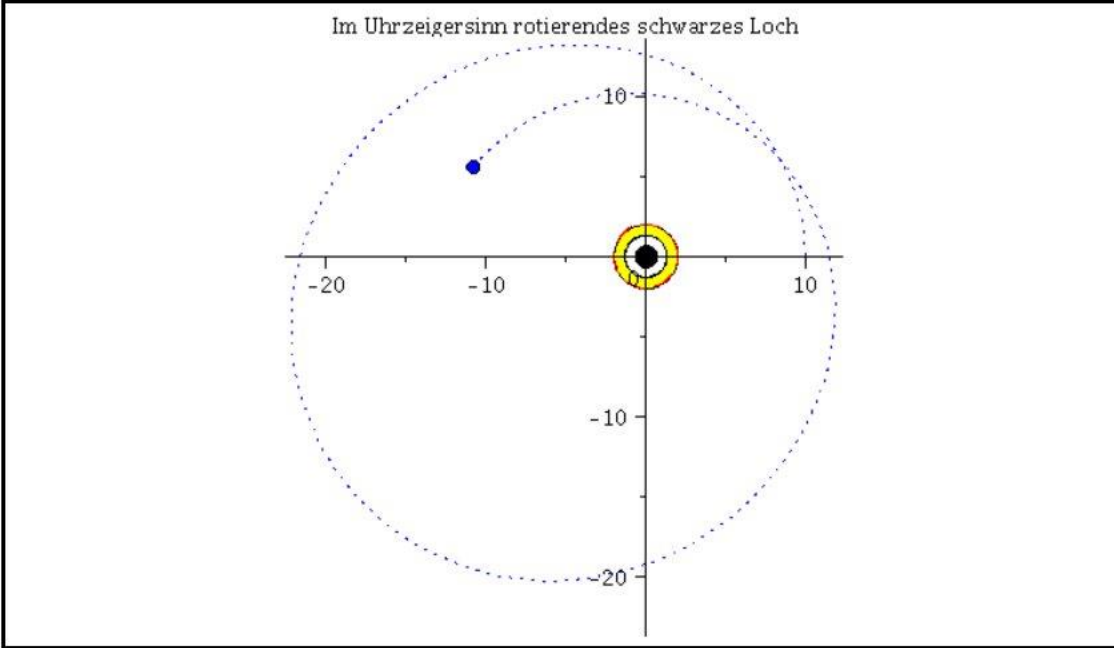
```
>      r0:=10:
      t0:=0:
      theta0:=Pi/2:
      phi0:=0:
      dr0:=0:
      dt0:=evalf(1/sqrt(1-2/r0)):
      dtheta0:=0:
      dphi0:=0:
```

Numerisches Lösen der Geodätengleichung:


```
> display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true);
```



```
> Animat1:=display([seq(Ani[i],i=0..frames)],insequence=true,scaling=constrained,title="Im Uhrzeigersinn rotierendes schwarzes Loch");  
Animat2:=display([seq(Ani1[i],i=0..frames)],insequence=true,title="Entgegen dem Uhrzeigersinn rotierendes schwarzes Loch");  
display(Array([Animat1,Animat2]));
```



Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

General Theory of Relativity on the Computer

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main (Sommersemester 2016)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 11.04.2016

Erster Vorlesungsteil: Allgemeine Relativitätstheorie mit Maple

6. Vorlesung

Die Kerr Metrik: Effektives Potential, kreisförmige Bewegungen, die innerste stabile Kreisbahn und der gravitomagnetische Effekt

Basierend auf den Ergebnissen der geodätischen Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes Kerr schwarzes Loch (siehe Vorlesung 5), werden die möglichen Bewegungen mittels eines definierten effektiven Potential näher verstanden. Zusätzlich wird der durch den Mitführungseffekt der Raumzeit ("Frame-Dragging" bzw. Lense-Thirring Effekt) verursachte, gravitomagnetische Effekt an einem speziellen Beispiel veranschaulicht.

Bahnbewegungen in der Ebene und das effektive Potential $V(r)$

ähnlich wie im nichtrotierenden Fall (siehe Vorlesung 3) charakterisieren wir die unterschiedlichen Bahnbewegungen mittels eines effektiven Potentials:

Berechnung der Geodätengleichung als Funktion des affinen Parameters λ : Die Geodätengleichung ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^0 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 r}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^1 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^2 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \\ \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} &= -\Gamma_{\nu\rho}^3 \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \end{aligned} ,$$

wobei λ ein affiner Parameter (z.B. die Eigenzeit), t , r , θ und ϕ die sphärischen Koordinaten und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ die Christoffel Symbole zweiter Art darstellen.

> eqns:=geodesic_eqns(coord, lambda, Cf2);

$$\begin{aligned} eqns := & \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} \phi(\lambda) - \left(2 \sin(\theta)^2 M a (-r^2 + a^2 \cos(\theta)^2) \left(\frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \right) \left(\frac{d}{d\lambda} r(\lambda) \right) \right) \right] / \\ & (a^6 \cos(\theta)^4 + a^4 \cos(\theta)^4 r^2 + 2 r^2 a^4 \cos(\theta)^2 + 2 r^4 a^2 \cos(\theta)^2 \\ & - 4 M r^3 a^2 \cos(\theta)^2 + r^6 + r^4 a^2 - 2 M r^5 - 4 M^2 r^2 a^2 \cos(\theta)^2 - 2 \cos(\theta)^4 M r a^4) \end{aligned}$$

```

eq2:=simplify(subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda),theta(lambda)(lambda)=theta(lambda)},eq2)):
eq3:=simplify(subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda),theta(lambda)(lambda)=theta(lambda)},eq3)):
eq4:=simplify(subs({r(lambda)(lambda)=r(lambda),theta(lambda)(lambda)=theta(lambda)},eq4)):

```

Infinitesimales Weglängenelement ds^2 :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

```

> dx:=create([1], array([dt,dr,dtheta,dphi]));
ds2:=get_compts(prod(dx,lower(g,dx,1),[1,1]));
ds2:=collect(simplify(ds2), [dt,dr,dtheta,dphi]):
ds2a:=simplify(coeff(ds2, dt, 2)):
ds2b:=simplify(coeff(ds2, dr, 2)):
ds2c:=simplify(coeff(ds2, dtheta, 2)):
ds2d:=simplify(coeff(ds2, dphi, 2)):
ds2e:=simplify(coeff(ds2, dphi, 1)/dt):
ds2:=ds2a*dt^2+ds2e*dt*dphi+ds2b*dr^2+ds2c*dtheta^2+ds2d*dphi^2;

```

$$(-r^2 - a^2 \cos^2(\theta) + 2Mr) dt^2 - 4aMr \sin^2(\theta) dt d\phi$$

Festlegung der Anfangswerte:

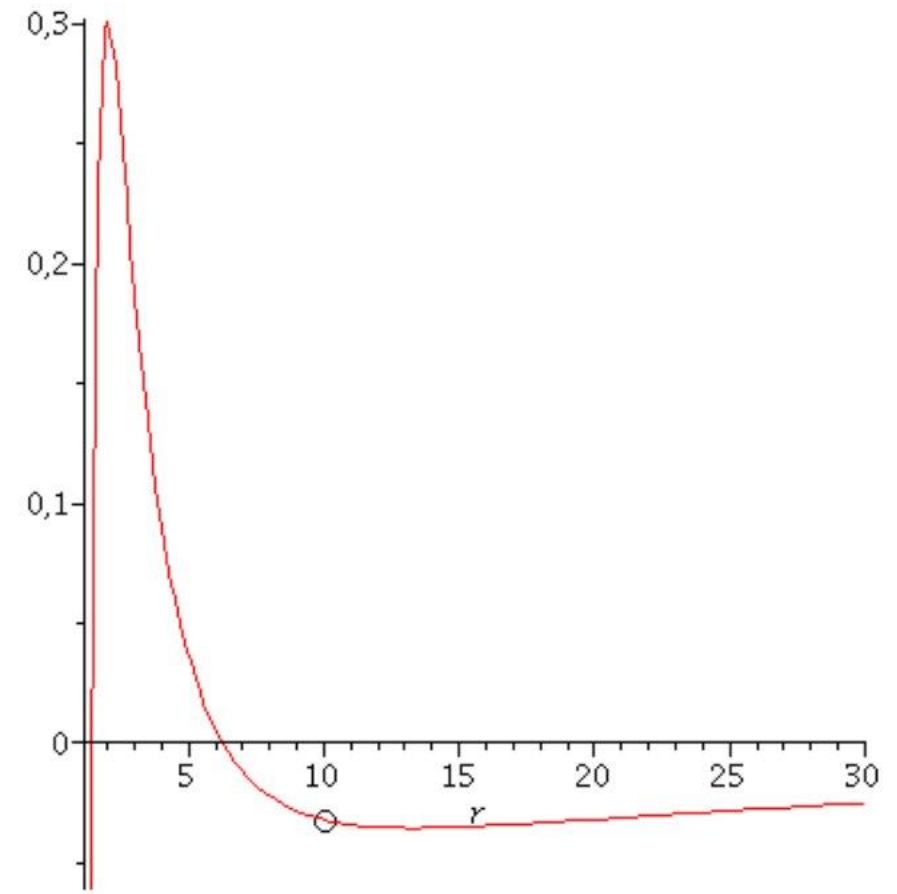
>

```
setM:=1:
seta:=0.95:
r0:=10:
t0:=0:
theta0:=Pi/2:
phi0:=0:
dr0:=0:
dtheta0:=0:
dphi0:=0.041:
dt0:=solve(subs({theta=theta0,dphi=dphi0,dr=dr0,dtheta=dtheta0,M=1,a=0.95,r=10},ds2)=1,dt)[1]:
```

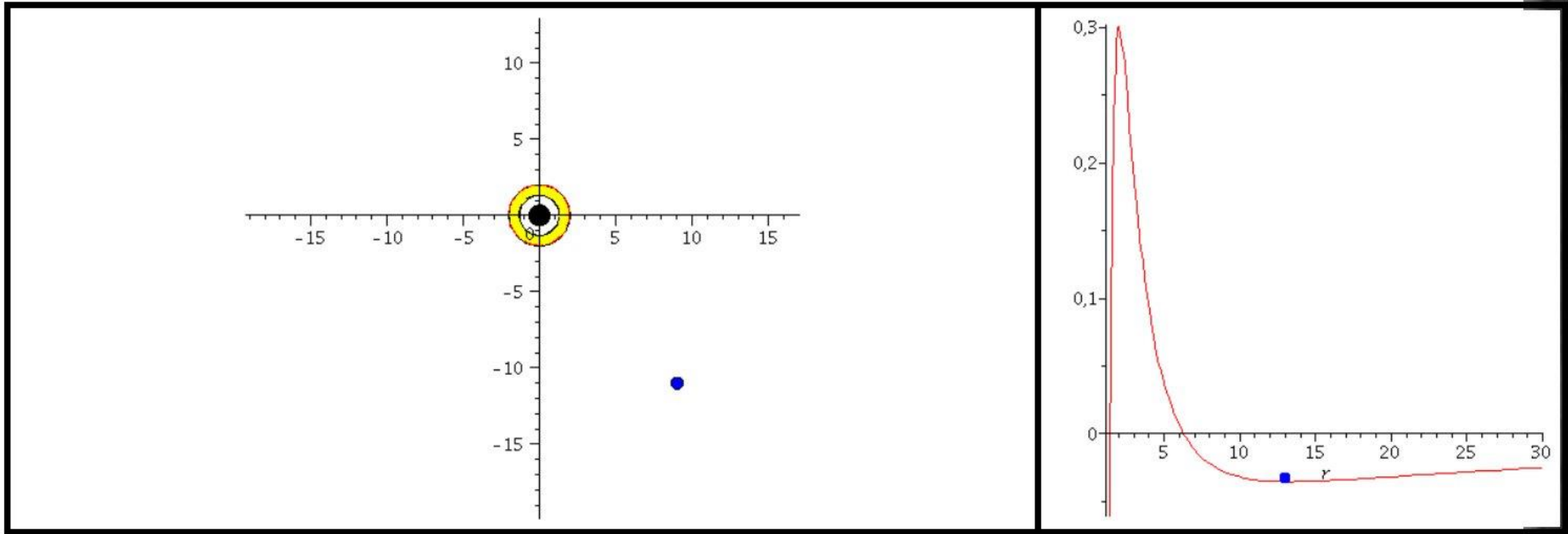
In der Literatur wird die Bewegung eines Probekörpers um ein rotierendes schwarzes Loch mittels eines definierten, effektiven Potentials illustriert (siehe z.B. Hartle- bzw. Hobson Buch). Dieses Potential hängt von dem, bei der Bewegung erhaltenem Drehimpuls pro Masse m und der Probekörper-Energie pro Masse ab. Die im Zentralfeld möglichen Bewegungen werden mittels zweier erhaltener Größen (l : Drehimpuls pro Masse m und E : Energie pro Masse) charakterisiert. Die folgende Abbildung zeigt (in der Nomenklatur vom Hartle-Buch) das effektive Potential als Funktion des Radius bei den obigen gewählten Anfangswerten:

$$V_{eff}(r, M, l, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(l - aE)^2}{r^3}$$

$$VeffHartleRot := (r, M, l, a, en) \rightarrow -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{l^2 - a^2 (er^2 - 1)}{r^2} - \frac{M(l - a en)^2}{r^3}$$



Numerische Lösung bei vorgegebenen Anfangswerten:



>

Kreisförmige Bewegung eines Probekörper und der ISCO

08. Juni 2018, 21.00 Uhr: Night of Science 2018, Campus Riedberg in Frankfurt am Main

M.Hanauske: Tanz der Neutronensterne

NIGHT
OF
SCIENCE 2018



08.06.2018

...es wird wieder spät.