

# Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

*ZOOM ONLINE MEETING  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
11. JUNI, 2021*

*MATTHIAS HANAUSKE*

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
D-60438 FRANKFURT AM MAIN  
GERMANY*

Aufgrund der Corona Krise findet die Vorlesung und die Übungstermine auch in diesem Semester nur Online statt.

9. Vorlesung

# Wiederholung 8. Vorlesung

## Parallele Programmierung mit OpenMP und MPI

### Vorlesung 8

In der vorigen Vorlesung hatten wir in das parallele Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI eingeführt und am Beispiel eines einfachen numerischen Problems (die Integration einer Funktion) die grundlegende Vorgehensweise eines OpenMP und MPI Programms kennengelernt. In dieser Vorlesung werden wir das numerische Lösen der Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV Gleichungen, siehe Vorlesungen 6 und 7) mittels des Eulerverfahrens in einem C++ Programm durchführen und die besprochenen Parallelisierungsparadigmen (OpenMP und MPI) anwenden. Es wird sowohl ein sequentielles C++ Programm zur Berechnung der Eigenschaften von Neutronensternen, als auch eine mit OpenMP und MPI parallelisierte Version besprochen (siehe auch [Teil II: Paralleles Programmieren mit C++ und OpenMP/MPI](#)).

#### Sequentielles C++ Programm zur Berechnung der Eigenschaften von Neutronensternen durch numerisches Lösen der TOV Gleichungen mittels des Eulerverfahrens

Ausgehend von der, in der Vorlesung 6 hergeleiteten TOV Gleichung, wird mittels des einfachen Euler-Verfahrens die Differentialgleichung in C++ implementiert (siehe [TOV sequentielle Version 2.1](#)). Die numerisch berechneten Werte des Neutronensternradius und seiner gravitativen Masse werden am Ende des Programms im Terminal ausgegeben. Die berechneten Resultate der Druck- und Energiedichtenprofile kann man mit den in der Vorlesung 6/7 mit Python (bzw. Maple) berechneten Ergebnissen vergleichen (siehe [TOV sequentielle Version 2.1 mit Ausgabe der Ergebnisse in ein Textfile](#) und Jupyter Notebook [Die TOV-Gleichung: Zusätzliche Betrachtungen und Vergleich mit C++ Ergebnissen](#)). Man kann zusätzlich, auf sequenzielle Weise, mehrere Neutronensterne bei festgelegter Zustandsgleichung berechnen. Dies wird einfach realisiert, indem man eine weitere for-Schleife über die zentrale Energiedichte einbaut. Der Hauptunterschied zur vorigen sequentiellen Version ist, das nun eine ganze Sequenz von Neutronensternen berechnet wird und man sich somit die Masse-Radius-Relation bei gegebener Zustandsgleichung vorstellen kann. Zusätzlich zur Version 2.1) werden auch noch die



### Vorlesung 8

In dieser Vorlesung werden wir uns mit dem Programmierparadigma der parallelen Programmierung befassen. Wie schon am Ende der vorigen Vorlesung erwähnt, ist es bei der Konzeption von rechenintensiven Computerprogrammen wichtig, dass die Rechenleistung des Computers stets voll ausgelastet ist und separate, voneinander unabhängige Teilaufgaben innerhalb der Programme möglichst gleichzeitig (parallel) berechnet werden. Da die meisten der großen Computerprogramme im Bereich der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Programmiersprache C/C++ geschrieben sind, werden wir die parallele Programmierung im Folgenden am Beispiel dieser Programmiersprache verdeutlichen. Die Parallelisierung eines Python-Programms ist aber natürlich auch möglich und kann z.B. mittels des Python-Moduls ([threading](#) oder [multiprocessing](#)) implementiert werden, bzw. unter Zuhilfenahme von [MPI for Python](#) realisiert werden.

Die Programmiersprachen C/C++ und Python unterscheiden sich voneinander und bei der Erstellung der Quelldateien (source codes) eines C++ Programms ist einiges zu beachten. Jede Variable, die im Programm benutzt wird muss zunächst mit einem Typ deklariert werden (z.B. "int" für eine ganze Zahl, oder "double" für eine Fließkommazahl), mit dem Präprozessorbefehl "#include" bindet man benötigte "Header-Dateien" in das Programm ein (ähnlich den Python Bibliotheken/Modulen), die Strukturierung eines C++ Programms benötigt nicht die in Python verwendete Block-Einrückung (z.B. bei for-Schleifen), sondern verwendet geschweifte Klammern und in C/C++ muss man den Quelltext mittels eines Kompilers in ein ausführbares Programm umwandeln. Die Art und Weise wie das parallele Programm zu konzipieren ist, hängt

# Python und C/C++ Programme

Auf der OLAT Seite des Kurses finden Sie die im folgenden besprochenen C/C++ Programme

UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Startseite Lehren & Lernen Kursangebote Allgemeine Relativität...

Allgemeine Relativitätstheorie mit dem Computer

- Allgemeine Relativitätstheorie mit
  - Literaturverzeichnis
  - Einschreibung
  - Kursinhalt
  - Vorlesungsaufzeichnung
  - Aufgaben
  - Programme
    - Einführung in Jupyter Notebook:
    - Allgemeine Relativitätstheorie m
    - Eigenschaften der Schwarzschild
    - Radialer Fall eines Probekörper:
    - Klassifizierung unterschiedlicher
    - Der ISCO und die Photonensph:
    - Maple Worksheets I
    - Das rotierende schwarzes Loch:
    - Das rotierende schwarzes Loch:
    - Maple Worksheets II
    - Die Tolman-Oppenheimer-Volk
    - Die TOV-Gleichung: Zusätzliche
    - Jupyter Notebooks
    - Python und C/C++ Programme**
  - Mitteilungen

Python und C/C++ Programme

Python und C/C++ Programme

<input type="checkbox"/>	Dateityp	Name
<input type="checkbox"/>	📁	Introduction
<input type="checkbox"/>	📁	TOV
<input type="checkbox"/>	📄	TOV-Sequence-plot2021.py

3 Einträge

## Teil II: Parallele OpenMP - Version des TOV-Programms mit geordneter Ausgabe in eine Datei und variabler Zustandsgleichung

Diese Version entspricht Version 2.5), wobei die als Funktion definierte Zustandsgleichung variabler gestaltet wurde (EOS:  $(e(P, K, \gamma) = (P/K)^{1/\gamma})$  für Neutronensterne und Weiße Zwerge bzw.  $(e(P, \text{Bag}) = 3p + 4 \text{ Bag})$  für Quarksterne im MIT-Bag Model). Wichtig ist, dass man das Programm mit dem folgenden Befehl compiliert: 'c++ -fopenmp TOV\_parallel\_omp.cpp'. Führt man das Programm mit './a.out' aus, so erkennt man, dass es (in Abhängigkeit wieviele CPU-Kerne man in seinem Computer hat), viel schneller läuft.

### Struktur des parallelen OpenMP-C++ Programms



```
#include <iostream>           //Ein-/Ausgabe (Include-Dateien)
#include <math.h>             //Mathematisches
#include <omp.h>              //OpenMP
#include <stdio.h>            //Fuer die Ausgabedatei

//Definition einer polytropen Zustandsgleichung
double eos(double p, double K, double gamma)
{
    double e;
    e=pow(p/K, 1.0/gamma);
}
```

## Teil II: Parallele MPI - Version des TOV-Programms mit geordneter Ausgabe in eine Datei und variabler Zustandsgleichung

Diese Version entspricht der OpenMP-Version Version 2.6), benutzt jedoch MPI und nicht OpenMP zur Parallelisierung und kann somit auch auf heutigen Großrechneranlagen, die über eine hohe Anzahl von Rechenknoten mit einer Vielzahl von CPU-Kernen verfügen, parallel ausgeführt werden. Wichtig ist nun, dass man das Programm mit dem folgenden Befehl compiliert: 'mpic++ TOV\_parallel\_omp2\_eos\_time.cpp' und das Programm mit 'mpirun -np 6 ./a.out' ausführt ('-np 6' ist hier nur ein Beispiel und die Zahl 6 gibt die Anzahl der Prozesse an).

### Struktur des parallelen MPI-C++ Programms



```
#include <iostream>           //Ein-/Ausgabe (Include-Dateien)
#include <math.h>             //Mathematisches
#include <stdio.h>           //Fuer die Ausgabedatei
#include <mpi.h>             //MPI

//Definition einer polytropen Zustandsgleichung
```



```
#include <iostream> //Ein-/Ausgabe (Include-Dateien)
#include <math.h> | //Mathematisches
#include <stdio.h> //Fuer die Ausgabedatei
#include <mpi.h> //MPI

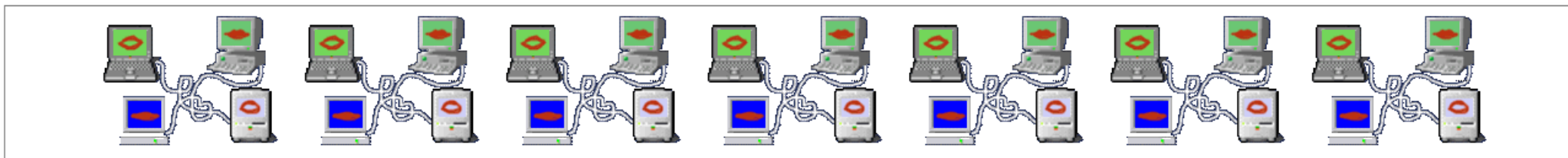
//Definition einer polytropen Zustandsgleichung
double eos(double p, double K, double gamma)
{
    double e;
    e=pow(p/K,1.0/gamma);
    return e;
}

//Definition einer MIT-Bag Zustandsgleichung mit  $cs^2=1/3$  (Ueberladen der Funktion eos(...))
double eos(double p, double Bag)
{
    double e;
    e=3.0*p + 4.0*Bag;
    return e;
}

main( int nArguments, char **arguments ) //Hauptprogramm
{
    MPI::Status status;
    MPI::Init(nArguments,arguments);
    int psize=MPI::COMM_WORLD.Get_size();
    int id=MPI::COMM_WORLD.Get_rank();
    printf("Prozess id= %i \n",id);
}
```



Beim Ausführen des Programms spezifiziert der User mit wie vielen Prozessen er das Programm ausführen will (z.B. mit sechs Prozessen 'mpirun -np 6 ./a.out'). Ab diesem Zeitpunkt läuft das Programm mit sechs Prozessen, denen man im Laufe der weiteren Programmabfolge unterschiedliche Aufgaben zuweisen sollte, damit sie nicht alle das gleiche Ausführen. Die in der letzten Zeile angegebene Terminalausgabe erfolgt z.B. bei sechs Prozessen sechs mal; die Variable 'id' bezeichnet hier die fortlaufende Nummer des Prozesses (0,1,...,5).



```
//Variablendeklarationen
```

```
int i,anz=150;
```

```
double M,p,e,r,nu,dM,dp,de,dr,dnu,dec;
```

```
double Er[anz],EM[anz],Enu[anz],Eec[anz];
```

```
double K,gamma;
```

```
double Bag;
```

```
//Variableninitialisierung
```

```
dr=0.00001;
```

```
dec=0.00005;
```

```
gamma=5.0/3.0;
```

```
K=7.3015389;
```

```
Bag=0.0001339578066;
```

```
//Entspricht  $B^{(1/4)}=170$  MeV
```

```
//for Schleife zur Berechnung mehrerer Sterne
```

```
//Aufteilung der zu berechnenden Sterne auf die einzelnen MPI Prozesse
```

```
//Variablendeklarationen
int i,anz=150;
double M,p,e,r,nu,dM,dp,de,dr,dnu,dec;
double Er[anz],EM[anz],Enu[anz],Eec[anz];
double K,gamma;
double Bag;

//Variableninitialisierung
dr=0.00001;
dec=0.00005;
gamma=5.0/3.0;
K=7.3015389;
Bag=0.0001339578066; //Entspricht  $B^{(1/4)}=170$  MeV

//for Schleife zur Berechnung mehrerer Sterne
//Aufteilung der zu berechnenden Sterne auf die einzelnen MPI-Prozesse
for (i=id;i<anz;i=i+psize)
{
```



Eine sinnvolle Aufteilung der einzelnen Aufgaben des TOV-Programms auf die jeweiligen Prozesse kann man z.B. realisieren, indem die 150 (anz=150) zu berechnenden Neutronensterne auf die jeweiligen Prozesse aufteilt werden. In dem die for-Schleife von einem prozessabhängigen Startwert anfängt und in Schrittwerten 'psize' (Anzahl der Prozesse, hier z.B. 6) geht, rechnet jeder Prozess einen anderen Stern aus. Prozess 'id=0' rechnet z.B. die Sterne 'i=0,6,12,18,..' und Prozess 'id=4' rechnet z.B. die Sterne 'i=4,10,16,22,..' aus. Im Gegensatz zu den Threads in der OpenMP-Version wissen die einzelnen Prozesse der MPI Version nichts über die Berechnungen und Ergebnisse der anderen Prozesse, so dass die Werte der berechneten Ergebnisse übermittelt werden müssen - dies geschieht mit einem 'MPI::COMM\_WORLD.Send(...)-Kommando. In dieser Version senden alle Prozesse ihre Ergebnisse an Prozess mit 'id=0'.

```
//for Schleife zur Berechnung mehrerer Sterne
//Aufteilung der zu berechnenden Sterne auf die einzelnen MPI-Prozesse
for (i=id;i<anz;i=i+psize)
{
    M=0;
    r=pow(10, -14);
    p=K*pow((i+1)*dec,gamma); //Fuer polytrope Zustandsgleichung
//    p=1.0/3.0*(i+1)*dec-4.0/3.0*Bag; //Fuer MIT-Bag Zustandsgleichung
    nu=0;
    Eec[i]=eos(p,K,gamma); //Fuer polytrope Zustandsgleichung
//    Eec[i]=eos(p,Bag); //Fuer MIT-Bag Zustandsgleichung

    //do-while Schleife (Numerische Lösung der TOV-Gleichung)
    do
    {
        e=eos(p,K,gamma); //Wert der Energiedichte bei momentanem Druck (polytrope Zustandsgleichung)
//        e=eos(p,Bag); //Wert der Energiedichte bei momentanem Druck (MIT-Bag Zustandsgleichung)
        dM=4*M_PI*e*r*r*dr; //Massenzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr
        dp=- (p+e)*(M+4*M_PI*r*r*r*p)/(r*(r-2*M))*dr; //Druckzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr (TOV-Gleichung)
        dnu=(M + 4*M_PI*r*r*r*p)/(r*(r-2*M))*dr; //Metrikzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr
        r=r+dr; //momentaner Radius des Neutronensterns
        M=M+dM; //momentane Masse des Neutronensterns innerhalb des Radius r
        p=p+dp; //momentaner Druck des Neutronensterns innerhalb des Radius r
        nu=nu+dnu; //momentane Metrik des Neutronensterns innerhalb des Radius r
    }
    while(p>0);
}
```



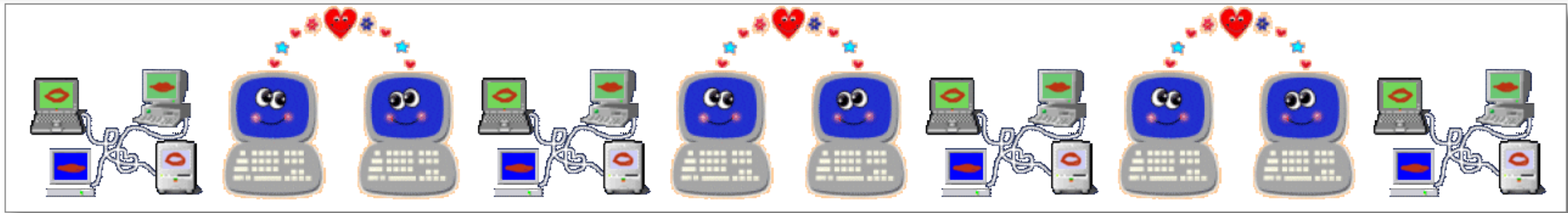
```
//for Schleife zur Berechnung mehrerer Sterne
//Aufteilung der zu berechnenden Sterne auf die einzelnen MPI-Prozesse
for (i=id;i<anz;i=i+psize)
{
  M=0;
  r=pow(10, -14);
  p=K*pow((i+1)*dec,gamma); //Fuer polytrope Zustandsgleichung
// p=1.0/3.0*(i+1)*dec-4.0/3.0*Bag; //Fuer MIT-Bag Zustandsgleichung
  nu=0;
  Eec[i]=eos(p,K,gamma); //Fuer polytrope Zustandsgleichung
// Eec[i]=eos(p,Bag); //Fuer MIT-Bag Zustandsgleichung

  //do-while Schleife (Numerische Lösung der TOV-Gleichung)
  do
  {
    e=eos(p,K,gamma); //Wert der Energiedichte bei momentanen Druck (polytrope Zustandsgleichung)
// e=eos(p,Bag); //Wert der Energiedichte bei momentanen Druck (MIT-Bag Zustandsgleichung)
    dM=4*M_PI*e*r*r*dr; //Massenzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr
    dp=- (p+e)*(M+4*M_PI*r*r*r*p)/(r*(r-2*M))*dr; //Druckzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr (TOV-Gleichung)
    dnu=(M + 4*M_PI*r*r*r*p)/(r*(r-2*M))*dr; //Metrikzunahme bei momentanem r und Schrittweite dr
    r=r+dr; //momentaner Radius des Neutronensterns
    M=M+dM; //momentane Masse des Neutronensterns innerhalb des Radius r
    p=p+dp; //momentaner Druck des Neutronensterns innerhalb des Radius r
    nu=nu+dnu; //momentane Metrik des Neutronensterns innerhalb des Radius r
  }
  while(p>0);

  Er[i]=r;
  EM[i]=M;
  Enu[i]=log(1-2*M/r)/2-nu;

  //Alle Prozesse (ausser Prozess 0) senden ihre berechneten Ergebnisse an Prozess 0
  if(id != 0)
  {
    MPI::COMM_WORLD.Send( &Er[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
    MPI::COMM_WORLD.Send( &EM[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
    MPI::COMM_WORLD.Send( &Enu[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
    MPI::COMM_WORLD.Send( &Eec[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
  }
}
}
```

```
//Alle Prozesse (ausser Prozess 0) senden ihre berechneten Ergebnisse an Prozess 0
if(id != 0)
{
    MPI::COMM_WORLD.Send( &Er[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
    MPI::COMM_WORLD.Send( &EM[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
    MPI::COMM_WORLD.Send( &Enu[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
    MPI::COMM_WORLD.Send( &Eec[i], 1, MPI::DOUBLE, 0, 1);
}
}
```



```
//Geordnete Ausgabe der Masse, des Radius, der zentralen g00-Metrikkomponente und der zentralen Energiedichte in die Ausgabedatei
//Die Ausgabe erfolgt nur von dem Prozess 0, der zunaechst alle berechneten und an ihn gesendeten Daten empfaengt
if (id==0)
{
    for (int proc=1;proc<psize;proc++)
    {
        for (i=proc;i<anz;i=i+psize)
        {
            MPI::COMM_WORLD.Recv( &Er[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
            MPI::COMM_WORLD.Recv( &EM[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
            MPI::COMM_WORLD.Recv( &Enu[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
            MPI::COMM_WORLD.Recv( &Eec[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
        }
    }
}
//Ausgabedatei
FILE *ausgabe;
ausgabe = fopen("output/tov.txt", "w+"); // "tov.txt" im Unterverzeichnis "output" öffnen zum speichern der Ergebnisse
```

```
//Geordnete Ausgabe der Masse, des Radius, der zentralen g00-Metrikkomponente und der zentralen Energiedichte in die Ausgabedatei
//Die Ausgabe erfolgt nur von dem Prozess 0, der zunaechst alle berechneten und an ihn gesendeten Daten empfaengt
if (id==0)
{
  for (int proc=1;proc<psize;proc++)
  {
    for (i=proc;i<anz;i=i+psize)
    {
      MPI::COMM_WORLD.Recv( &Er[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
      MPI::COMM_WORLD.Recv( &EM[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
      MPI::COMM_WORLD.Recv( &Enu[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
      MPI::COMM_WORLD.Recv( &Eec[i], 1, MPI::DOUBLE, proc, 1, status );
    }
  }
  //Ausgabedatei
  FILE *ausgabe;
  ausgabe = fopen("output/tov.txt", "w+");          //"tov.txt" im Unterverzeichnis "output" öffnen zum speichern der Ergebnisse

  fprintf(ausgabe, "# R[km]    M[Msol]    g00    ec[MeV/fm3] \n");
  for (i=0;i<anz;i++)
  {
    fprintf(ausgabe, "%f %f %f %e \n",Er[i],EM[i]/1.4766,exp(2*Enu[i]),Eec[i]*pow(10,6)/1.3234);
  }

  fclose(ausgabe);                                //Ausgabedatei schliessen
}

MPI::Finalize ( );
return 0;                                         //main beenden (Programmende)
}
```

```

//Ausgabedatei
FILE *ausgabe;
ausgabe = fopen("output/tov.txt", "w+");           //"tov.txt" im Unterverzeichnis "output" öffnen zum speichern der Ergebnisse

fprintf(ausgabe, "# R[km]    M[Msol]    g00    ec[MeV/fm3] \n");
for (i=0;i<anz;i++)
{
    fprintf(ausgabe, "%f %f %f %e \n",Er[i],EM[i]/1.4766,exp(2*Enu[i]),Eec[i]*pow(10,6)/1.3234);
}

fclose(ausgabe);                                 //Ausgabedatei schliessen
}

MPI::Finalize ( );
return 0;                                       //main beenden (Programmende)
}

```

Prozess '0' empfängt dannach alle Daten und gibt diese in die Ausgabedatei aus.



# Die Einstein Gleichung

Vor etwa 100 Jahren präsentierte Albert Einstein die Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie – die sogenannte **Einstein-Gleichung**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

**Raumzeitkrümmung**  
Eigenschaften der Metrik  
der Raumzeit

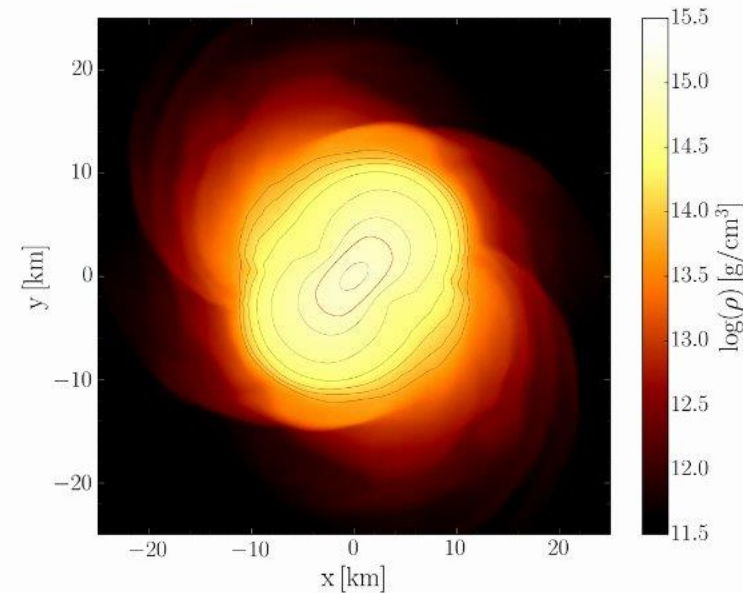
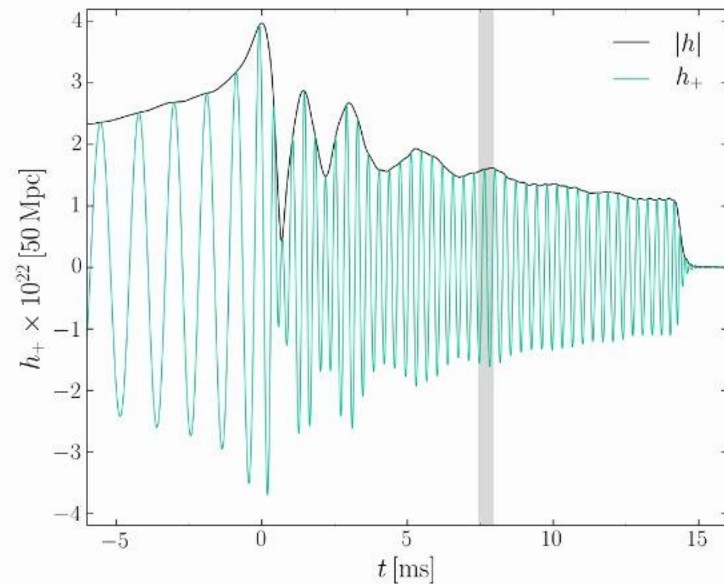
**Masse, Energie und Impuls des Systems**  
Zustandsgleichung der Materie  
Druck ( Dichte , Temperatur )

[Einführung](#)[Teil I](#)[Teil II](#)[Teil III](#)[E-Learning](#)

## Teil III: Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit

In diesem dritten Teil der Vorlesung soll ein Einblick in die allgemeinrelativistische Simulation auf Supercomputern gegeben werden. Unter Zuhilfenahme des sogenannten [Einstein-Toolkit](#), einer frei zugänglichen Software zur Berechnung allgemeinrelativistischer Probleme, werden unterschiedliche, realistische Systeme betrachtet. Die folgende Animation wurde mit dem Einstein-Toolkit simuliert und zeigt die emittierten Gravitationswellen und das Dichteprofil einer Neutronenstern Kollision, wobei die Animation kurz vor der Kollision startet und kurz nach dem Kollaps zum Kerr schwarzen Loch endet.

Das in dieser Simulation ca. 14 Millisekunden existierende Zwischenstadium bezeichnet man als einen Hypermassiven Neutronenstern. Nachdem in den letzten Jahren mehrere Gravitationswellen zweier kollidierender schwarzer Löcher direkt nachgewiesen wurden (siehe [GW150914](#), [GW151226](#) und [GW170104](#)), hofft man bei der nächsten LIGO Aufzeichnung auch Gravitationswellen zweier kollidierender Neutronensterne zu finden.



Links: Amplitude der emittierte Gravitationswellen im Abstand 50 Mpc von der Kollision. Rechts: Logarithmus des Dichteprofiles in der äquatorialen Ebene des Hypermassiven Neutronensterns; die rote Kontourlinie markiert den Anfang der Quarkphase im inneren Bereich des Sterns.

Spring School on Numerical Relativity and Gravitational Wave Physics -- Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Home Research Contact

Intro 介绍

Chapter I 第一章


Chapter II 第二章

Chapter III 第三章

e-learning 电子学习

# Spring School on Numerical Relativity and Gravitational Wave Physics

15th-25th May 2017, Beijing  
Room 6620, ITP New Building, Beijing



*Invited Lecturers:*

- Niels Warburton (University College Dublin)
- Andrea Taracchini (Max Planck Institute for Gravitational Physics)
- David Hilditch (Theoretical Physics Institute, University of Jena)
- David Weir (Helsinki Institute of Physics, University of Helsinki)
- Koutarou Kyutoku (KEK, IPNS)
- Matthias Hanauske (Goethe University Frankfurt)

**Die Peking Frühlingschule 2017**  
**Numerische Relativitätstheorie und die Physik der Gravitationswellen**  
**(Spring School on Numerical Relativity and Gravitational Wave Physics)**

**Vorlesungsreihe (6 Vorlesungen) über**  
**Gravitationswellen von kollidierenden kompakten Sternen und die**  
**Eigenschaften seltsamer Materie**  
**(Gravitational waves from colliding compact star binaries in the context of**  
**strange/exotic matter)**  
**致密星碰撞引起的引力波和奇异物质的性质**  
**Beijing, China, 15.-25. May 2017**

Die im Jahre 2017 gehaltene Vorlesungsreihe führt einerseits in die Allgemeine Relativitätstheorie ein, andererseits fokussiert sie sich auf den speziellen Teilaspekt der relativistischen Astrophysik kollidierender hybrider Neutronensterne, in deren innerem Bereich es zur Bildung seltsamer und exotischer Materie kommen kann. Kollabiert ein instabiler Neutronenstern zu einem schwarzen Loch oder zu einem Quark Stern? Wie kann man anhand des ausgesandten Gravitationswellen-Signals zweier kollidierender kompakter Sterne die Eigenschaften der Nuklearen- und Quark-Materie entschlüsseln?

(The series of lectures held in 2017. Topics: theory of general relativity theory, relativistic astrophysics of colliding hybrid neutron stars, strange and exotic matter in the interior of compact stars. Questions: Does an unstable neutron star collapse to a black hole or quark star? How can we extract the strange properties of high density nuclear and quark matter by means of the emitted gravitational wave signal of two colliding compact stars?)

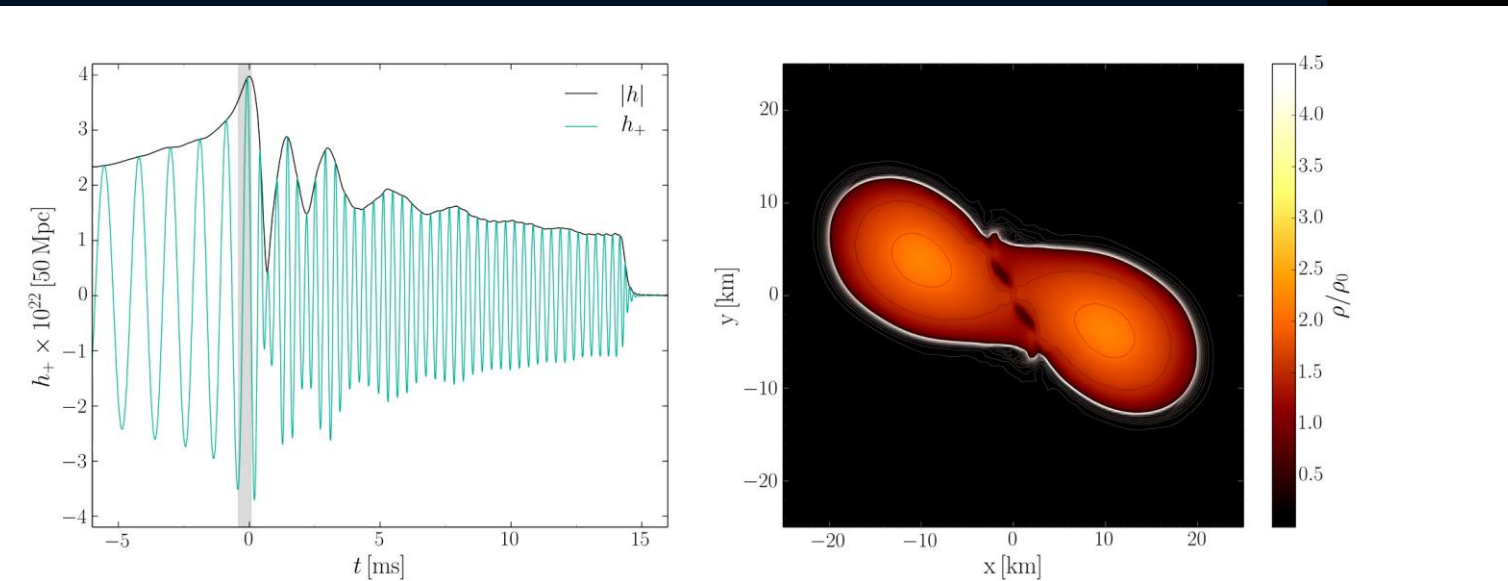
在2017年开设的课程,一方面介绍广义相对论理论,另一方面聚焦于相对论天体物理中的一个特殊部分:混合致密星碰撞,以及在其内部可能生成的奇异和异常物质。



# Teil III

## Computersimulationen mit dem Einstein-Toolkit

In diesem Teil wird ein Einblick in die allgemeinrelativistische Simulation auf Supercomputern gegeben. Unter Zuhilfenahme des Einstein-Toolkits werden unterschiedliche, realistische Systeme betrachtet (z.B. Neutronenstern-Kollisionen mit Aussendung von Gravitationswellen)





# Einstein Toolkit



"The Einstein Toolkit Consortium is developing and supporting open software for relativistic astrophysics. Our aim is to provide the core computational tools that can enable new science, broaden our community, facilitate interdisciplinary research and take advantage of emerging petascale computers and advanced cyberinfrastructure."

- \* Consortium: 94 members, 49 sites, 14 countries
- \* Sustainable community model:
  - \* 9 Maintainers from 6 sites: oversee technical developments, quality control, verification and validation, distributions and releases
  - \* Whole consortium engaged in directions, support, development
  - \* Open development meetings
  - \* Governance model: still being discussed (looking at CIG, iPlant)

**[HTTP://WWW.EINSTEINTOOLKIT.ORG](http://www.einsteintoolkit.org)**

# Das Einstein Toolkit: Weitere Informationen



## einstein toolkit

### WELCOME

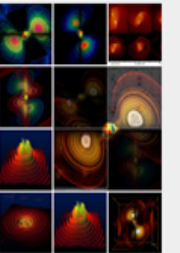
The Einstein Toolkit Consortium is developing and supporting open software for relativistic astrophysics. Our aim is to provide the core computational tools that can enable new science, broaden our community, facilitate interdisciplinary research and take advantage of emerging petascale computers and advanced cyberinfrastructure.

Please read our pages [about](#) the Einstein Toolkit, its [governance](#), and how to [get started](#) with the toolkit for more information.

### Download

**November 2014:** We are pleased to [announce the tenth release](#) (code name "[Herschel](#)") of the Einstein Toolkit, an open, community developed software infrastructure for relativistic astrophysics.

<https://www.youtube.com/watch?v=EO4d32ch6OI>  
<https://www.youtube.com/watch?v=p5bq2iUO3DE>  
[https://www.youtube.com/watch?v=MNpyd\\_o0MT4](https://www.youtube.com/watch?v=MNpyd_o0MT4)  
<https://www.youtube.com/watch?v=Qg6PwRI2uS8>  
<https://www.youtube.com/watch?v=ZW3aV7U-aik>



EinsteinToolkit@Flickr

Welcome

About the Toolkit

Members

Maintainers

Governance

Capabilities

Gallery

Releases

Tools

Download

Community Services

Wiki

Blog

Support

Seminars

Issue Tracker

Documentation

Tutorial for New Users

Citing

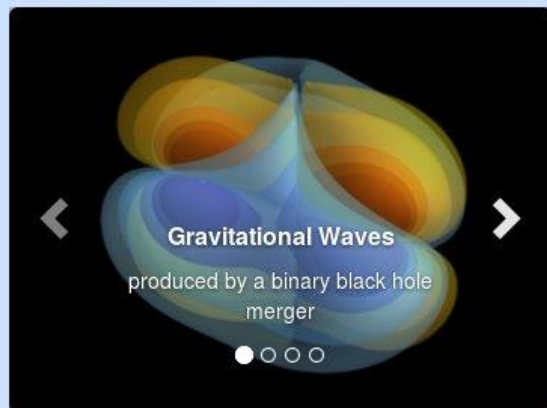
# Das Einstein Toolkit



einstein  
toolkit

[Home](#) [About](#) [Download](#) [Documentation](#) [Help!](#) [Contribute](#) [Gallery](#)

## The Einstein Toolkit



[Gallery](#)

### Einstein Toolkit School and Workshop

Join us at the North American [Einstein Toolkit School and Workshop](#) at NCSA, at the University of Illinois at Urbana-Champaign from July 31 to August 4 2017.

This meeting is open to anyone interested in numerical relativity and computational astrophysics and cosmology and in particular to Einstein toolkit users.

The first three days will be dedicated to a school useful for new users of the Einstein Toolkit followed by a two day long workshop open to developers interested in the Einstein Toolkit.

Registration closes *July 17, 2017*.

[More information](#)

### About

The Einstein Toolkit is a [community](#)-driven software platform of core computational tools to advance and support research in relativistic astrophysics and gravitational physics.

[About](#)

### Download

We provide a convenient method to get all of the Einstein Toolkit with just a few commands, and explain the whole process.

[Download](#)

### Documentation

A lot of the documentation within the Einstein Toolkit is generated from comments in the source code, and more can be found on the [Einstein Toolkit Wiki](#) or other documents. We provide links to guides, tutorials and references.

[Documentation](#)

### Contribute

The Einstein Toolkit would not exist without numerous contributions from its community. It is easy to learn how you can contribute as well.

[Contribute](#)

# Das Einstein Toolkit: Download



einstein  
toolkit

[Home](#) [About](#)

[Download](#)

[Documentation](#)

[Help!](#)

[Contribute](#)

[Gallery](#)

## Download & Requirements

The Einstein Toolkit is hosted on many different machines around the world. We provide a script called [GetComponents](#) to simplify downloading the toolkit. This page just describes how to download the toolkit - you may also be interested in the [Tutorial for New Users](#) which leads you through these steps and more on the Queen Bee supercomputer, or in a simpler [tutorial](#) for setup on a typical Linux box.

Users of the Einstein Toolkit are encouraged to [register](#) which also signs up for the [users mailing list](#).

## Main Toolkit

### Citations

The development of production level scientific software, such as the components of the Einstein Toolkit, represents the academic output of researchers. These scientific contributions should be acknowledged and respected on par with those solely based in theory or experiment. Please review our [Citation Policy](#).

### Current release: Payne-Gaposchkin (released on December 16th, 2016)

This is the recommended version of the toolkit for most users. See the [release notes](#) for more information.

Note: OSX users cannot use the 'subversion' client shipped by Apple. In that case install subversion either from homebrew or macports.

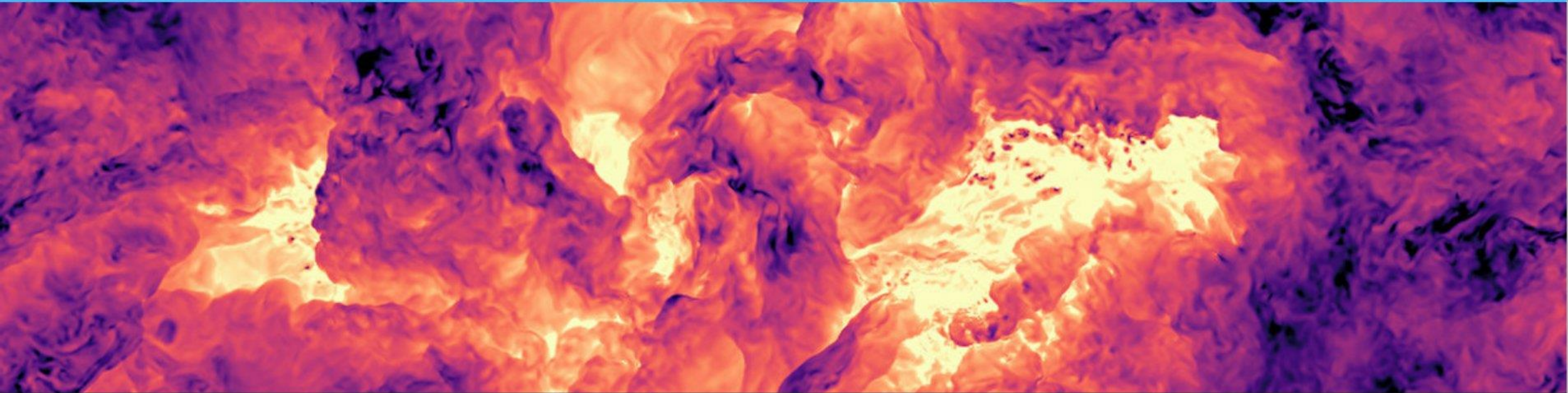
Enter the directory on your machine in which you would like to download the ET (for example, your home directory), and type the commands listed below. This will create a directory called Cactus in which the components of the Einstein Toolkit are downloaded.

```
curl -kLO https://raw.githubusercontent.com/gridaphobe/CRL/ET_2016_11/GetComponents
chmod a+x GetComponents
./GetComponents --parallel https://bitbucket.org/einsteintoolkit/manifest/raw/ET_2016_11/einsteintoolkit.th
```

A tarball of the release is also available [here](#), but using `GetComponents` is the preferred method to obtain the code. Use the tarball only if there is no way to use `GetComponents` (which should almost never be the case).

# David Radice - Homepage

Home Research **WhiskyTHC** Contact



**WhiskyTHC:** the General-Relativistic Templated Hydrodynamics Code

[Download](#)

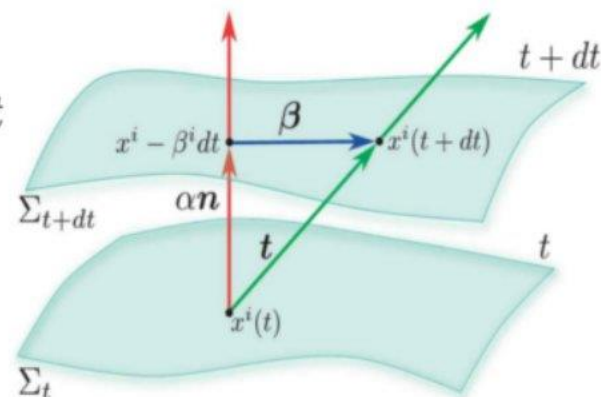
## 1) Die Einsteingleichung im (3+1)-Split

### Die (3+1) Zerlegung der Raumzeit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$$

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^j) dt$$

$$d\tau^2 = \alpha^2(t, x^j) dt^2$$



Credit: L. Rezzolla, O. Zanotti: Relativistic Hydrodynamics, Oxford Univ. Press (2013)

Um die zeitliche Entwicklung von komplizierten, allgemeinrelativistischen Systemen auf dem Computer zu simulieren muss die Einsteingleichung zunächst umformuliert werden. In der sogenannten (3+1)-Zerlegung der Raumzeit wird die vierdimensionale Mannigfaltigkeit der Raumzeit in dreidimensionale, raumartige Hyperflächen  $\Sigma_t$  zerlegt. Die Metrik der Raumzeit  $g_{\mu\nu}$  (siehe nebenstehende Abbildung) besteht in dieser Zerlegung aus einer Lapse-Funktion  $\alpha$ , aus einem Shift-Vektor  $\beta^i$  und aus einer rein raumartigen Metrik  $\gamma_{ij}$  ( $\mu, \nu=0, \dots, 3$  und  $i, j=1 \dots 3$ ). Die Lapse-Funktion  $\alpha$  beschreibt den Unterschied zwischen der Koordinatenzeit  $t$  und der Eigenzeit  $\tau$  und der Shift-Vektor  $\beta^i$  beschreibt wie stark ein Probekörper in der Raumrichtung "i" von der Struktur der Raumzeit mitgezogen wird, wenn er sich um einen infinitesimalen Zeitschritt  $dt$  bewegt. Setzt man diesen Ansatz in die Einsteingleichung ein, so gelangt man zu den sogenannten ADM-Gleichungen (nach Richard Arnowitt, Stanley Deser und Charles W. Misner), die ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen. Um die Konvergenzeigenschaften numerischer Lösungen sicherzustellen wird im Einstein-Toolkit zusätzlich noch eine konforme, spurlose Transformation der Metrik durchgeführt und das System von Differentialgleichungen in eine hyperbolische Form gebracht. Diese Gleichungen werden dann, zusammen mit den hydrodynamischen

Gleichungen, im Einstein-Toolkit numerisch gelöst.

## 2) Download und Kompilierung des Einstein-Toolkit

In diesem Unterpunkt werden die einzelnen Schritte beschrieben, wie man das frei erhältliche Simulationsprogramm Einstein-Toolkit installiert (für eine ausführliche Beschreibung siehe [Einstein-Toolkit](#)).

# Numerical Relativity and Relativistic Hydrodynamics of Binary Neutron Star Mergers

A realistic numerical simulation of a twin star collapse, a merger of two compact stars or a collapse to a black hole needs to go beyond a static, spherically symmetric TOV-solution of the Einstein- and hydrodynamical equations.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

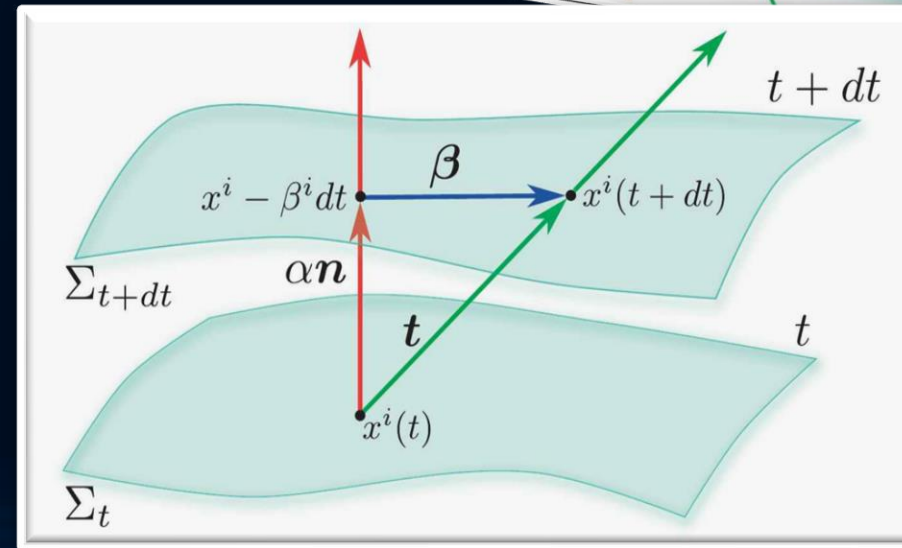
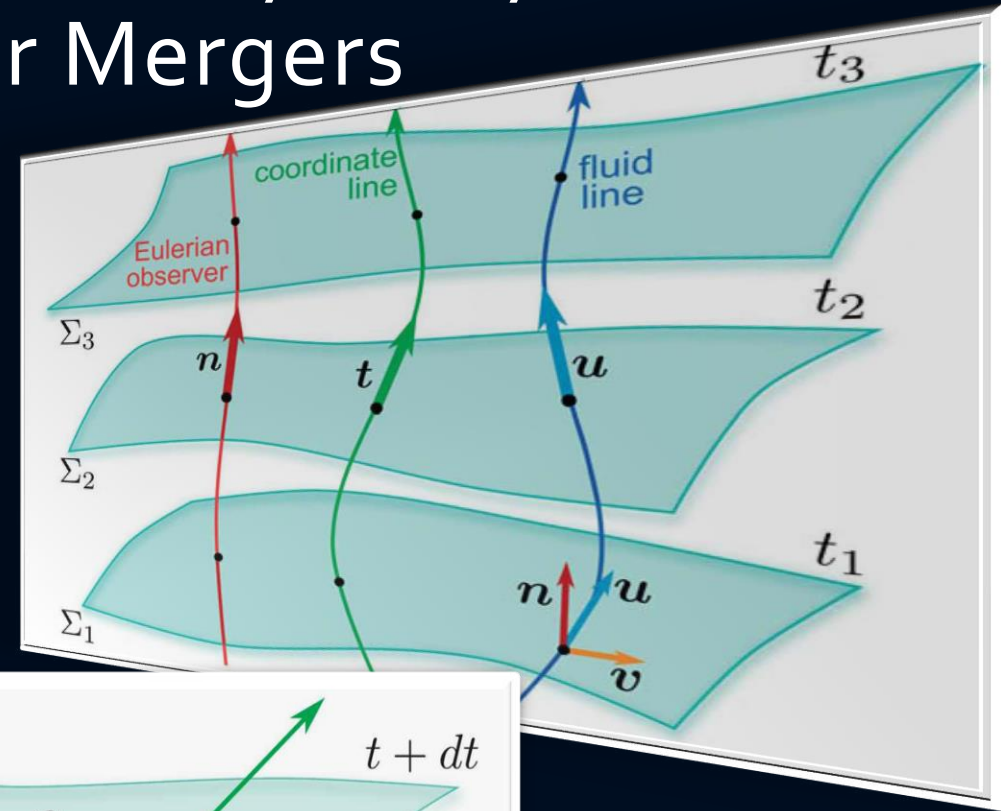
$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) &= 0, \\ \nabla_{\nu}T^{\mu\nu} &= 0.\end{aligned}$$

(3+1) decomposition of spacetime

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i\beta^i & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$$

$$d\tau^2 = \alpha^2(t, x^j)dt^2$$

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^j)dt$$





# The ADM equations

The ADM (Arnowitt, Deser, Misner) equations come from a reformulation of the Einstein equation using the (3+1) decomposition of spacetime.

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_{ij} &= -2\alpha K_{ij} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} \\ &= -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t K_{ij} &= -D_i D_j \alpha + \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ik} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k \\ &+ \alpha \left( {}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k_j \right) + 4\pi\alpha [\gamma_{ij} (S - E) - 2S_{ij}]\end{aligned}$$

Time evolving part of ADM

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi S^i$$

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E$$

Constraints on each hypersurface

Three dimensional covariant derivative

$$D_\nu := \gamma^\mu_\nu \nabla_\mu = (\delta^\mu_\nu + n_\nu n^\mu) \nabla_\mu$$

Three dimensional Riemann tensor

$${}^{(3)}R^\mu_{\nu\kappa\sigma} = \partial_\kappa {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\nu\kappa} + {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\lambda\kappa} {}^{(3)}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\lambda\sigma} {}^{(3)}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa}$$

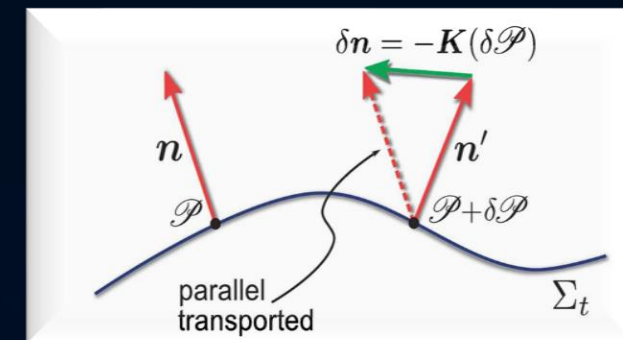
$${}^{(3)}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\delta} (\partial_\beta \gamma_{\gamma\delta} + \partial_\gamma \gamma_{\delta\beta} - \partial_\delta \gamma_{\beta\gamma})$$

Spatial and normal projections of the energy-momentum tensor:

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu} &:= \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_\nu T_{\alpha\beta}, \\ S_\mu &:= -\gamma^\alpha_\mu n^\beta T_{\alpha\beta}, \\ S &:= S^\mu_\mu, \\ E &:= n^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

Extrinsic Curvature:

$$K_{\mu\nu} := -\gamma^\lambda_\mu \nabla_\lambda n_\nu$$



# From ADM to BSSNOK

Unfortunately the ADM equations are only weakly hyperbolic (mixed derivatives in the three dimensional Ricci tensor) and therefore not "well posed". It can be shown that by using a conformal traceless transformation, the ADM equations can be written in a hyperbolic form. This reformulation of the ADM equations is known as the BSSNOK (Baumgarte, Shapiro, Shibata, Nakamuro, Oohara, Kojima) formulation of the Einstein equation. Most of the numerical codes use this (or even better the CCZ4) formulation.

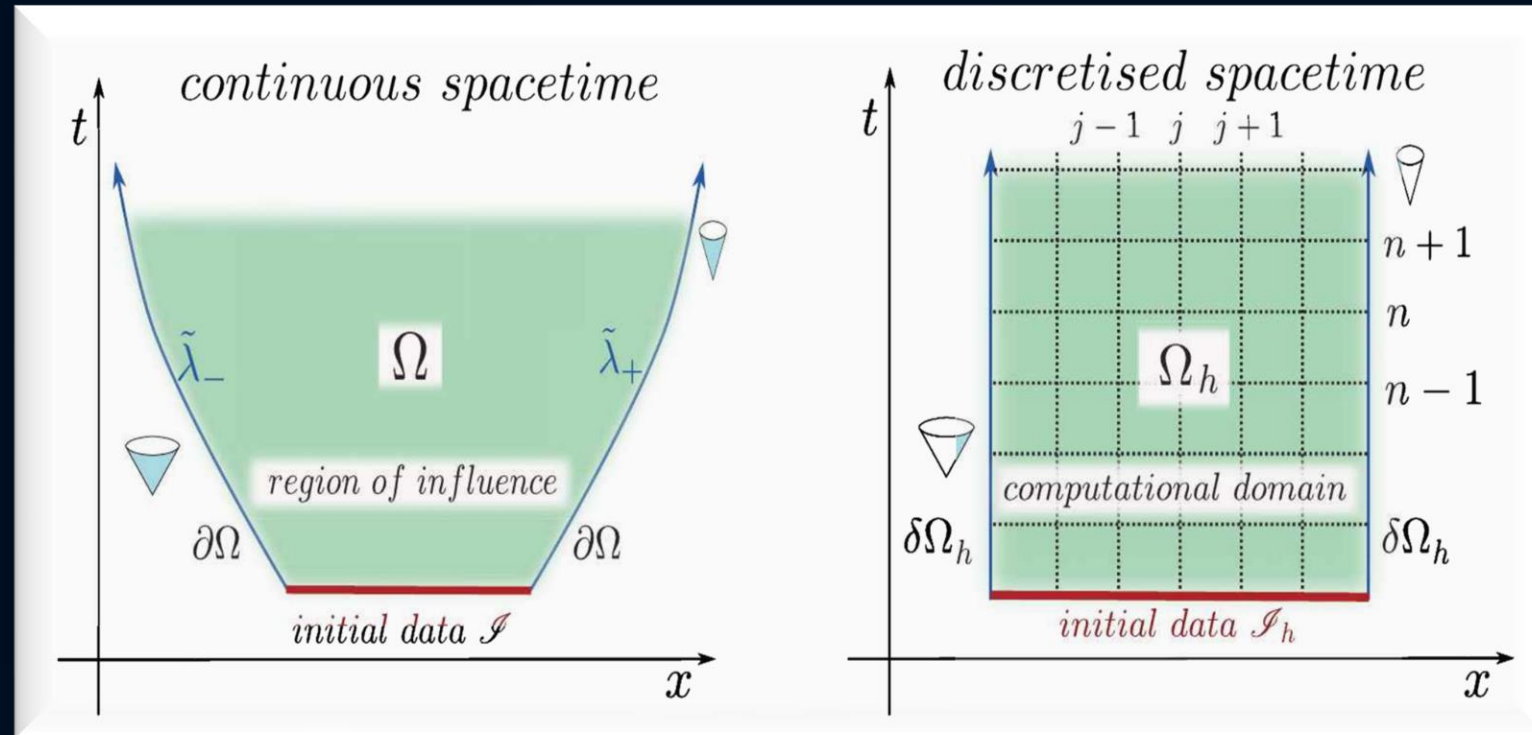
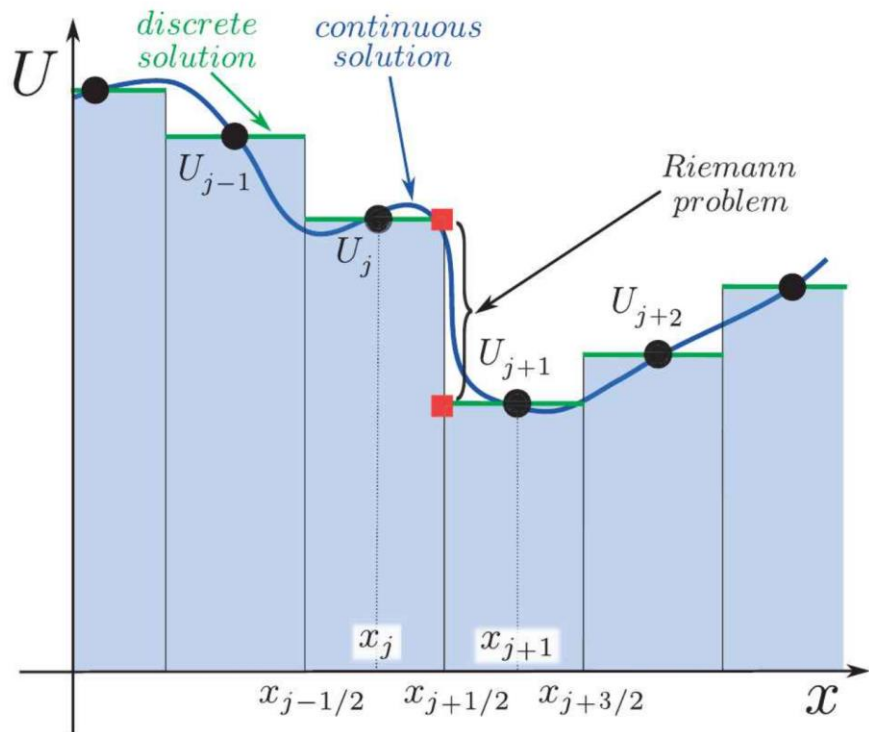
## The 3+1 Valencia Formulation of the Relativistic Hydrodynamic Equations

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) &= 0, \\ \nabla_{\nu}T^{\mu\nu} &= 0.\end{aligned}$$

To guarantee that the numerical solution of the hydrodynamical equations (the conservation of rest mass and energy-momentum) converge to the right solution, they need to be reformulated into a conservative formulation. Most of the numerical "hydro codes" use here the 3+1 Valencia formulation.

# Finite difference methods

Discretisation of a hyperbolic initial value boundary problem.



High resolution shock capturing methods (HRSC methods) are needed, when Riemann problems of discontinuous properties and shocks needs to be evolved accurately.

# Gauge Conditions

On each spatial hypersurface, four additional degrees of freedom need to be specified: A slicing condition for the lapse function and a spatial shift condition for the shift vector need to be formulated to close the system. In an optimal gauge condition, singularities should be avoided and numerical calculations should be less time consuming.

Bona-Massó family of slicing conditions:

$$\partial_t \alpha - \beta^k \partial_k \alpha = -f(\alpha) \alpha^2 (K - K_0)$$

“1+log” slicing condition:

$$f = 2/\alpha$$

$$\text{where } f(\alpha) > 0 \text{ and } K_0 := K(t = 0)$$

“Gamma-Driver” shift condition:

$$\partial_t \beta^i - \beta^j \partial_j \beta^i = \frac{3}{4} B^i,$$

$$\partial_t B^i - \beta^j \partial_j B^i = \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i - \eta B^i$$

# Über Gravitationswellen.

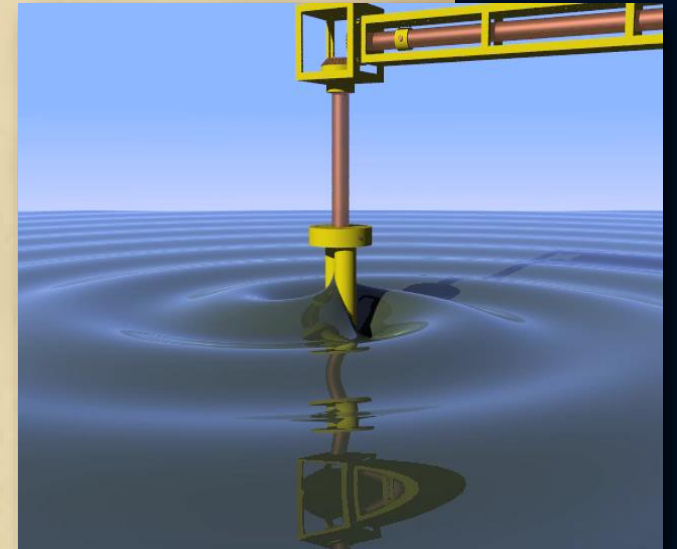
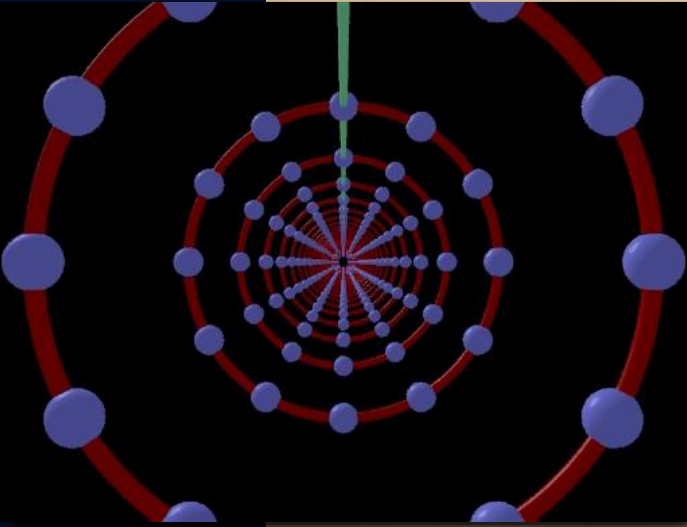
Von A. EINSTEIN.

(Vorgelegt am 31. Januar 1918 [s. oben S. 79].)

Die wichtige Frage, wie die Ausbreitung der Gravitationsfelder erfolgt, ist schon vor anderthalb Jahren in einer Akademiearbeit von mir behandelt worden<sup>1</sup>. Da aber meine damalige Darstellung des Gegenstandes nicht genügend durchsichtig und außerdem durch einen bedauerlichen Rechenfehler verunstaltet ist, muß ich hier nochmals auf die Angelegenheit zurückkommen.

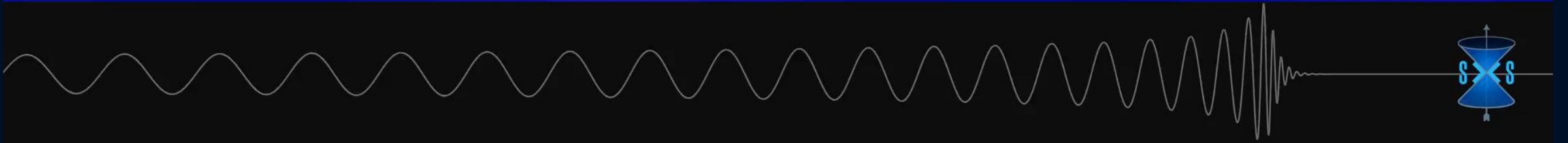
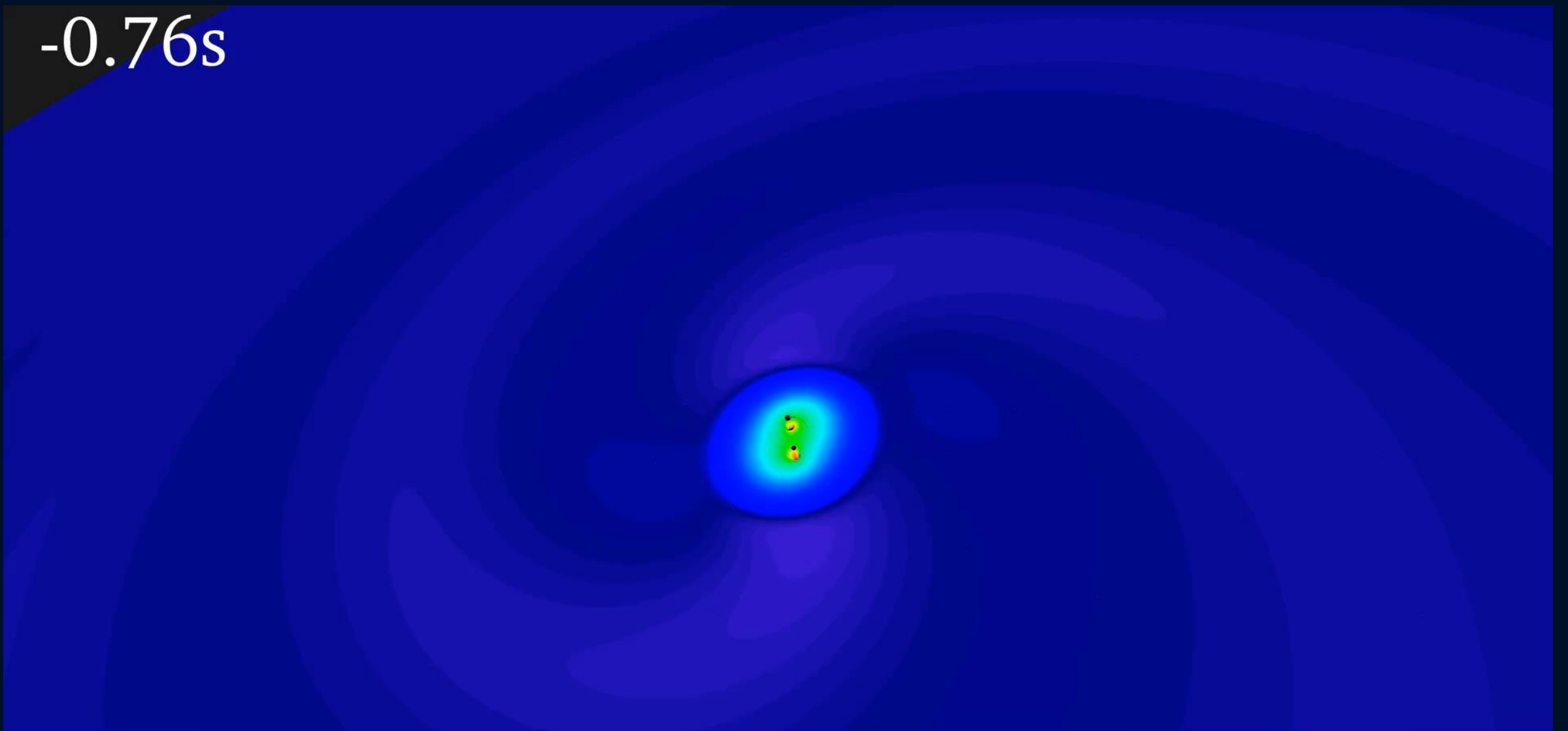
Einsteins erste Arbeit über Gravitationswellen

Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften



# Kollidierende Schwarze Löcher

-0.76s



100 Jahre später LIGO:

# LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

PRL **116**, 061102 (2016)

 Selected for a **Viewpoint** in *Physics*  
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
12 FEBRUARY 2016



## Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

B. P. Abbott *et al.*\*

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of  $1.0 \times 10^{-21}$ . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than  $5.1\sigma$ . The source lies at a luminosity distance of  $410_{-180}^{+160}$  Mpc corresponding to a redshift  $z = 0.09_{-0.04}^{+0.03}$ . In the source frame, the initial black hole masses are  $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$  and  $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$ , and the final black hole mass is  $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$ , with  $3.0_{-0.5}^{+0.5} M_{\odot} c^2$  radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.



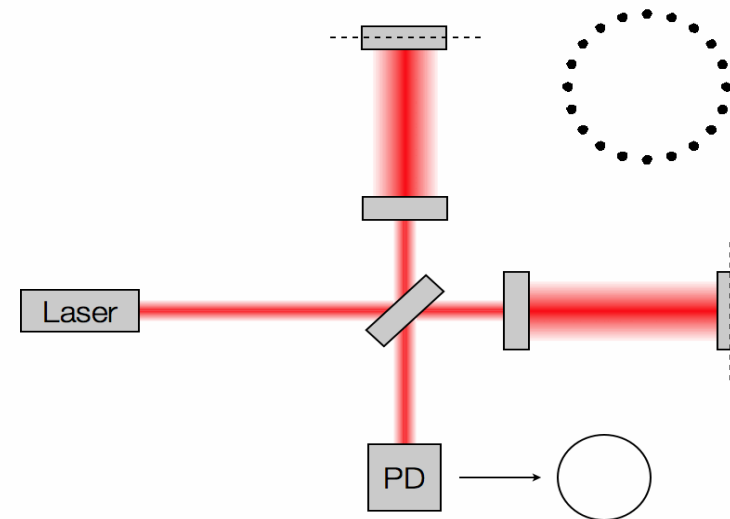
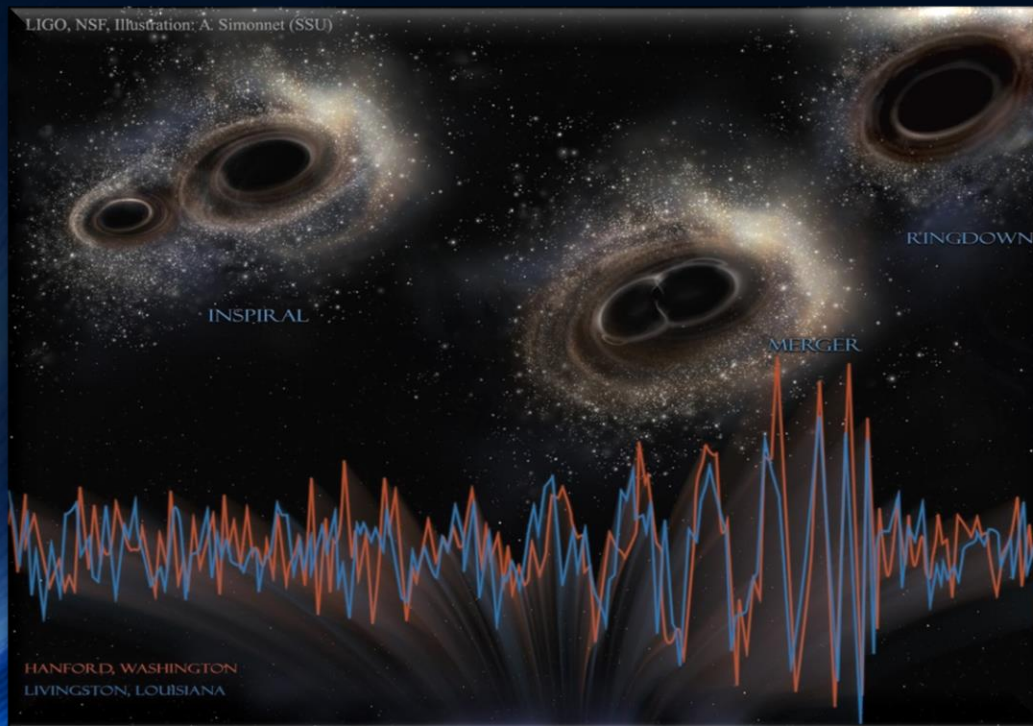
1. Direkter Nachweis von Gravitationswellen  
Signalform: Verschmelzung von zwei schwarzen Löchern

# Gravitationswellen gefunden: LIGO!!!

## Kollision zweier Schwarzer Löcher GW150914

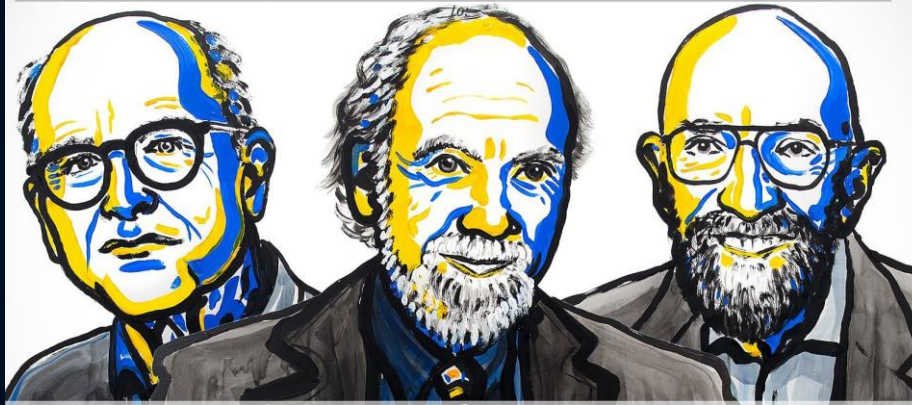
**Massen: 36 & 29 Sonnenmassen**

**Abstand zur Erde 410 Mpc  
(1.34 Milliarden Lichtjahre)**

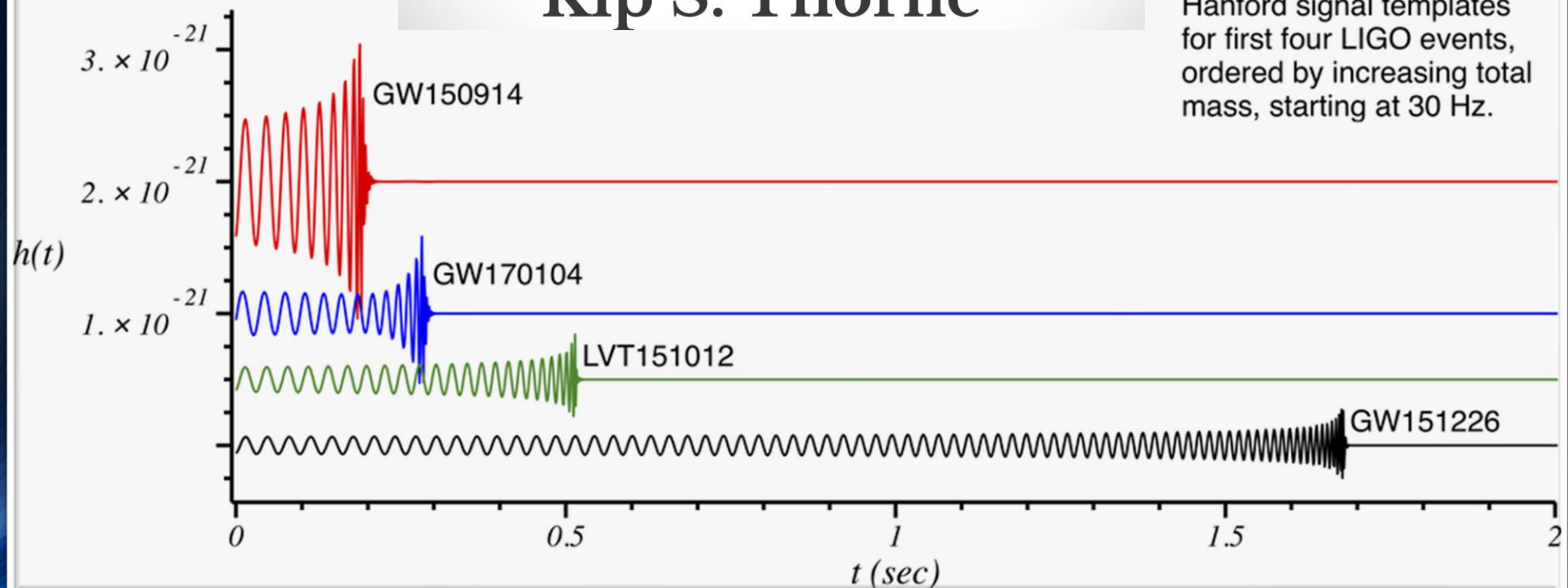




# 2017 NOBEL PRIZE IN PHYSICS



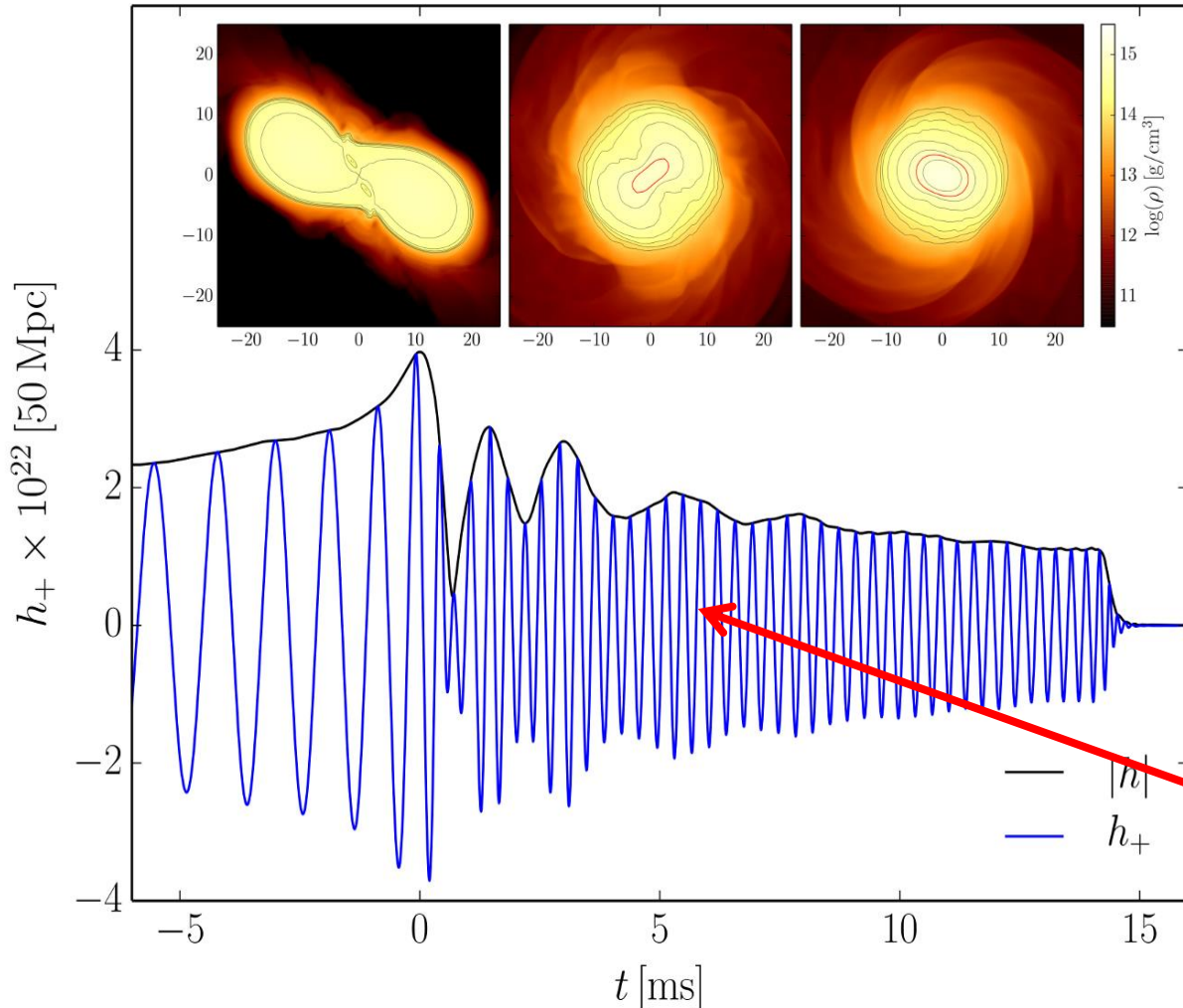
Rainer Weiss  
Barry C. Barish  
Kip S. Thorne



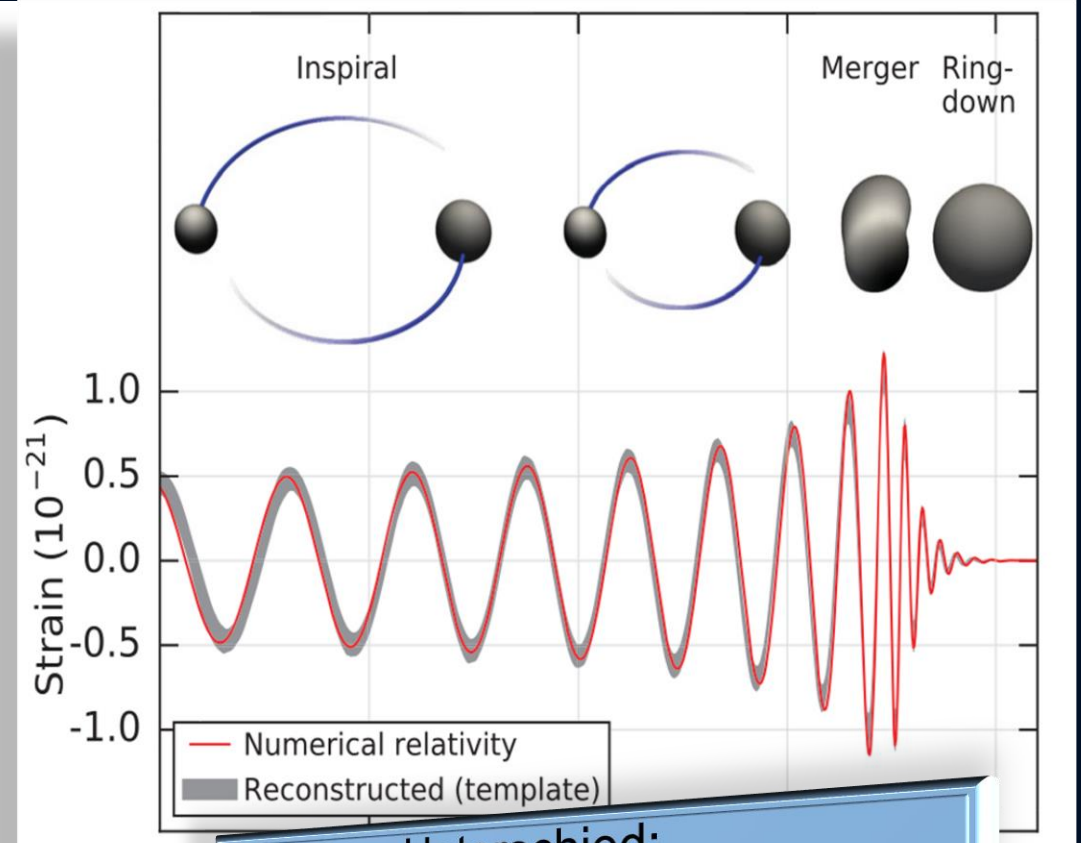
Hanford signal templates  
for first four LIGO events,  
ordered by increasing total  
mass, starting at 30 Hz.

# Gravitationswellen von Neutronenstern Kollisionen

## Neutronenstern Kollision (Simulation)



## Kollision zweier schwarzer Löcher

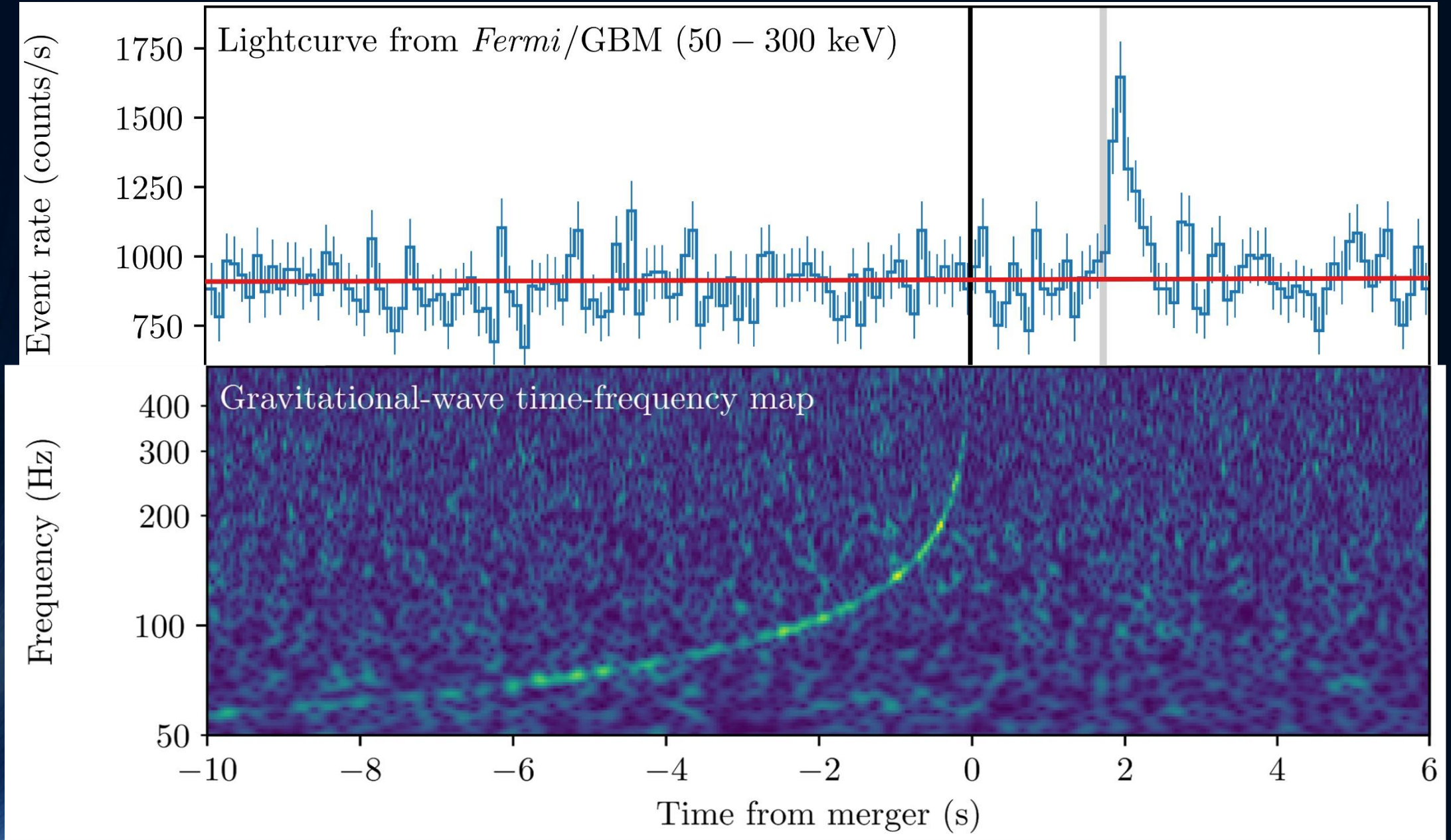


**Unterschied:**  
Bei Neutronenstern Kollisionen  
gibt es meistens eine  
**Post-Kollisionsphase**

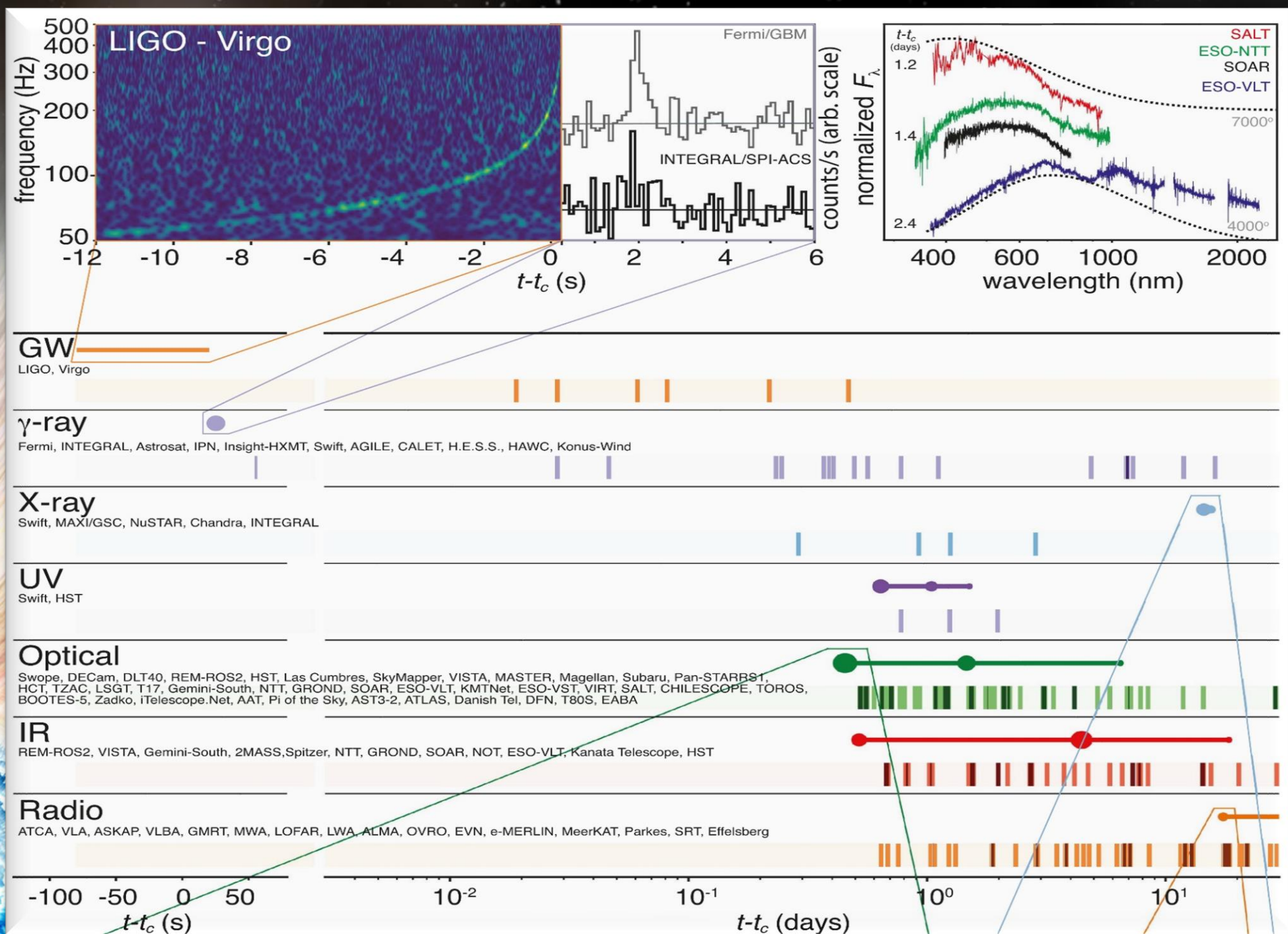
# The long-awaited event GW170817

	Low-spin priors ( $ \chi  \leq 0.05$ )	High-spin priors ( $ \chi  \leq 0.89$ )
Primary mass $m_1$	1.36–1.60 $M_\odot$	1.36–2.26 $M_\odot$
Secondary mass $m_2$	1.17–1.36 $M_\odot$	0.86–1.36 $M_\odot$
Chirp mass $\mathcal{M}$	1.188 $^{+0.004}_{-0.002}$ $M_\odot$	1.188 $^{+0.004}_{-0.002}$ $M_\odot$
Mass ratio $m_2/m_1$	0.7–1.0	0.4–1.0
Total mass $m_{\text{tot}}$	2.74 $^{+0.04}_{-0.01}$ $M_\odot$	2.82 $^{+0.47}_{-0.09}$ $M_\odot$
Radiated energy $E_{\text{rad}}$	$> 0.025 M_\odot c^2$	$> 0.025 M_\odot c^2$
Luminosity distance $D_L$	40 $^{+8}_{-14}$ Mpc	40 $^{+8}_{-14}$ Mpc
Viewing angle $\Theta$	$\leq 56^\circ$	$\leq 56^\circ$
Using NGC 4993 location	$\leq 28^\circ$	$\leq 28^\circ$
Combined dimensionless tidal deformability $\tilde{\Lambda}$	$\leq 800$	$\leq 700$
Dimensionless tidal deformability $\Lambda(1.4M_\odot)$	$\leq 800$	$\leq 1400$

# Gravitational Wave GW170817 and Gamma-Ray Emission GRB170817A



# GW170817

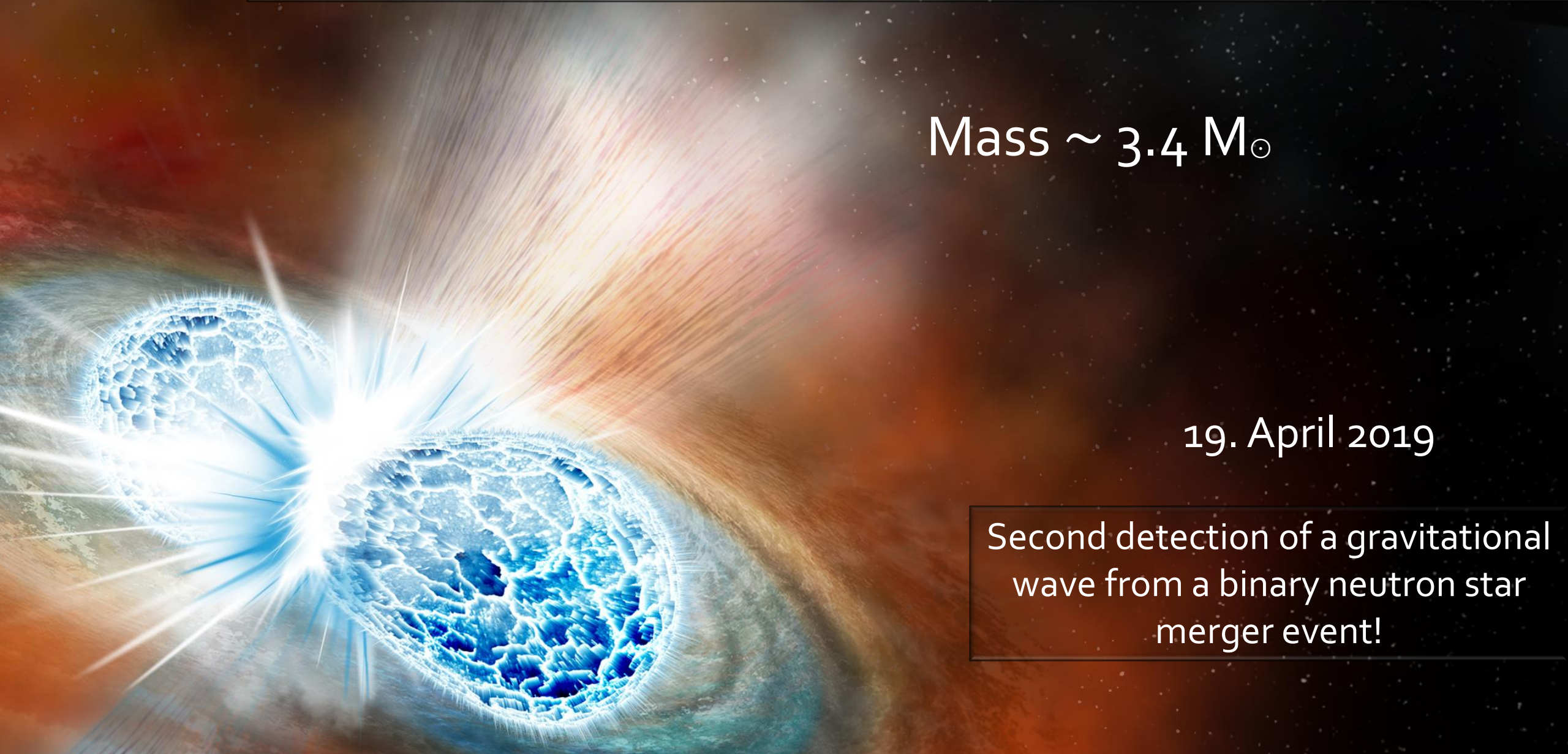


# The second event: GW190425

Mass  $\sim 3.4 M_{\odot}$

19. April 2019

Second detection of a gravitational wave from a binary neutron star merger event!



GW190814

The third event ???

**Black  
Hole**

$M_1 \sim 23 M_\odot$

**Neutron  
Star**

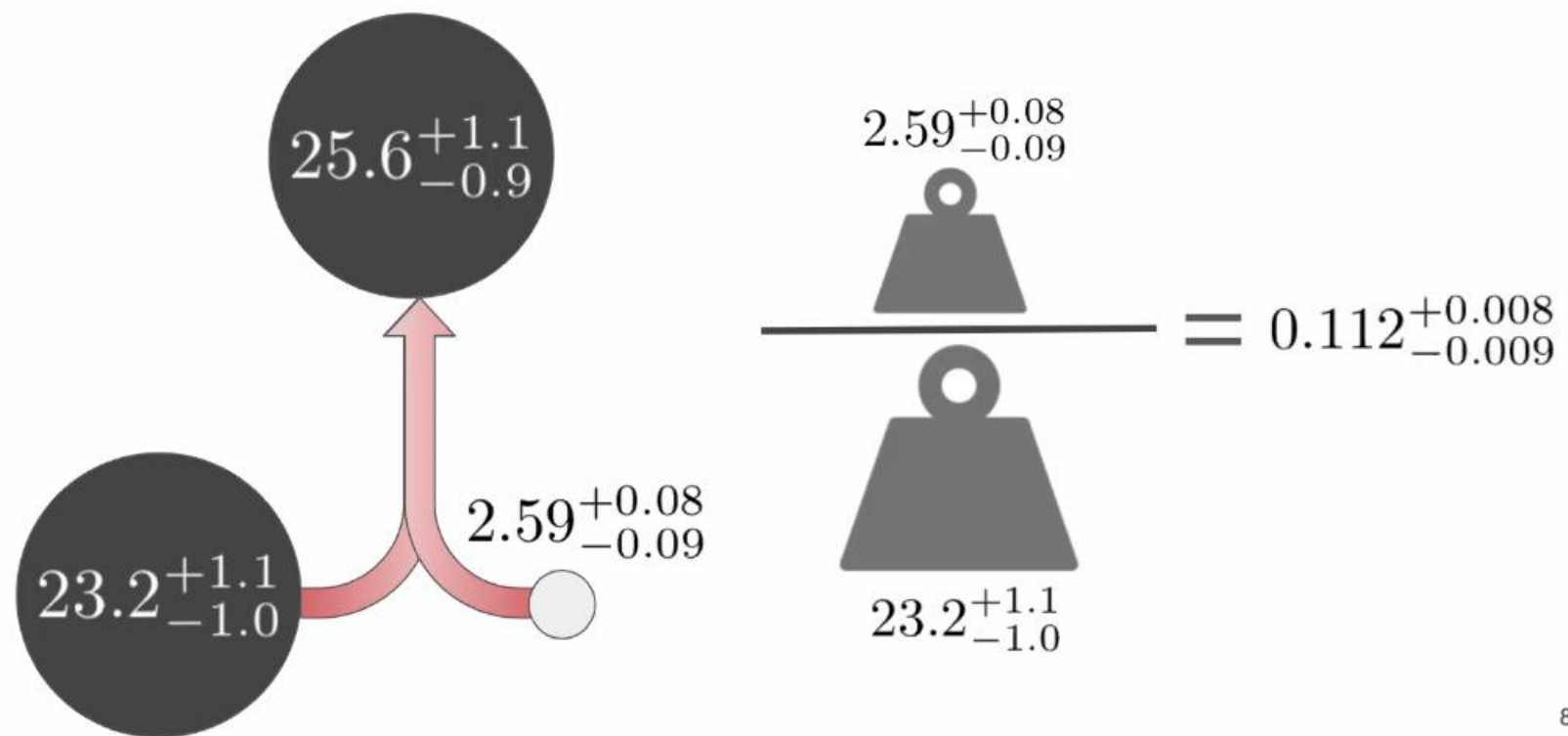
**& ?**

**Black  
Hole**

$M_2 \sim 2.6 M_\odot$

14. August 2019

## GW190814 - Source frame masses



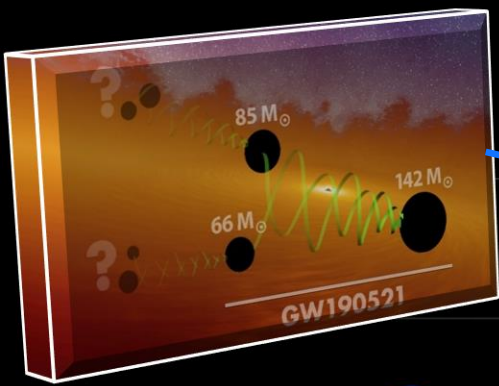
8





# Masses in the Stellar Graveyard

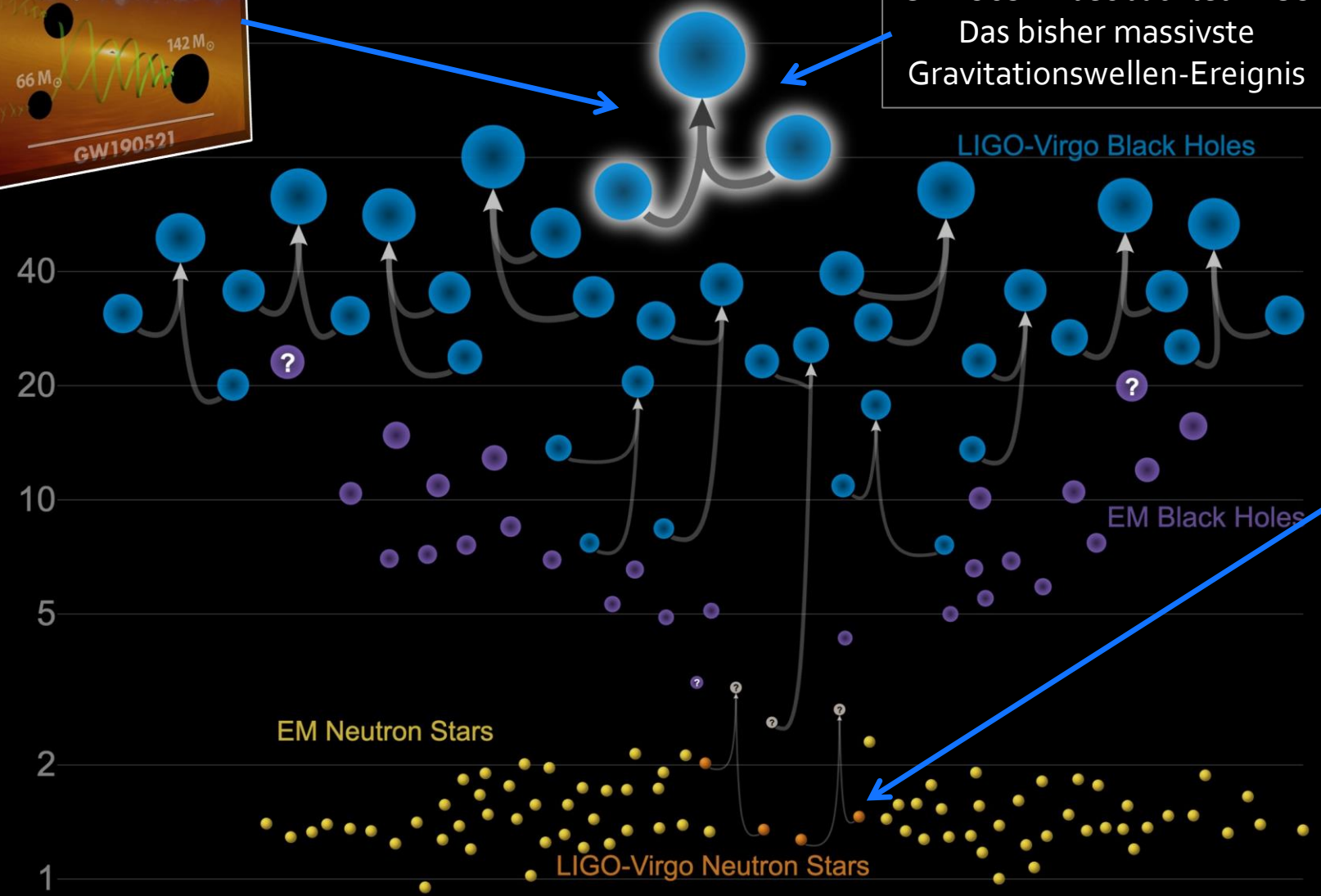
*in Solar Masses*



GW190521 beobachtet in O3  
Das bisher massivste  
Gravitationswellen-Ereignis

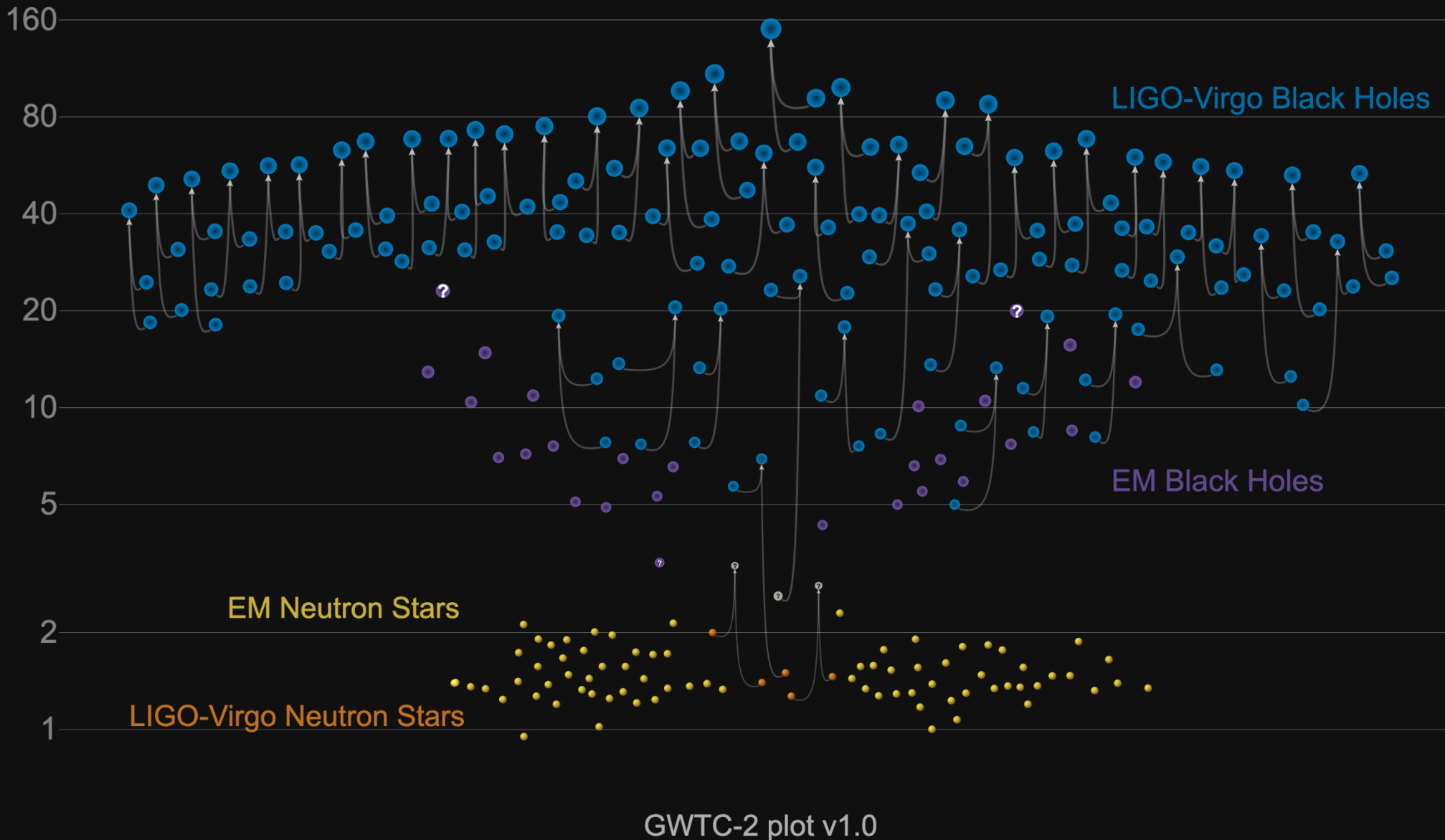
## Detektierte Gravitationswellen

In den ersten beiden Beobachtungsläufen (O1+O2) konnten 11 Gravitationswellen detektiert werden, wobei einer dieser Gravitationswellen (GW170817) durch die Kollision zweier Neutronensterne verursacht wurde welche sich vor ungefähr 130 Millionen Jahren ereignete.



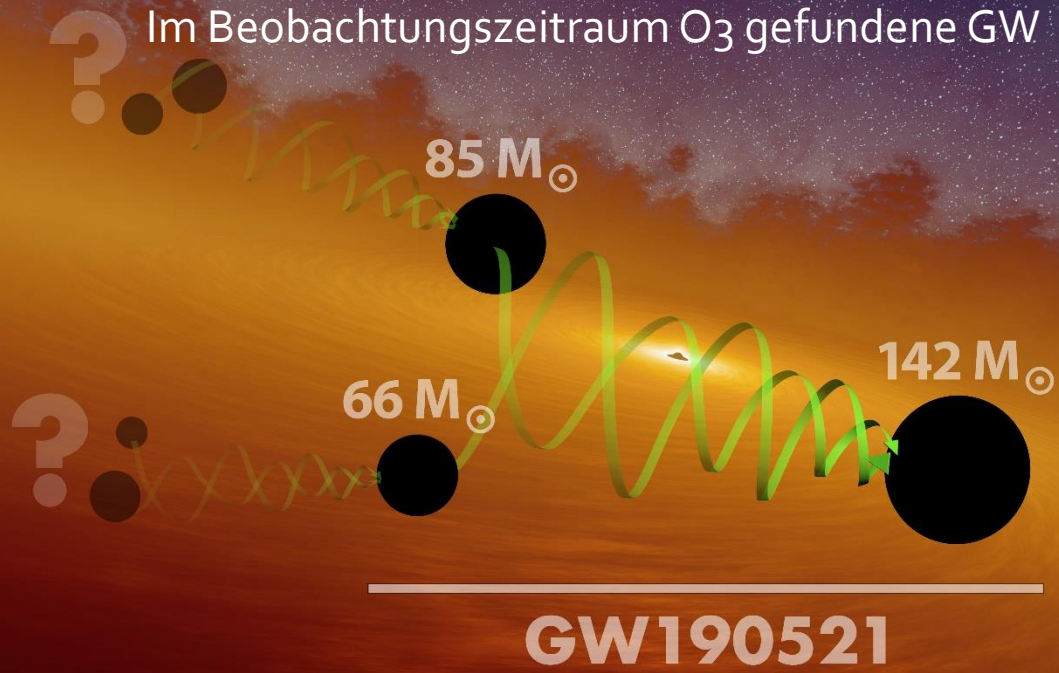
# Masses in the Stellar Graveyard

*in Solar Masses*

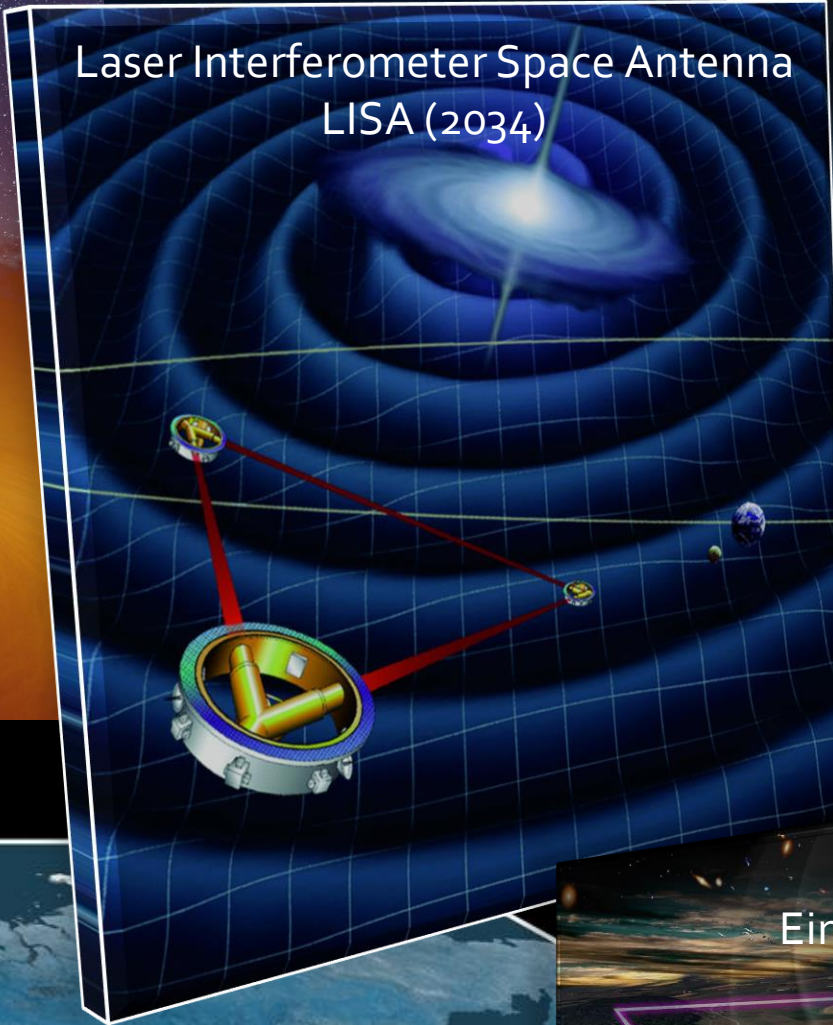


Am 28. Oktober 2020 gaben die LIGO Scientific Collaboration und die Virgo Collaboration die Ergebnisse ihrer Suche nach Gravitationswellen aus kollidierenden kompakten Objekten in der ersten Hälfte ihres dritten Beobachtungslaufs (O3a: vom 1. 04.2019 bis 1.10.2019) bekannt. 39 Ereignisse wurden hier gemeldet. Zusammen mit den 11 Ereignissen im ersten Gravitationswellen-Katalog (GWTC-1), erhöht sich die Gesamtzahl der gemeldeten LIGO / Virgo-Gravitationswellen-Ereignissen auf 50.

Im Beobachtungszeitraum O<sub>3</sub> gefundene GW



Laser Interferometer Space Antenna  
LISA (2034)



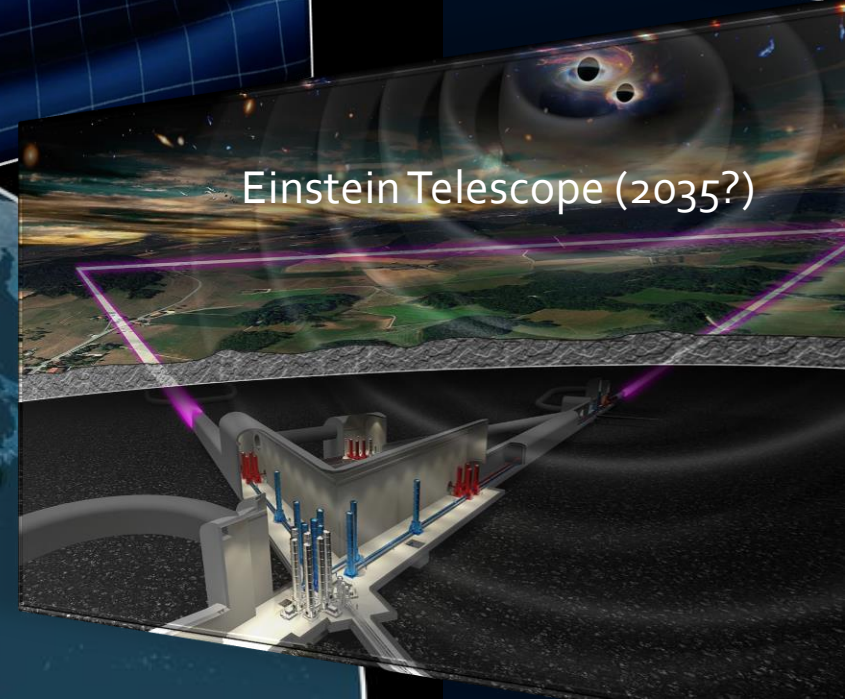
Cosmic Explorer (2035?)



The next observing runs (O<sub>4</sub>, O<sub>5</sub>, ..)



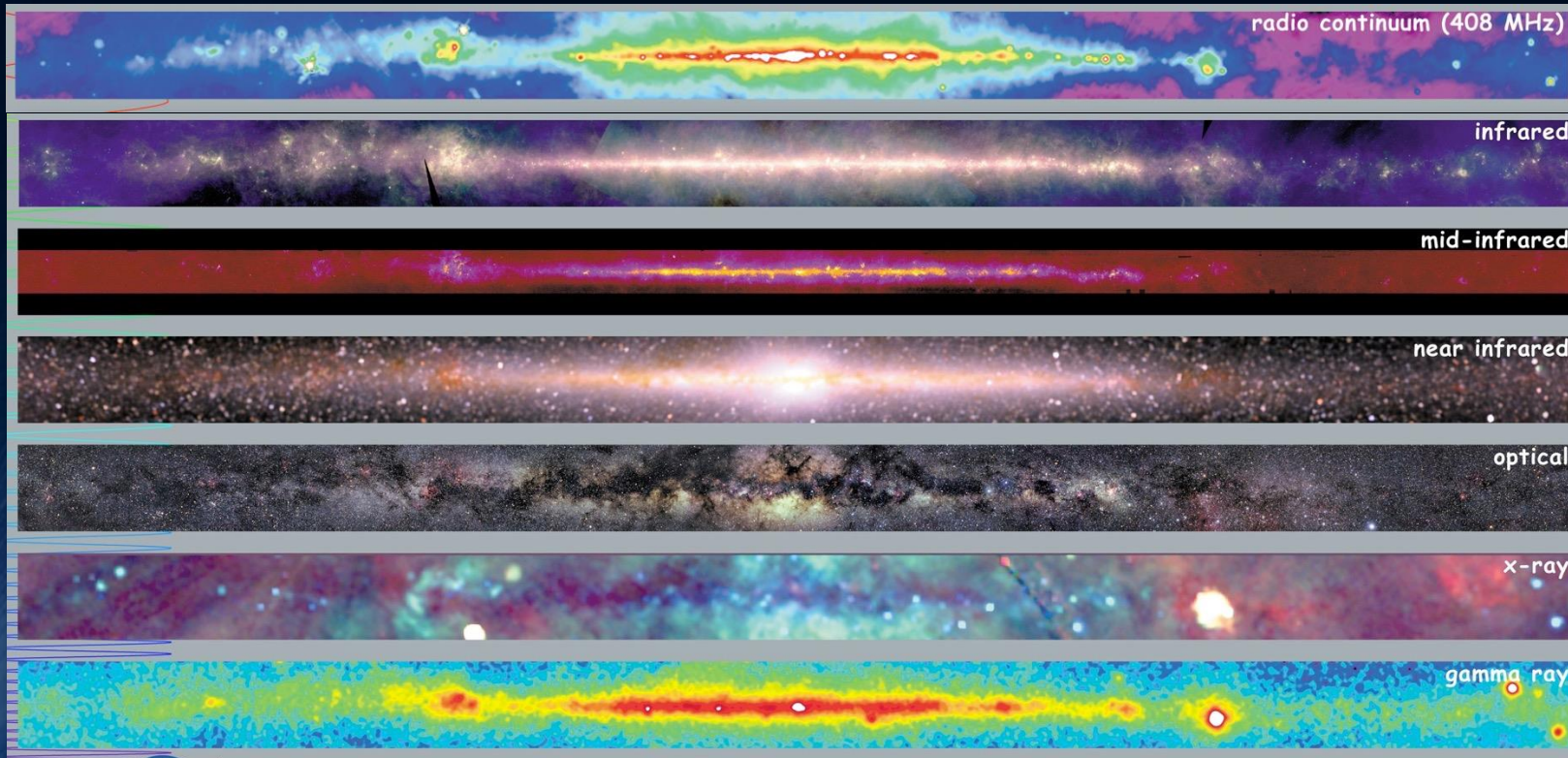
Einstein Telescope (2035?)



# Die neue Art unser Universum zu betrachten

Lange Zeit über war das Studium von astrophysikalischen Vorgängen auf den mit den Augen sichtbaren Bereich limitiert und optische Teleskope entwickelten sich erst ab dem 16. Jahrhundert. Die Wahrnehmung des Universums in den anderen Frequenzbereichen der elektromagnetischen Strahlung wurde durch die Radio-, Infrarot- und Röntgen-Teleskope möglich und entwickelte sich erst im 20. Jahrhundert.

GSFC/NASA



Radio

w-IR

m-IR

n-IR

Optisch

Röntgen

Gamma

Gravitations-  
wellen

Erkenntnisse mittels  
elektromagnetische Strahlung

Es ist so als ob die Menschheit eine neue wundersame Brille hat, ein neues Sinnesorgan, mit welchem sie nun, zuvor unbeobachtbare Ereignisse in unserem Universum, wahrnehmen kann.