Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
02.11.2018

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

3. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
  PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Vorlesungs-Materialien:
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VPSOC/
- Aufgaben auf der Online-Lernplatform Lon Capa:
  http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/
- Plan für die heutige Vorlesung:
  Definition eines Spiels, Nash-Gleichgewichte und dominante Strategien, das Hirschjagt Spiel, das Dilemma des Wettrüstens, gemischte Strategien, das Angsthasenspiel, Klassifizierung von symmetrischen (2x2)-Spielen, unsymmetrische Spiele, Einführung in die evolotionäre Spieltheorie, Übungsaufgabe auf der Lon Capa Lernplatform

Wir spielen ein Spiel

Sie (Spieler A) und ihr Nebenmann/frau (Spieler B) spielen ein simultanes (2x2)-Spiel mit symmetrischer Auszahlungsmatrix (siehe Tabelle unten). Nehmen Sie an, dass die Auszahlungswerte in der Tabelle in Einheiten von Euro angegeben sind.

Schauen Sie in Richtung der Tafel, positionieren Sie ihre Hände als „Scheuklappen" an ihre Schläfen (ihr Nebenmann/frau und die anderen Studenten dürfen ihre Entscheidung nicht sehen!).

Wenn der Spielleiter "Und jetzt bitte entscheiden." sagt, dann treffen Sie ihre Entscheidung und lassen entweder ihre Augen offen (Strategie 1) oder machen ihre beiden Augen zu (Strategie 2). Sie bleiben solange in diesem Zustand bis der Spielleiter "Fertig" sagt.

Schreiben Sie ihre Entscheidung auf einen Zettel ("auf" oder "zu") und zeigen diesen ihrem Spielpartner. Bitte versuchen Sie hierbei so still wie möglich zu sein und vermeiden Sie ebenfalls Gestiken/Mimiken die ihre Freude/Trauer über den Ausgang des Spiels zum Ausdruck bringen könnten.

Notieren Sie die Entscheidung ihres Spielpartners und ihren erzielten Euro-Betrag neben ihrer Entscheidung auf ihren Zettel.

Suchen Sie sich einen neuen Spielpartner und das nächste Spiel beginnt.

Spieler B / Spieler A	Strategie 1 Augen auf	Strategie 2 Augen zu
Strategie 1 Augen auf	(-1 , -1)	(2 , 0)
Strategie 2 Augen zu	(0 , 2)	(1 , 1)

Physik sozio-ökonomischer Systeme mit dem Computer (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer) Vorlesung WS 2017/2018, Fr. 15-17.00 Uhr, PC-Pool 01.120

Zusätzlich zur Vorlesung werden ab dem 27.10.2017 freiwillige Übungstermine eingerichtet, die jeweils freitags, eine Stunde vor der Vorlesung im PC-Pool 01.120 stattfinden (Fr. 14-15.00 Uhr).

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in das interdisziplinäre Forschungsfeld der *Physik sozio-ökonomischer Systeme*. In sozio-ökonomischen Systemen, wie z.B. bei Finanzmärkten, sozialen Netzwerken, Verkehrssystemen oder wissenschaftliche Kooperationsnetzwerken, sind die dem System zugrunde liegenden Akteure ständigen Entscheidungssituationen ausgesetzt, wobei der Erfolg und die Auswirkung der individuell gewählten Strategie von den Entscheidungen der anderen beteiligten Akteuren abhängt. Die (evolutionäre) Spieltheorie und die Physik komplexer Netzwerke stellen die beiden Grundsäulen der theoretischen Beschreibung und mathematischen Formulierung solcher Systeme dar. Im ersten Teil des Kurses werden die grundlegenden Konzepte der Spieltheorie thematisiert und die Studierenden erlernen, unter Verwendung von Computeralgebra-Systemen (Maple und Mathematica) deren Anwendung auf diverse Spielklassen. Neben den endlichen Zweipersonen-Spielen und N-Personen-Spielen wird auch auf die evolutionäre Entwicklung ganzer Spieler-Populationen eingegangen

Inhalte der Vorlesung

SPIELTHEORIE

EVOLUTIONÄRE SPIELTHEORIE

KOMPLEXE NETZWERKE (NETWORK SCIENCE)

EVOLUTIONÄRE SPIELTHEORIE AUF KOMPLEXEN NETZWERKEN

QUANTEN-SPIELTHEORIE

ANWENDUNGSFELDER

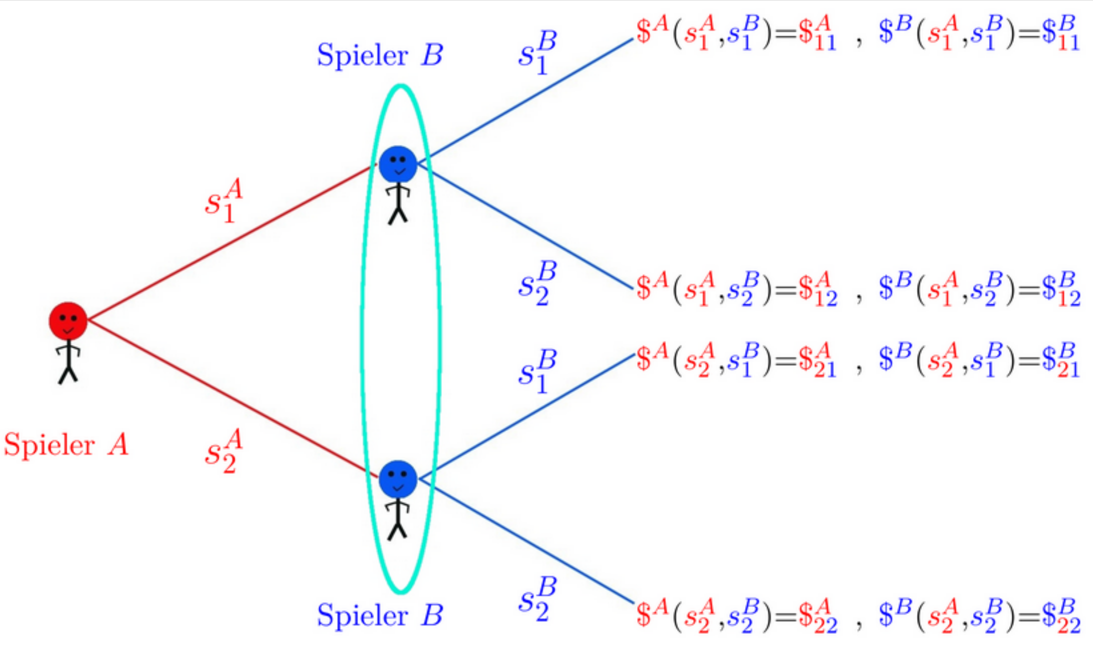
I.1.1 Definition eines Spiels

Die formale mathematische Definition eines *Simultanen (N Spieler)-(m Strategien) Spiels in strategischer Form mit Auszahlung* (siehe z.B. [2,3]) benötigt lediglich die Angabe dreier Größen: Die Menge $\mathcal{I}$ der Spieler, die Menge (der Raum) $\mathcal{S}$ der Strategien der Spieler und ihre Auszahlungsfunktion (Präferenzordnungen) \$.

Ein Spiel $\Gamma := (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \$)$ in strategischer Form mit Auszahlung ist hinreichend definiert, wenn die folgenden drei Größen bekannt sind:

- Menge der Spieler: $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$
  Die Menge der Spieler $\mathcal{I}$ kann unter Umständen aus unterschiedlichen Teilmengen bestehen, die ihrerseits unterschiedliche Strategiemengen $\mathcal{S}$ besitzen. In sozio-ökonomischen Netzwerken stellen die Spieler die jeweiligen Knoten des Netzwerkes dar (näheres siehe Teil II).
- Menge der reinen Strategien der Spieler: $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2 \times \dots \times \mathcal{S}^N$
  Jeder Spieler $\mu \in \mathcal{I}$ besitzt eine eigene Menge an reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu = \{s_1^\mu, s_2^\mu, \dots, s_{m_\mu}^\mu\}$, wobei jede dieser m_μ Strategien eine für ihn mögliche Entscheidung darstellt.
- Präferenzordnungen der Spieler, quantifiziert durch eine vektorwertige Auszahlungsfunktion:
  $\$ = \left(\$^1, \$^2, \dots, \$^N\right) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^N$
  Nachdem jeder Spieler (ohne die Entscheidung seiner Mitspieler zu kennen) eine Strategie aus seiner Strategienmenge $\mathcal{S}^\mu$ ausgewählt hat, beurteilt er die entstehende Strategienkombination $\mathcal{S}$ entsprechend seiner Präferenzordnung (Auszahlungsfunktion) $\$^\mu$.

Um diese formale Definition im einzelnen zu erklären, beschränken sich die folgenden Darlegungen auf den einfachsten Fall des simultanen



Spielbaum eines (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit den Auszahlungsfunktionen für Spieler A ($\$^A$) und Spieler B ($\$^B$).

Die nebenstehende Abbildung stellt den Spielbaum eines simultanen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels dar. Beide Spieler (Spieler A und Spieler B) treffen die Entscheidung, welche der beiden reinen Strategien (s_1 und s_2) sie auszuwählen gedenken, zur gleichen Zeit, d.h. beim Zeitpunkt der Entscheidung wissen beide Spieler nicht, welche der Strategien der andere Spieler auswählt. $\$^\mu$ (mit $\mu = A,\ B$) bezeichnet die Auszahlung, welche den Spielern nach Bekanntgabe ihrer Entscheidung ausgezahlt wird. Die Auszahlungen der vier möglichen Strategienkombinationen werden im folgenden durch die Auszahlungsmatrizen $\hat{\$}^\mu$ angegeben. Die oben angegebene Definition vereinfacht sich in einem solchen (2×2) Spiel somit wie folgt:

(2×2) Spiel:

$$\Gamma := \left(\{A, B\}\, , \mathcal{S}^A \times \mathcal{S}^B, (\hat{\$}^A, \hat{\$}^B) \right)$$

Menge der reinen Strategien des Spielers A und B:

$$\mathcal{S}^A = \{s_1^A, s_2^A\} \ , \ \mathcal{S}^B = \{s_1^B, s_2^B\}$$

Auszahlungsmatrix der Spieler A und B:

$$\hat{\$}^A = \begin{pmatrix} \$_{11}^A & \$_{12}^A \\ \$_{21}^A & \$_{22}^A \end{pmatrix} , \ \hat{\$}^B = \begin{pmatrix} \$_{11}^B & \$_{12}^B \\ \$_{21}^B & \$_{22}^B \end{pmatrix}$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Spielbaum eines simultanen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels. Die ovale, türkisene Linie visualisiert den simultanen Charakter des Spiels; ohne diese, wäre der Spielablauf ein sequentieller und Spieler B wüste schon wie sich Spieler A entschieden hätte, bevor er seine Entscheidung trifft. Die vier möglichen Ausgänge des Spiels sind mit unterschiedlichen

Definition: Dominante Strategie

Im Folgenden werden zwei fundamentale Gleichgewichtskonzepte der Spieltheorie vorgestellt. Wir beschränken uns wieder auf ein *Simultanes (N Spieler)-(m Strategien) Spiel in strategischer Form mit Auszahlung*. Eine Strategienkombination aller Spieler $\boldsymbol{s} = \left(s^1, s^2, .., s^N\right) \in \mathcal{S}$ setzt sich aus der gewählten Strategie des μ-ten Spielers $s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$ und der Strategienkombination aller Spieler mit Ausnahme des μ-ten Spielers $\boldsymbol{s}^{-\mu} := \left(s^1, s^2, .., s^{\mu-1}, s^{\mu+1}, .., s^N\right) \in \mathcal{S}^{-\mu}$ zusammen; also $\boldsymbol{s} = \left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \in \mathcal{S} = \mathcal{S}^\mu \times \mathcal{S}^{-\mu}$.

Eine Strategienkombination $\boldsymbol{s}^\dagger = \left(s^{1\dagger}, s^{2\dagger}, .., s^{N\dagger}\right)$ ist ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn die folgenden Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ erfüllt ist:

Gleichgewicht in dominanten Strategien:

$$\$^\mu \left(s^{\mu\dagger}, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \;\geq\; \$^\mu \left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \quad \forall \;\mu \in \mathcal{I} \;\text{ und }\; \forall \;\boldsymbol{s} = \left(s^\mu, \boldsymbol{s}^{-\mu}\right) \in \mathcal{S}$$

Definition: Nash-Gleichgewicht

Eine Strategienkombination $s^* = \left(s^{1*}, s^{2*}, .., s^{N*}\right)$ nennt man ein Nash-Gleichgewicht, falls die folgenden Bedingung für alle $\mu \in \mathcal{I}$ gilt:

Nash-Gleichgewicht:

$$\$^\mu \left(s^{\mu*}, s^{-\mu*}\right) \;\geq\; \$^\mu \left(s^\mu, s^{-\mu*}\right) \quad \forall\; \mu \in \mathcal{I} \;\text{ und }\; \forall\; s^\mu \in \mathcal{S}^\mu$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist demnach eine Strategienkombination, von der aus kein Spieler einen Vorteil erhalten würde, wenn er von seiner Strategie abweichen würde - er würde keine größere Auszahlung erhalten. Es gilt, dass jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht ist. Im folgenden werden die beiden definierten Gleichgewichtskonzepte am Beispiel zweier simultanen (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiele illustriert.

Dilemma des Wettrüstens

(3. Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte)

2. Es gibt nur ein Nash-Gleichgewicht, das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist:

	Aufrüsten	Abrüsten
Aufrüsten	(1 , 1)	(4 , 0)
Abrüsten	(0 , 4)	(2 , 2)

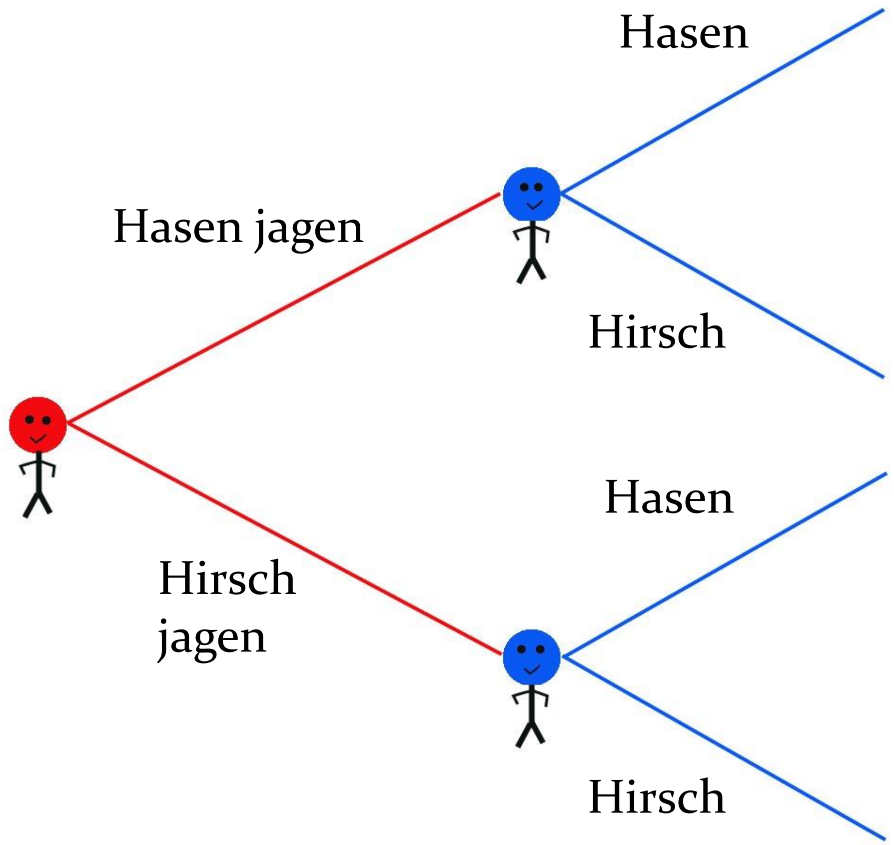
(Aufrüsten , Aufrüsten) ist die dominante Strategie des Spiels.

Wie kann die Welt diesem Dilemma entkommen?

In der Quantenspieltheorie kann man mittels einer möglichen Verschränkung der Quanten-Entscheidungszustände der Spieler dem Dilemma entkommen (siehe Teil 3). Dieser auf Vertrauen basierende Zustand wurde nach der Zeit des kalten Krieges realisiert, droht nun jedoch instabil zu werden.

Rousseaus Hirschjagt - Spiel

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)



Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagt gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagt, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagt, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagt entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

Nash-Gleichgewichte im Hirschjagt-Spiel

	Spieler B **Hasen** jagen	Spieler B **Hirsch** jagen
Spieler A **Hasen** jagen	(2 , 2)	(4 , 0)
Spieler A **Hirsch** jagen	(0 , 4)	(5 , 5)

Gemischte Strategien

Die Menge der gemischten Strategien der Spieler $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}^1 \times \tilde{\mathcal{S}}^2 \times \ldots \times \tilde{\mathcal{S}}^N$ setzt sich aus den einzelnen Mengen der gemischten Strategien der Spieler zusammen. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers $\mu \in \mathcal{I}$ ($\tilde{\mathcal{S}}^\mu$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien $\mathcal{S}^\mu$ verstanden werden, wobei die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien des Spielers μ aus m_μ reellwertigen Zahlen bestehen, die folgenden Normalisierungsbedingungen unterliegen:

$$\tilde{\mathcal{S}}^\mu = \left\{ (\tilde{s}_1^\mu, \tilde{s}_2^\mu, \ldots, \tilde{s}_{m_\mu}^\mu) \mid \sum_{i=1}^{m_\mu} \tilde{s}_i^\mu = 1, \tilde{s}_i^\mu \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m_\mu \right\}$$

Auszahlungsfunktion in gemischten Strategien

Die einzelnen Werte $\tilde{s}^\mu_i$ können als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie i interpretiert werden. Unter Verwendung der gemischten Strategien lässt sich eine gemischte Auszahlungsfunktion der Spieler wie folgt definieren:

$$\tilde{\$} = \left(\tilde{\$}^1, \tilde{\$}^2, \ldots, \tilde{\$}^N\right) : \tilde{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}^N \,, \text{ wobei } \quad \tilde{\$}^\mu(\tilde{s}^1, \tilde{s}^2, \ldots, \tilde{s}^N) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{i_N=1}^{m_N} \$^\mu(s^1_{i_1}, s^2_{i_2}, \ldots, s^N_{i_N}) \prod_{\nu=1}^{N} \tilde{s}^\nu_{i_\nu}$$

Im folgenden wird das Konzept der gemischten Erweiterung für den Fall eines (2 Spieler)-(2 Strategien) Spiels illustrieren. Die Menge der gemischten Strategien des Spielers A ($\tilde{\mathcal{S}}^A$) und B ($\tilde{\mathcal{S}}^B$) kann als eine mathematische Verallgemeinerung der Menge der reinen Strategien ($\mathcal{S}^A$ und $\mathcal{S}^B$) verstanden werden. Die einzelnen Elemente der Menge der gemischten Strategien eines Spielers $\mu = A, B$ ($\tilde{\mathbf{s}}^\mu = (\tilde{s}^\mu_1, \tilde{s}^\mu_2) \in \mathcal{S}^\mu$) besteht aus zwei reellwertigen Zahlen ($\tilde{s}^\mu_1 \in [0,1]$ und $\tilde{s}^\mu_2 \in [0,1]$) und kann als die Wahrscheinlichkeit des Spielers μ zur Wahl der Strategie 1 ($\tilde{s}^\mu_1$) bzw. der Strategie 2 ($\tilde{s}^\mu_2$) interpretiert werden. Desweiteren gilt die folgende Normalisierungsbedingung: $\tilde{s}^\mu_1 + \tilde{s}^\mu_2 = 1 \;\forall\, \mu = A, B$. Unter Verwendung der Auszahlungsmatrizen des Spielers A ($\hat{\$}^A$) und B ($\hat{\$}^B$) schreibt sich die gemischte Auszahlungsfunktion des Spielers $\mu = A, B$ wie folgt:

$$\tilde{\$}^\mu : \left(\tilde{\mathcal{S}}^A \times \tilde{\mathcal{S}}^B\right) \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{\$}^\mu((\tilde{s}^A_1, \tilde{s}^A_2), (\tilde{s}^B_1, \tilde{s}^B_2)) = \$^\mu_{11} \tilde{s}^A_1 \tilde{s}^B_1 + \$^\mu_{12} \tilde{s}^A_1 \tilde{s}^B_2 + \$^\mu_{21} \tilde{s}^A_2 \tilde{s}^B_1 + \$^\mu_{22} \tilde{s}^A_2 \tilde{s}^B_2$$

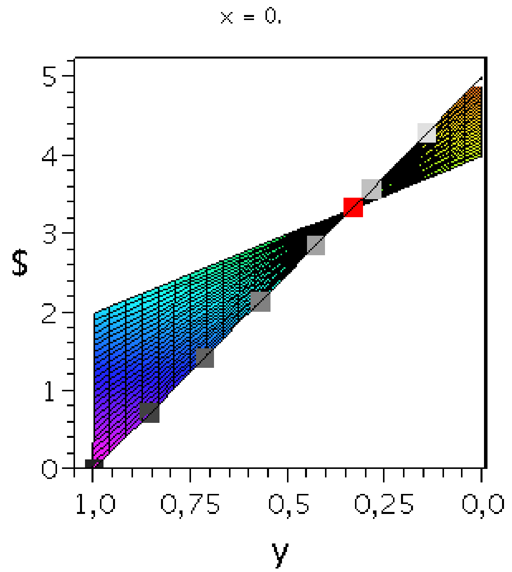
Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Ein Spezialfall des Nash-Gleichgewichts besteht, falls die partielle Ableitung der gemischten Auszahlungsfläche verschwindet. Man nennt dann ein solches Nash-Gleichgewicht $(\tilde{s}^{A\star}, \tilde{s}^{B\star})$ ein internes Nash-Gleichgewicht bzw. ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

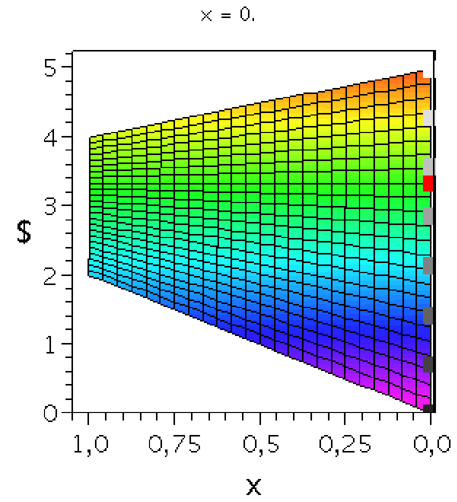
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^A}\right|_{\tilde{s}^B = \tilde{s}^{B\star}} = 0 \quad \forall \;\; \tilde{s}^A \in [0,1] \;\; , \;\; \tilde{s}^{B\star} \in]0,1[$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^B}\right|_{\tilde{s}^A = \tilde{s}^{A\star}} = 0 \quad \forall \;\; \tilde{s}^B \in [0,1] \;\; , \;\; \tilde{s}^{A\star} \in]0,1[$$



Das gemischte Nash-Gleichgewicht im Hirschjagt-Spiel liegt bei der Strategien-kombination (x=1/3 , y=1/3) .

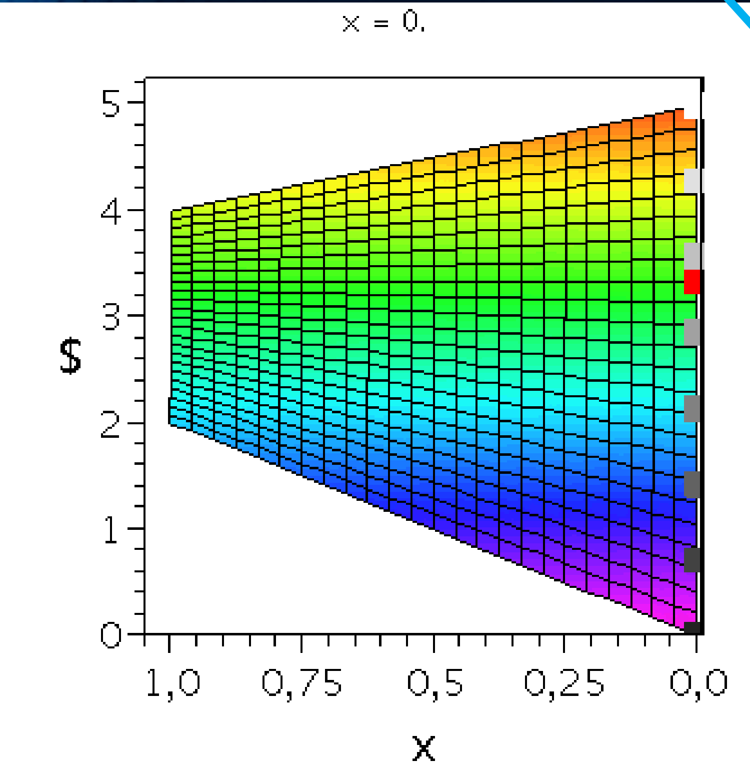


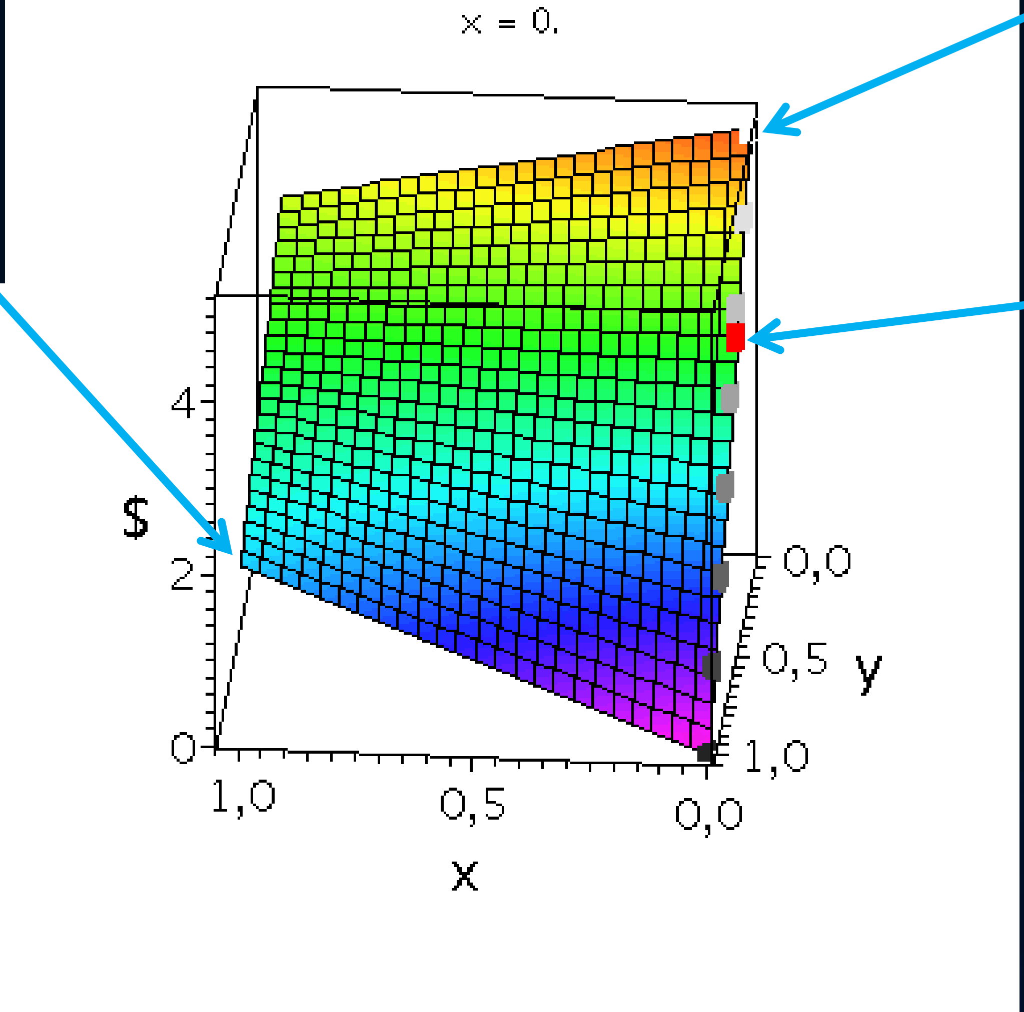
Das Nash-Gleichgewichte im Hirschjagt-Spiel

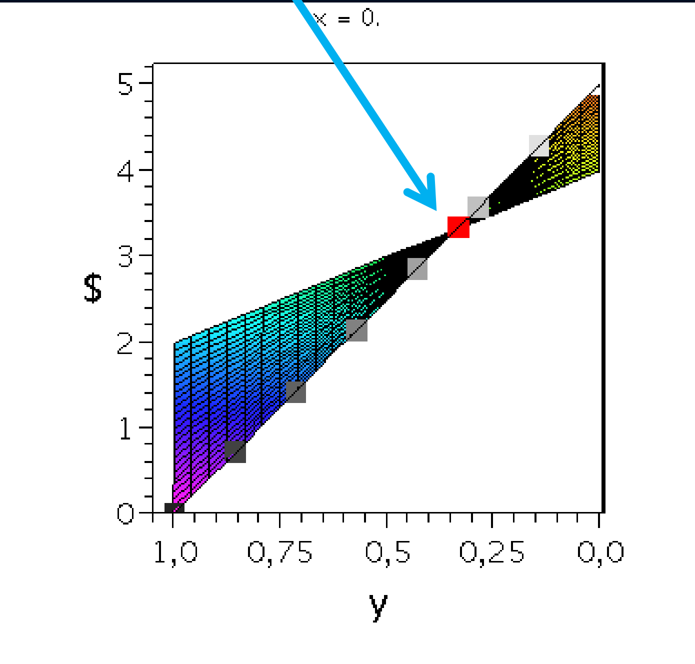
Reines Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(0,0)=(Hirsch jagen,Hirsch jagen)

Reines Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1,1)=
(Hasen jagen,Hasen jagen)

Gemischtes Nash-Gleichgewicht
(x,y)=(1/3 , 1/3)

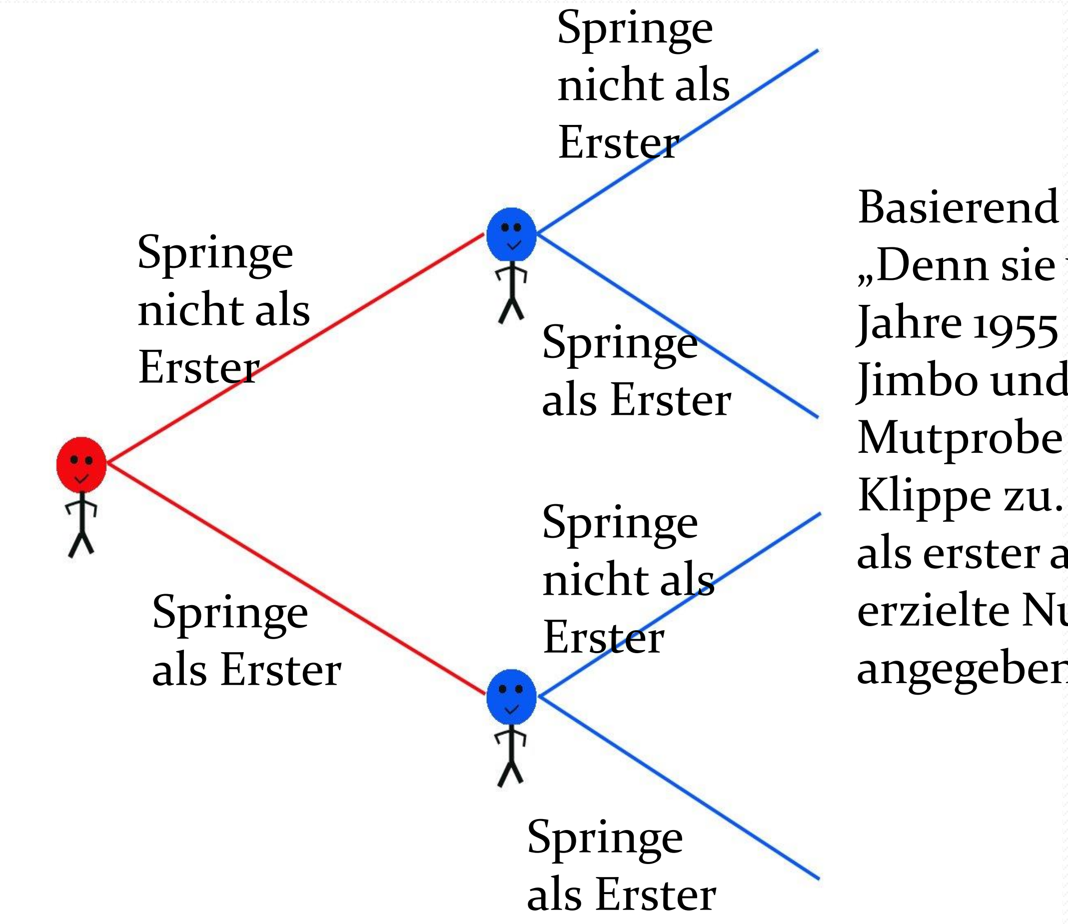






Das Angsthasen-Spiel

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1 , -1)	(2 , 0)
Springe	(0 , 2)	(1 , 1)

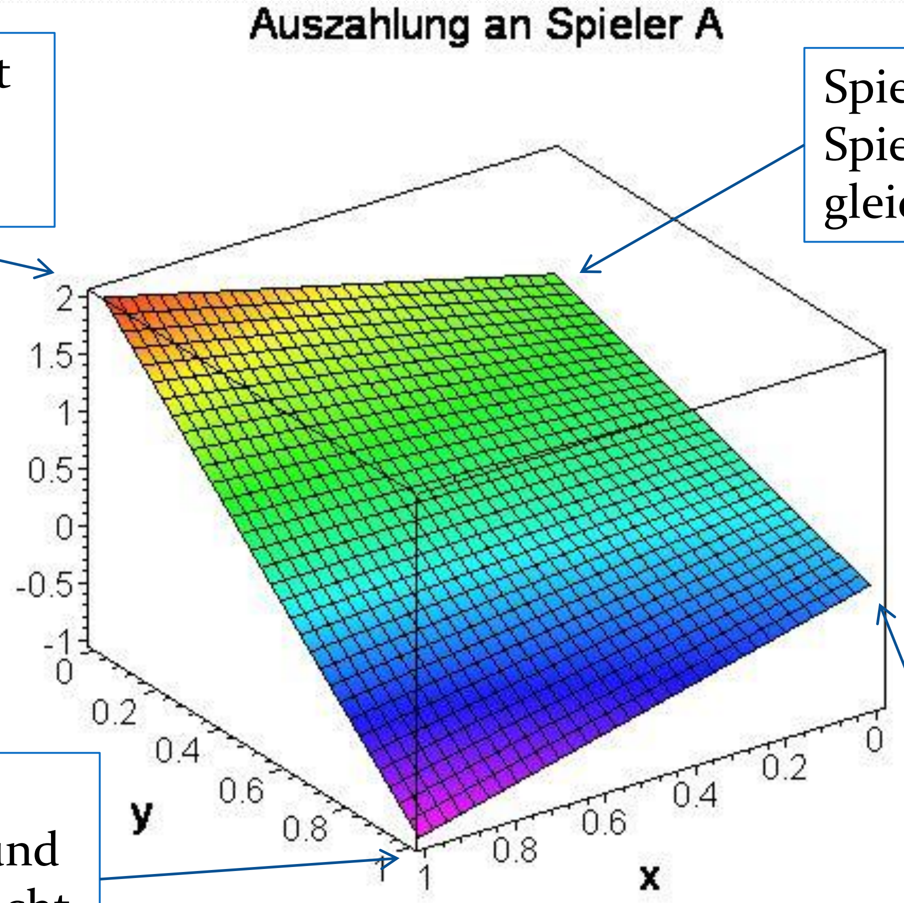


Basierend auf dem Film von Nicholas Ray „Denn sie wissen nicht was sie tun“ aus dem Jahre 1955 (Hauptdarsteller „James Dean“): Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto rausspringt. Der erzielte Nutzen kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

Auszahlungsfunktion des Spielers A in gemischten Strategien

Spieler A springt nicht als erster und B springt

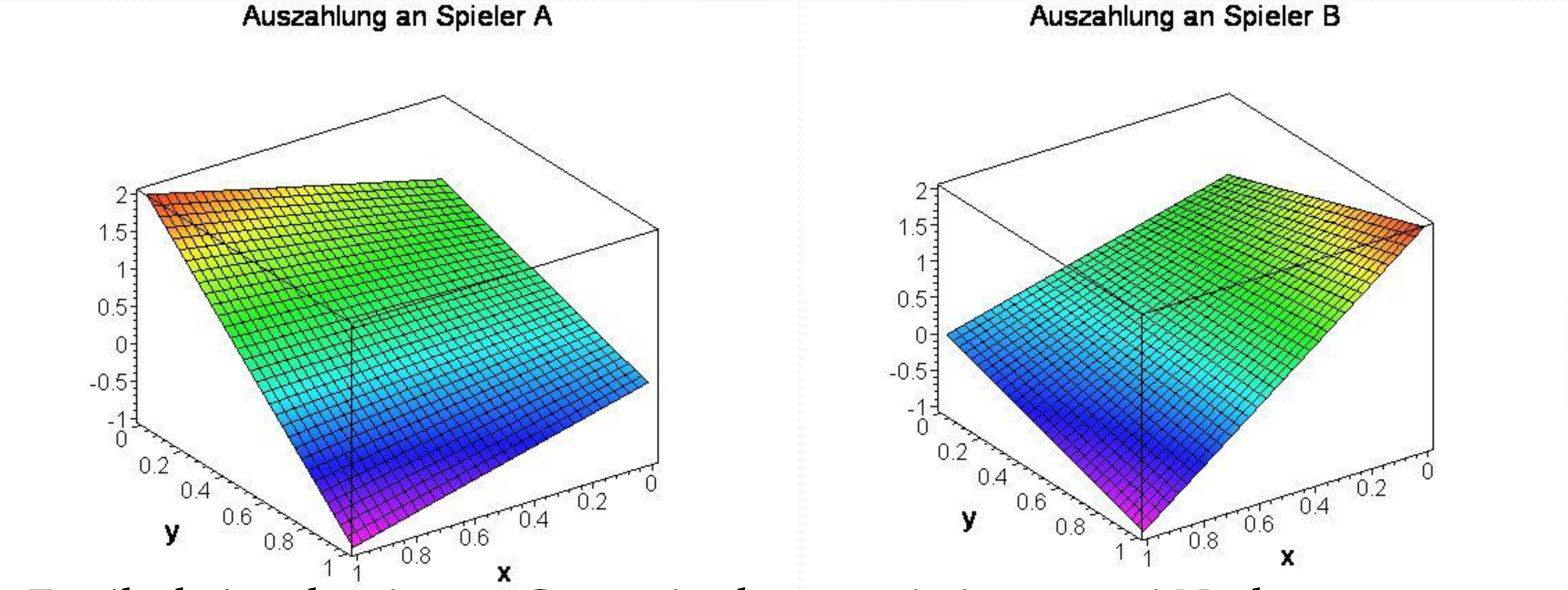
Spieler A und Spieler B springen gleichzeitig



Spieler A springt nicht als erster und B springt auch nicht als erster.

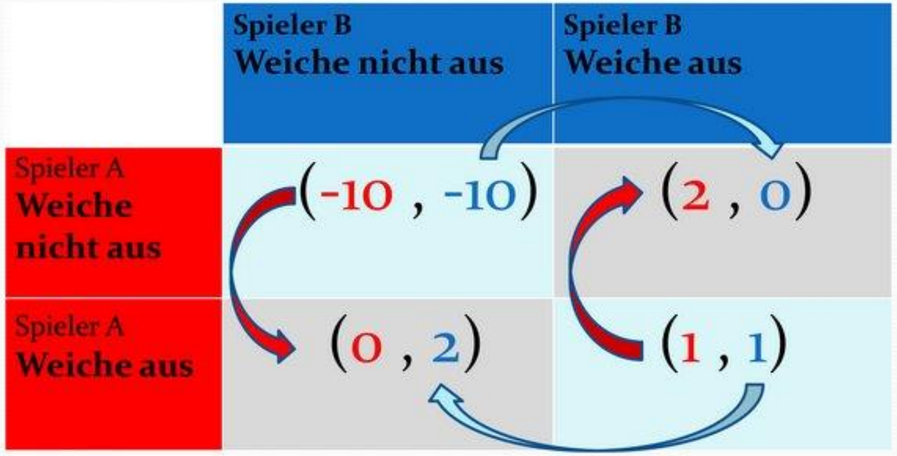
Spieler A springt und B springt nicht als erster

Nash-Gleichgewichte und Dominante Strategien



Es gibt keine dominante Strategie aber es existieren zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ((x=1,y=0) und (x=0,y=1)) und ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien. Der y-Wert des gemischten Nash-Gleichgewicht lässt sich finden, indem man die Linie auf der Auszahlungsfläche des Spielers A ermittelt, die bei festgehaltenem y-Wert weder rauf noch runter geht, wenn man x variiert. (x-Wert durch Ausz. B)

Weitere Version des Angsthasen-Spiels



Veranschaulichung der dominanten Strategie "Gestehe" mittels der *Abbildung der besten Antwort* im Gefangenendilemma.

Beispiel: Das Angsthasen-Spiel (Chicken Game)

Das *Angsthasen-Spiel* ist ein simultanes (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel und kann z.B. mittels der folgenden Geschichte illustriert werden (siehe z.B. S.16 in [2]).

"Auf einer einsamen Landstraße in Indien, bei der es nur eine geteerte Fahrbahn gibt, kommen sich zwei Autos mit hoher Geschwindigkeit entgegen. Beide Fahrer stehen nun vor der Entscheidung ob sie dem Anderen die Fahrbahn überlassen und Ausweichen oder mit hoher Geschwindigkeit weiterfahren um zu hoffen, dass der Andere ausweicht." Eine weitere Deutung des *Angsthasen-Spiel* basiert auf dem Film von Nicholas Ray "Denn sie wissen nicht was sie tun" aus dem Jahre 1955 (mit James Dean): "Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto herrausspringt."

Symmetriebedingung der Auszahlungsmatrizen

	Spieler 2 wählt Strategie 1	**Spieler 2 wählt Strategie 2**
Spieler 1 wählt Strategie 1	$(\$^1_{11}, \$^2_{11})$	$(\$^1_{12}, \$^2_{12})$
Spieler 1 wählt Strategie 2	$(\$^1_{21}, \$^2_{21})$	$(\$^1_{22}, \$^2_{22})$

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} \$^2_{11} & \$^2_{12} \\ \$^2_{21} & \$^2_{22} \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$^1_{11} & \$^1_{12} \\ \$^1_{21} & \$^1_{22} \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} \$^2_{11} & \$^2_{21} \\ \$^2_{12} & \$^2_{22} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \$^1_{11} & \$^1_{12} \\ \$^1_{21} & \$^1_{22} \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

Transponierte Matrix

Allgemeines (2x2)-Spiel

	Spieler B wählt Strategie 1	Spieler B wählt Strategie 2
Spieler A wählt Strategie 1	$(\$_{11}^{A}, \$_{11}^{B})$	$(\$_{12}^{A}, \$_{12}^{B})$
Spieler A wählt Strategie 2	$(\$_{21}^{A}, \$_{21}^{B})$	$(\$_{22}^{A}, \$_{22}^{B})$

Symmetrisches (2x2)-Spiel

	Spieler B Strategie 1 y=1	Spieler B Strategie 1 y=0
Spieler A Strategie 1 x=1	(a , a)	(b , c)
Spieler A Strategie 2 x=0	(c , b)	(d , d)

Die Klasse der dominanten Spiele ($a > c$ und $b > d$ bzw. $a < c$ und $b < d$)

Bei dieser Spielklasse dominiert eine Strategie die andere. Es existiert nur ein reines Nash-Gleichgewicht welches die dominante Strategie des Spiels darstellt. Dieser Fall tritt ein, falls:

$a > c$ und $b > d$: Strategie 1 dominiert Strategie 2; dominante Strategie bei $(x,y)=(1,1)$.

$a < c$ und $b < d$: Strategie 2 dominiert Strategie 1; dominante Strategie bei $(x,y)=(0,0)$.

Koordinationsspiele ($a > c$ und $b < d$)

Ein Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: $a > c$ und $b < d$. Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, symmetrische Nash-Gleichgewicht bei $(x,y)=(0,0)$ und $(x,y)=(1,1)$.

Anti-Koordinationsspiele ($a < c$ und $b > d$)

Ein Anti-Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: $a < c$ und $b > d$. Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, unsymmetrische Nash-Gleichgewicht bei $(x,y)=(0,1)$ und $(x,y)=(0,1)$.

Beispiel: Gefangenendilemma
(Symmetrisches (2x2)-Spiel)

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

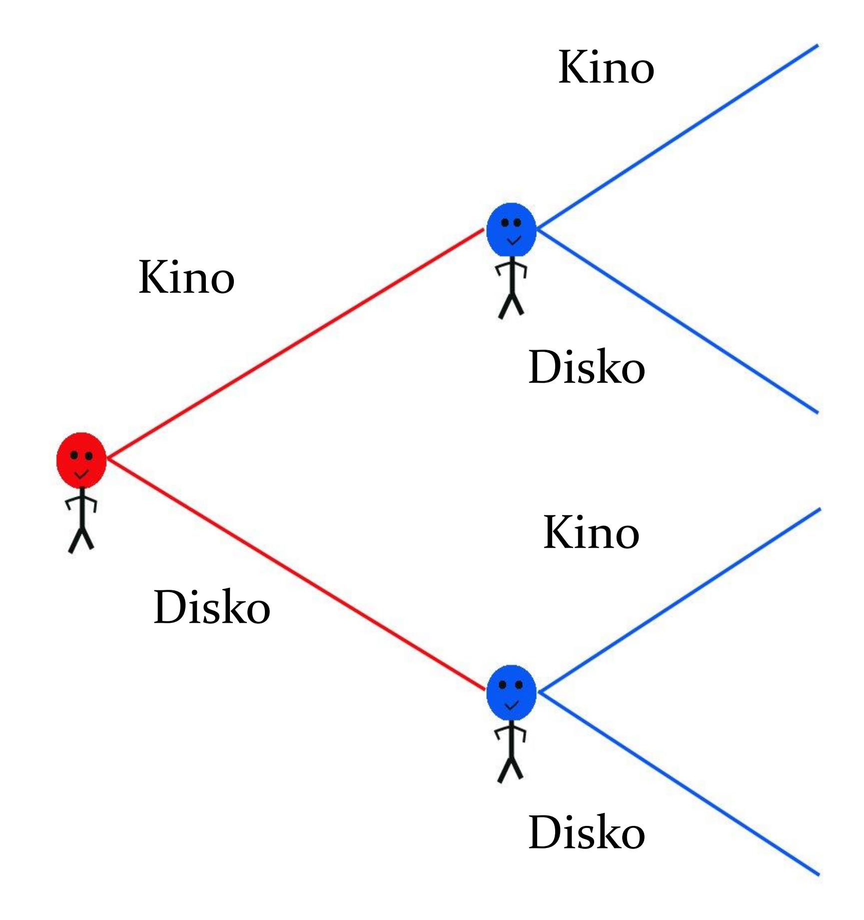
Symmetriebedingung stimmt:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

$\Rightarrow$ symmetrisches Spiel

Kampf der Geschlechter

	Kino	Disko
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)



Alexander und Bettina haben bei ihrem letzten Treffen nicht genau ausgemacht, wann und wo sie sich am Samstagabend treffen wollen. Bettina geht sehr gerne in das kleine Kino am Stadtrand (Spätvorstellung, Beginn 23.30 Uhr), Alexander aber würde gerne in die Diskothek im Zentrum der Stadt gehen. Keiner von ihnen hat ein Telefon. Bettina denkt, wird er mir zuliebe ins Kino gehen? Alexander denkt ähnlich, wird sie mir zuliebe in die Diskothek gehen? Beiden liegt aber viel daran sich am Samstagabend zu treffen. Der erzielte Nutzen dieses Spiels kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

Kampf der Geschlechter

(Unsymmetrisches (2x2)-Koordinationspiel)

	Kino	Disko
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung stimmt nicht:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

$\Rightarrow$ unsymmetrisches Spiel

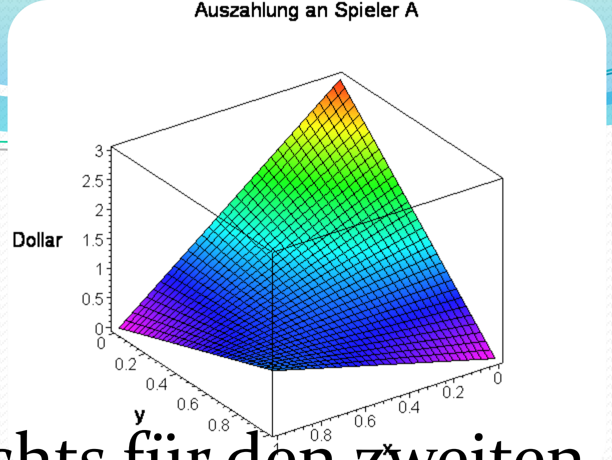
Kampf der Geschlechter

(Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien)

- Es gibt keine dominante Strategie bei diesem Spiel.
- Es gibt zwei reine Nash-Gleichgewichte:
  (Kino,Kino)
  (Disko, Disko)

	Kino	Disko
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)

Kampf der Geschlechter
(Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts für den zweiten Spieler (Bettina):

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers (Alexander): $\$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$

$$\$^1(x,y) = 1 \cdot x \cdot y + 0 \cdot x \cdot (1-y) + 0 \cdot (1-x) \cdot y + 3 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$
$$= 4 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 3$$

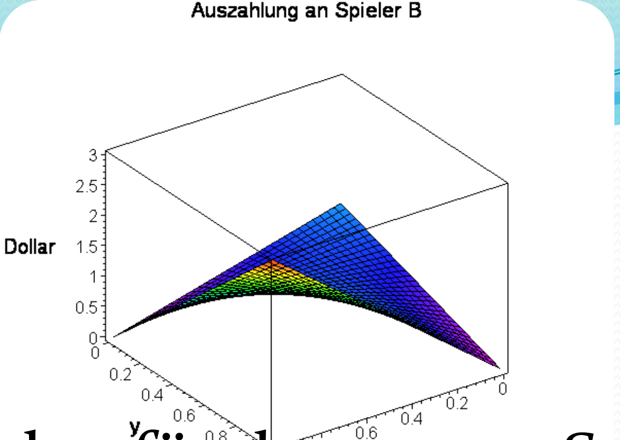
$$\left.\frac{\partial \$^1(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y^*} = 4 \cdot y^* - 3 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{3}{4} \approx 75\%$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht für Bettina befindet sich bei

$$y^* = \frac{3}{4} \approx 75\%$$

Kampf der Geschlechter

(Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts für den ersten Spieler (Alexander):

$$\text{Auszahlungsfunktion des 2-ten Spielers (Bettina)}: \quad \$^2 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$$

$$\$^2(x,y) = 3 \cdot x \cdot y + 0 \cdot x \cdot (1-y) + 0 \cdot (1-x) \cdot y + 1 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$= 4 \cdot x \cdot y - x - y + 1$$

$$\left.\frac{\partial \$^2(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x^*} = 4 \cdot x^* - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{1}{4} \approx 25\%$$

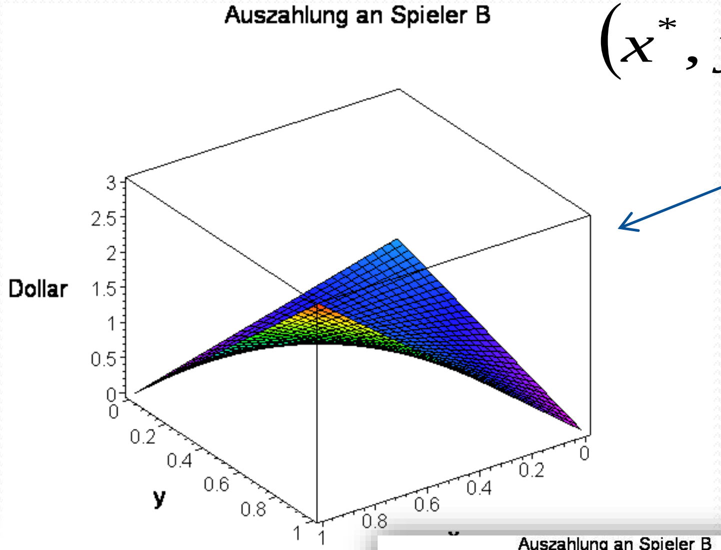
Das gemischte Nash-Gleichgewicht für Alexander befindet sich bei $x^* = \frac{1}{4} \approx 25\%$

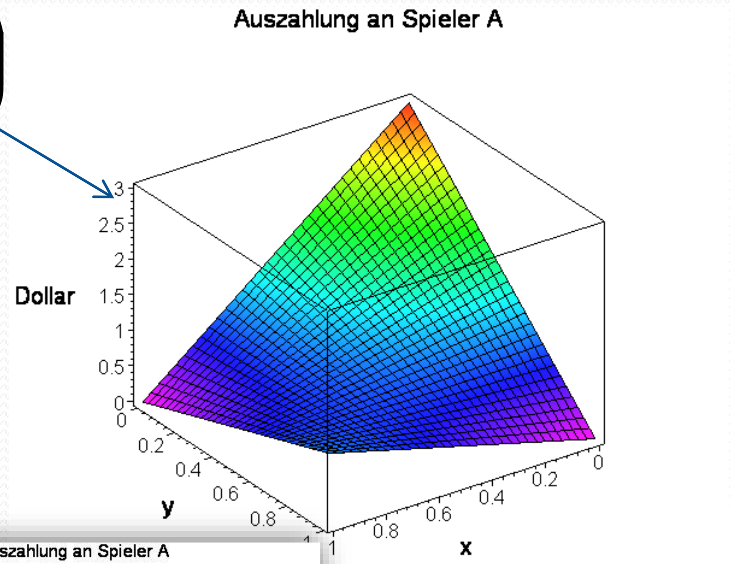
Kampf der Geschlechter

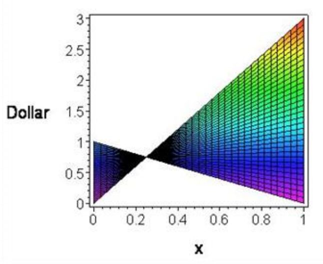
(Grafische Veranschaulichung des gemischten Nash-Gleichgewichts)

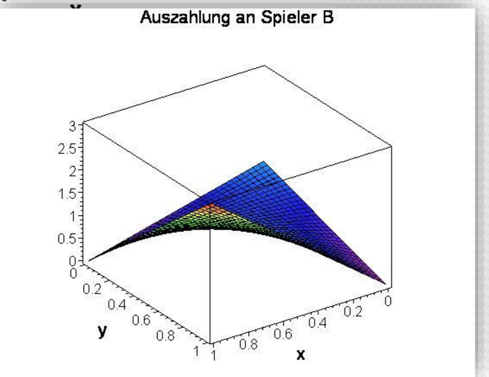
- Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien befindet sich bei

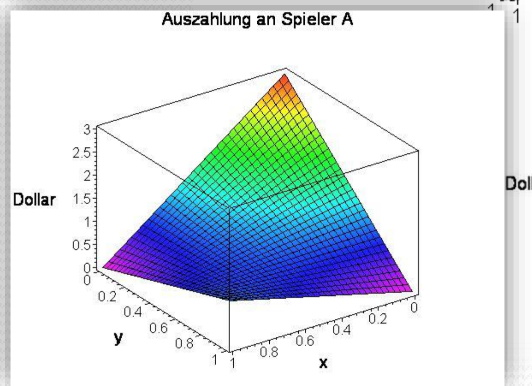
$$\left(x^*, y^*\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

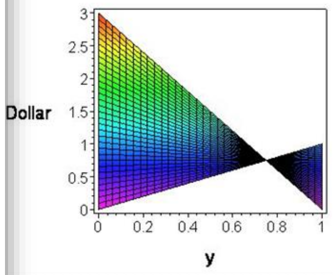






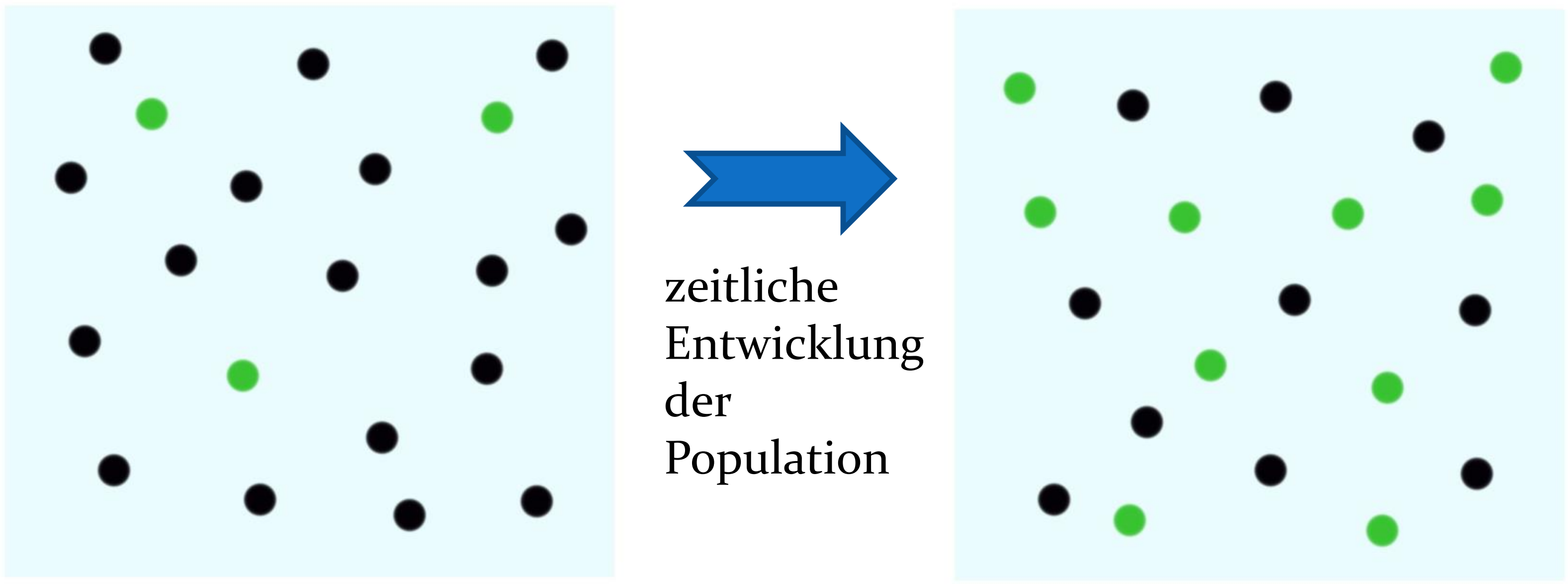






Evolutionäre Spieltheorie (I)

Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.

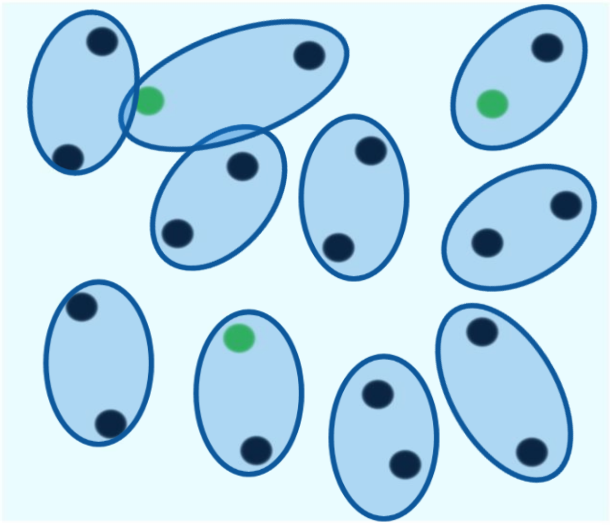


$x(0)=0.15$ $x(10)=0.5$

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
$x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

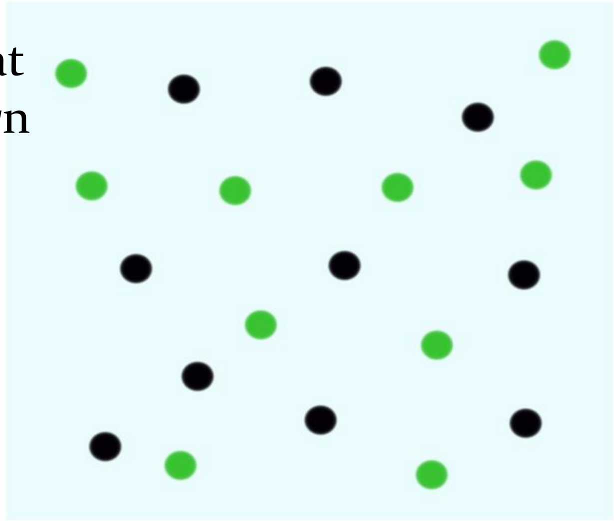
Evolutionäre Spieltheorie (II)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



x(0)=0.15

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt t=0 das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



x(10)=0.5

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt t=10 spielen schon 50% grün.

I.2.1 Die Gleichungen der evolutionären Dynamik

Dieses Kapitel fasst die wesentlichen Konzepte der deterministischen evolutionäre Spieltheorie zusammen. Die evolutionäre Spieltheorie untersucht das zeitliche Verhalten einer großen Anzahl von individuellen Spielern, der sogenannten Population (siehe [1,2,3,4]). Wir nehmen im folgenden zunächst an, dass die Population aus einer unendlichen Anzahl von individuellen Spieler besteht, die sich aus zwei separaten, unterscheidbaren Gruppen (A und B) zusammensetzt. Gegeben sei die strategische Form eines, zunächst noch unsymmetrischen (2 Personen)-(m Strategien) Spiels Γ. $x_i^\mu(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, m_\mu$ und $\mu = A, B$) seien die zeitabhängigen, gemittelten Anteile der Spieler innerhalb der Spielergruppe $\mu = A, B$, die die Strategie i wählen. Diese gruppenspezifischen Populationsvektoren ($\vec{x}^A(t) = (x_1^A(t), x_2^A(t), \ldots, x_{m_A}^A(t))$ und $\vec{x}^B(t) = (x_1^B(t), x_2^B(t), \ldots, x_{m_B}^B(t))$) unterliegen folgenden Normalisierungsbedingungen:

$$x_i^\mu(t) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m_\mu} x_i^\mu(t) = 1 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m_\mu \;,\; t \in \mathbb{R},\; \mu = A, B$$

Die gesamte Population spielt zu jedem Zeitpunkt das gleiche Spiel, wobei sich die einzelnen Spieler der Gruppe A mit Spielern der Gruppe B zufällig paaren, das simultane Spiel spielen, ihre erzielten Auzahlungen erhalten und dann erneut zufällig paaren. Eine Miteinbeziehung von zugrundeliegenden komplexen Netzwerkstrukturen, die eine nicht-zufällige Paarung in die Beschreibung mitaufnehmen, bzw. die Betrachtung einer endlichen Spielerpopulation erfordert meisst eine nicht analytische, nummerisch simulative Beschreibung; dies wird Gegenstand der Untersuchungen im Teil II und Teil III dieser Vorlesung sein.

Die zeitliche Veränderung der Populationsvektoren $\vec{x}^A(t)$ und $\vec{x}^B(t)$ spiegelt die in der Gruppe vorherschende Strategienwahl zum Zeitpunkt t wider und beschreibt demnach die evolutionäre Dynamik der interagierenden Menschengruppen. Die maßgeblichen Faktoren, die die evolutionäre Entwicklung bestimmen sind der Soziobiologie entnommen und basieren auf Reproduktion, Mutation und Selektion der Strategienentscheidungen. Die zugrundeliegende mathematische Beschreibung lehnt sich an die, in der theoretischen Biologie verwendete, sogenannte *Quasispezies-Gleichung* (siehe [1], S: 33) an und ist ein System nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Für das zuvor definierte evolutionäre Spiel besitzt die Differentialgleichung das folgende Aussehen:

$$\frac{d\vec{x}^A}{dt} = \left(\hat{\$}^A \, \vec{x}^B - \vec{x}^B \left(\hat{\$}^A \, \vec{x}^A \right) \right) \vec{x}^A$$

$$\frac{d\vec{x}^B}{dt} = \left(\hat{\$}^B \, \vec{x}^A - \vec{x}^A \left(\hat{\$}^B \, \vec{x}^B \right) \right) \vec{x}^B$$

$$\frac{dx_i^A(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A \, x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A \, x_k^A(t) \, x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \Bigg] \, x_i^A(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dx_j^B(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B \, x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B \, x_l^A(t) \, x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \Bigg] \, x_j^B(t) \quad ,$$

wobei $x_i^A(t),\ i = 1, 2, \ldots, m_A$ und $x_j^B(t),\ j = 1, 2, \ldots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Wir beschränken uns im folgenden auf den 2-Strategien Fall ($m_A = m_B = 2$), lassen jedoch weiter eine Unsymmetrie der Auszahlungsmatrix zu. Die beiden Komponenten der zweidimensionalen gruppenspezifischen Populationsvektoren lassen sich dann, aufgrund ihrer Normalisierungsbedingung, auf eine Komponente reduzieren ($x_2^A = 1 - x_1^A$ und $x_2^B = 1 - x_1^B$). Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben (siehe z.B. [4], S:116 oder [3], S:69):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^A + \$_{22}^A - \$_{12}^A - \$_{21}^A \right) \, y(t) + \left(\$_{12}^A - \$_{22}^A \right) \right] \, \left(x(t) - \left(x(t) \right)^2 \right) \, =: \, g_A(x,y) \qquad (2)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\left(\$_{11}^B + \$_{22}^B - \$_{12}^B - \$_{21}^B \right) \, x(t) + \left(\$_{12}^B - \$_{22}^B \right) \right] \, \left(y(t) - \left(y(t) \right)^2 \right) \, =: \, g_B(x,y)$$

Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ($\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$), in welchem die Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren $x(t) = y(t)$ annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)\right] \, x(t) \, =: \, g(x) \qquad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\hat{\$}\,\vec{x} - \vec{x}\left(\hat{\$}\,\vec{x}\right)\right)\vec{x}$$

Evolutionär stabile Strategien (ESS)

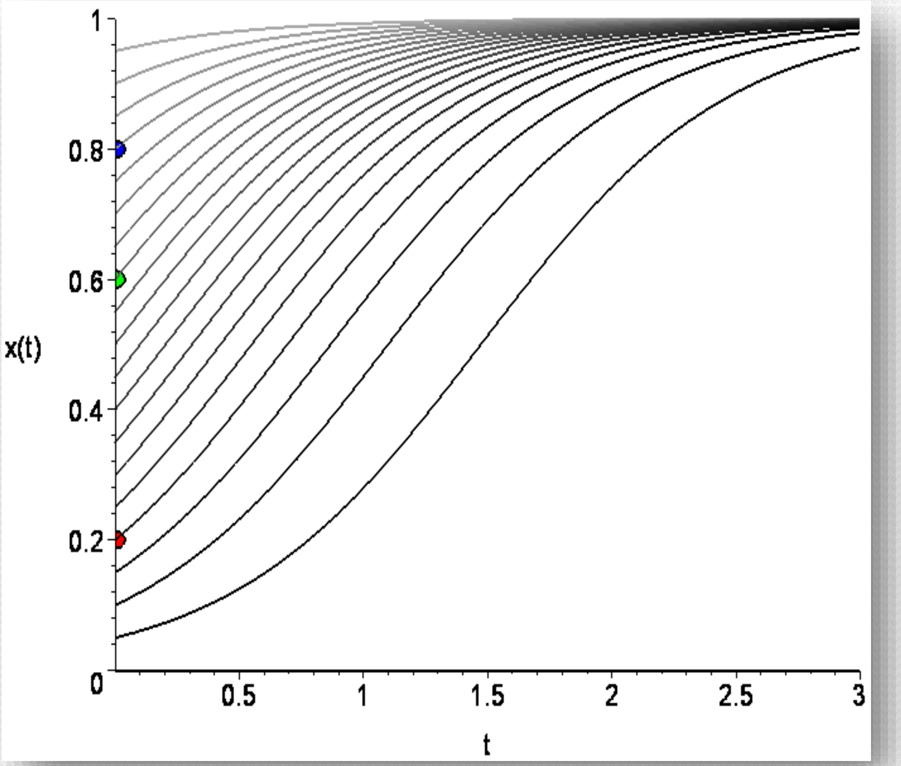
- Evolutionär stabile Strategien sind die stabilen Endzustände der Häufigkeitsverteilung x(t):

$$\underset{t \to \infty}{Limes}\left(x(t)\right)$$

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz einer ESS ist, dass diese ein Nash – Gleichgewicht des zugrundeliegenden Spiels ist.

Beispiel:
Gefangenendilemma ähnliche Spiele
Für die ESS des evolutionären Gefangenendilemma – Spiels ergibt sich:

$$\underset{t \to \infty}{Limes}\left(x(t)\right) = 1 \;\Rightarrow\; \text{alle "gestehen"}$$



Def.: Evolutionär stabile Strategie

(Für symmetrisches Zweipersonen-Spiel)

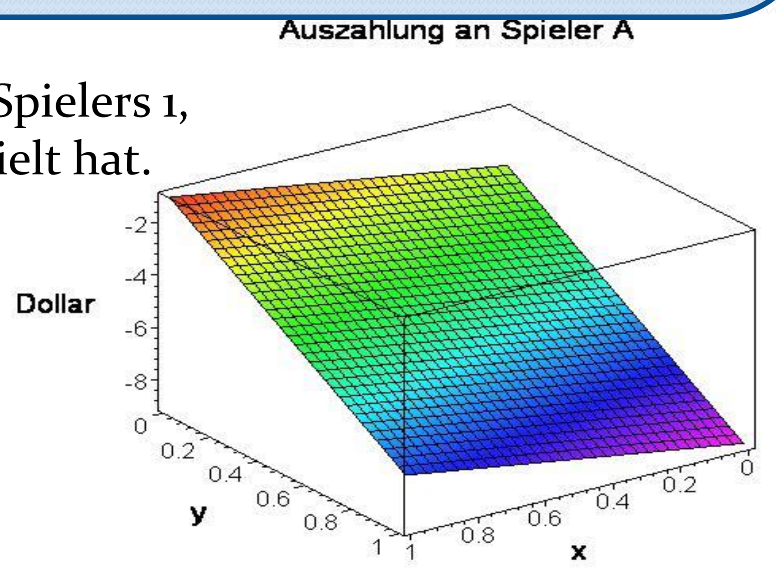
Mathematische Definition (W.Schlee):
Gegeben sei ein symmetrisches Zweipersonen-Spiel Γ mit der Auszahlungsmatrix $\hat{\$} := \hat{\$}^1 = \left(\hat{\$}^2\right)^T$. Eine Strategie $s^* := s^{1*} = s^{2*}$ heißt evolutionär stabile Strategie (ESS), wenn

1. (s^*, s^*) ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht des Spiels ist, und
2. $\forall s$ mit der Eigenschaft $s \neq s^*$ und $s \in r(s^*)$

   gilt $\$(s\ , s\ ) < \$(s^*, s\ )$

$r(s^*)$ ist die Menge der besten Antworten des Spielers 1, wenn der andere Spieler die Strategie s^* gespielt hat.

Beispiel:	$s_1^2 \hat{=} Ge$	$s_1^2 \hat{=} Sc$
$s_1^1 \hat{=} Ge$	(-7 , -7)	(-1 , -9)
$s_2^1 \hat{=} Sc$	(-9 , -1)	(-3 , -3)



Replikatordynamik

Wir beschränken uns zunächst auf symmetrische (2xM)-Spiele , d.h. zwei Personen - M Strategien Spiele. Da es sich um symmetrische Spiele handelt, sind alle Spieler gleichberechtigt und man kann von einer homogenen Population ausgehen.
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik beschreibt wie sich die einzelnen Populationsanteil der zur Zeit t gewählten Strategien $x_j(t)$, j=1,2,...M im Laufe der Zeit entwickeln.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{M} \$_{jk} \cdot x_k(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t)}_{\text{Durchschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population}} \right]$$

Wobei die Parameter $\$_{kl}$ die einzelnen Einträge in der Auszahlungsmatrix des 1.Spielers darstellen

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

Fitness der Strategie j

Durchschnitt-licher Erfolg der j-ten Strategie

Durchschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x2)-Spiele)

Wir beschränken uns nun auf symmetrische (2x2)-Spiele , d.h. zwei Personen - 2 Strategien Spiele (M=2). Die Differentialgleichung der Replikatordynamik vereinfacht sich unter dieser Annahme wie folgt:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^{2} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

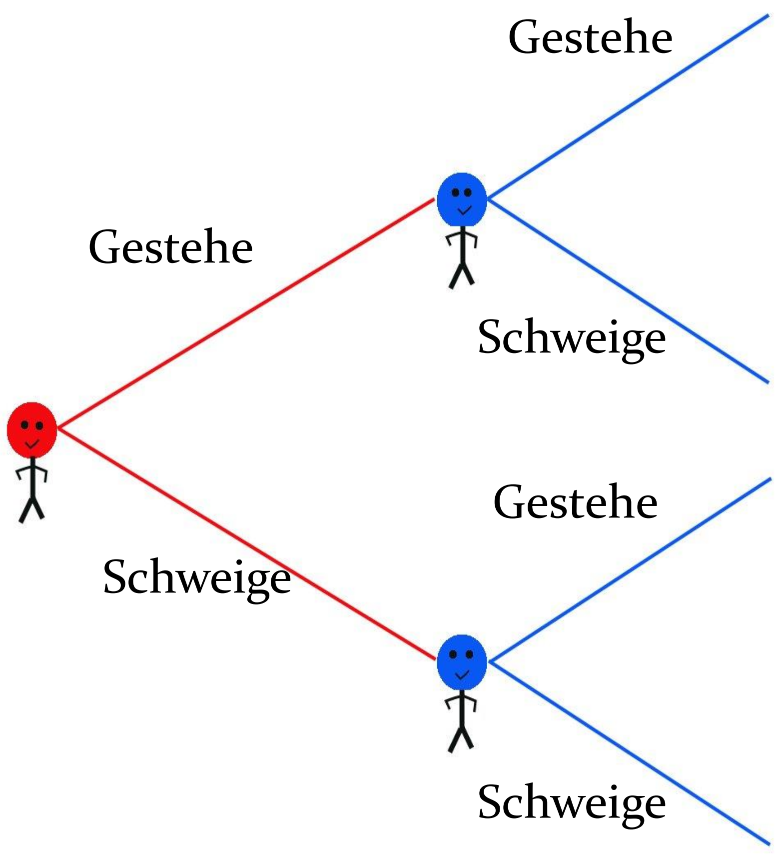
$$\frac{dx_j}{dt} = x_j \cdot \left[\$_{j1} \cdot x_1 + \$_{j2} \cdot x_2 - \left(\$_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \$_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 \right) \right]$$

Da es lediglich zwei Strategien und somit zwei Populationsanteile (x_1, x_2) gibt, können wir den zweiten Populationsanteil durch den ersten ausdrücken: $x_2 = 1 - x_1$
Wir setzen im Folgenden der Einfachheit halber $x = x_1$ und $1 - x = x_2$
und betrachten nur j=1.

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \left[\$_{11} \cdot x + \$_{12} \cdot (1-x) - \left(\$_{11} \cdot x \cdot x + \$_{12} \cdot x \cdot (1-x) + \$_{21} \cdot (1-x) \cdot x + \$_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-x) \right) \right]$$

Das Gefangenendilemma

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)



Bonnie und Clyde werden nach einem missglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Wenn beide schweigen kann der Staatsanwalt sie nur wegen verbotenen Waffenbesitzes für drei Jahre hinter Gitter bringen. Verrät jedoch einer den anderen, dann bekommt der Geständige als Zeuge der Anklage nur für ein Jahr hinter Gitter – der Nichtgeständige muss dann aber für neun Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide, so müssen sie sieben Jahre absitzen.

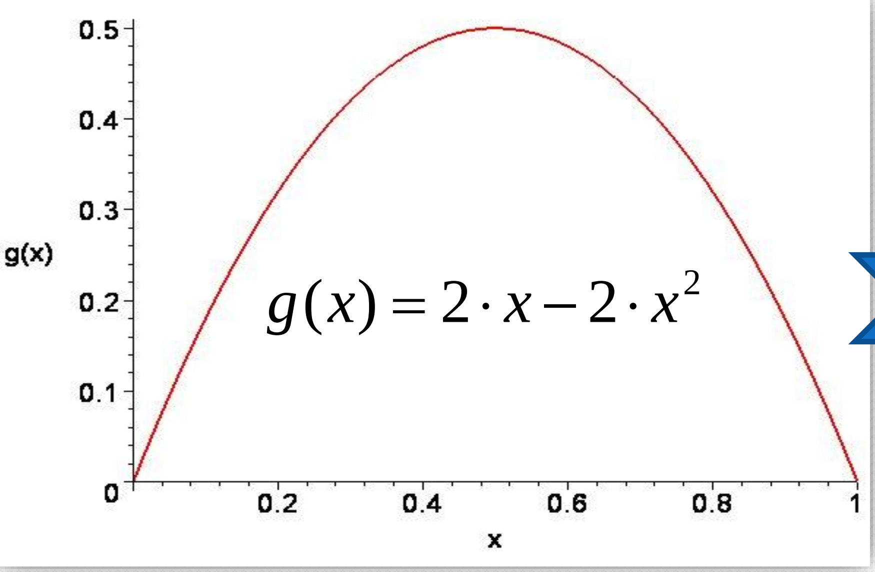
Replikatordynamik
(für das Gefangenendilemma)

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

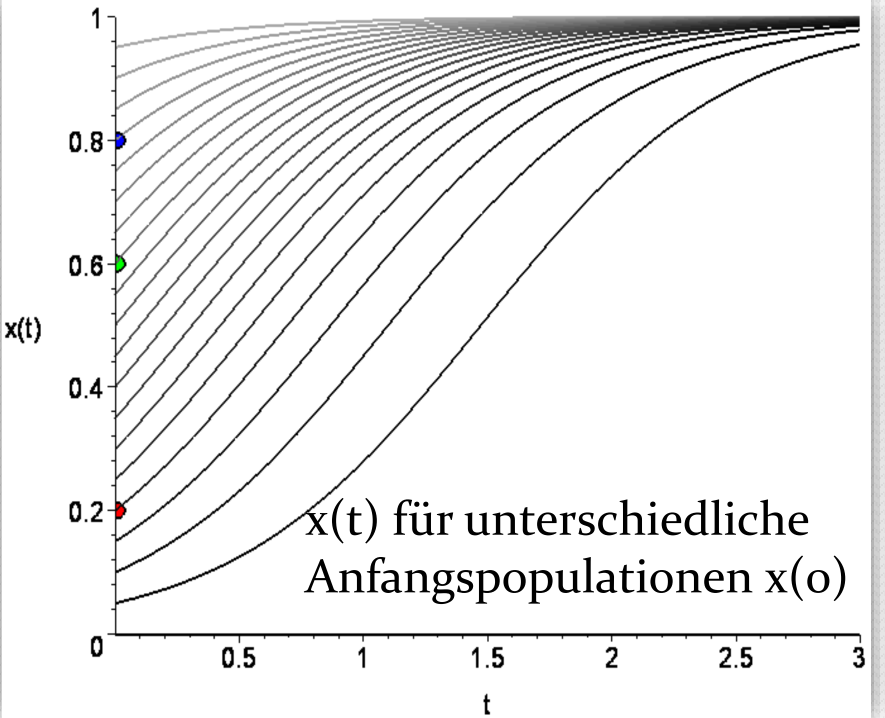
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Gefangenendilemma lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot \left(x(t)\right)^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-7-(-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3-(-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\right)$$

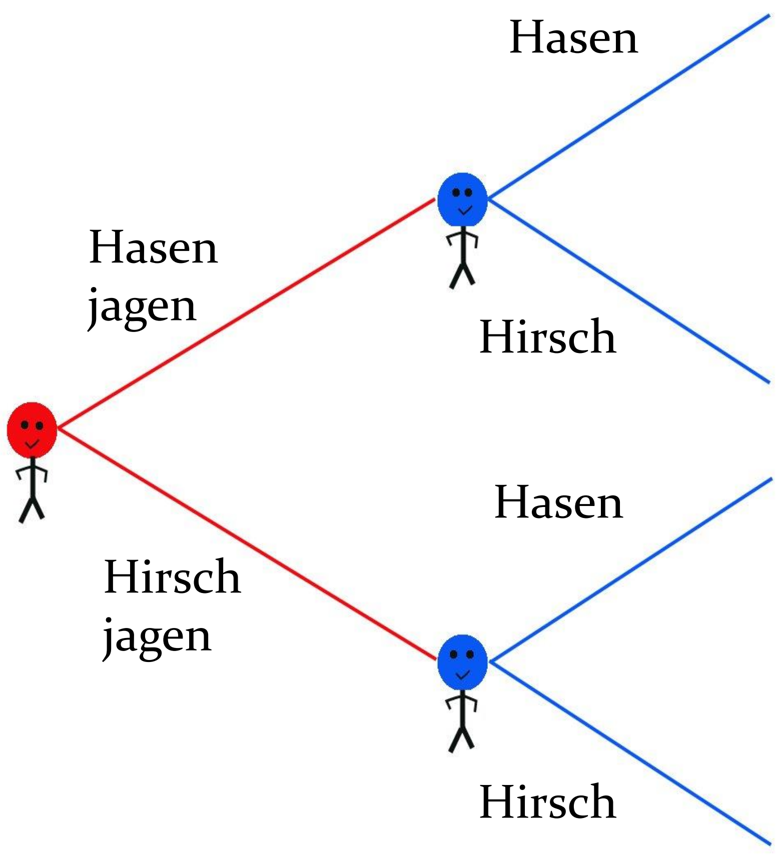


Beispiel: Gefangenendilemma
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Rousseaus Hirschjagt - Spiel

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)



Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagt gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagt, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagt, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagt entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

Replikatordynamik

(für das Hirschjagt-Spiel)

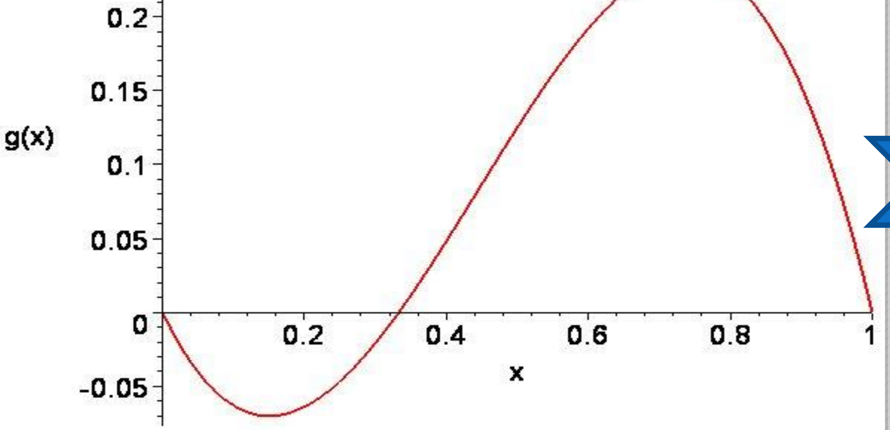
	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

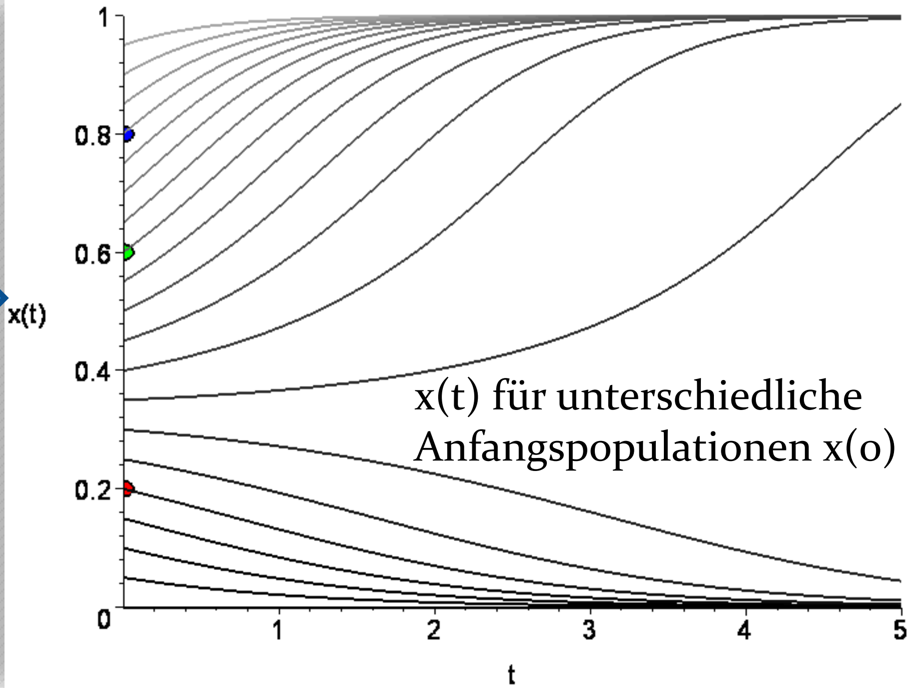
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4\cdot(x(t))^2 - 3\cdot(x(t))^3 - x(t) - = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t)\cdot\left((2-0)\cdot(x(t)-x(t)^2)+(5-4)\cdot(2\cdot x(t)-1-x(t)^2)\right)$$

$$g(x) = 4\cdot x^2 - 3\cdot x^3 - x$$

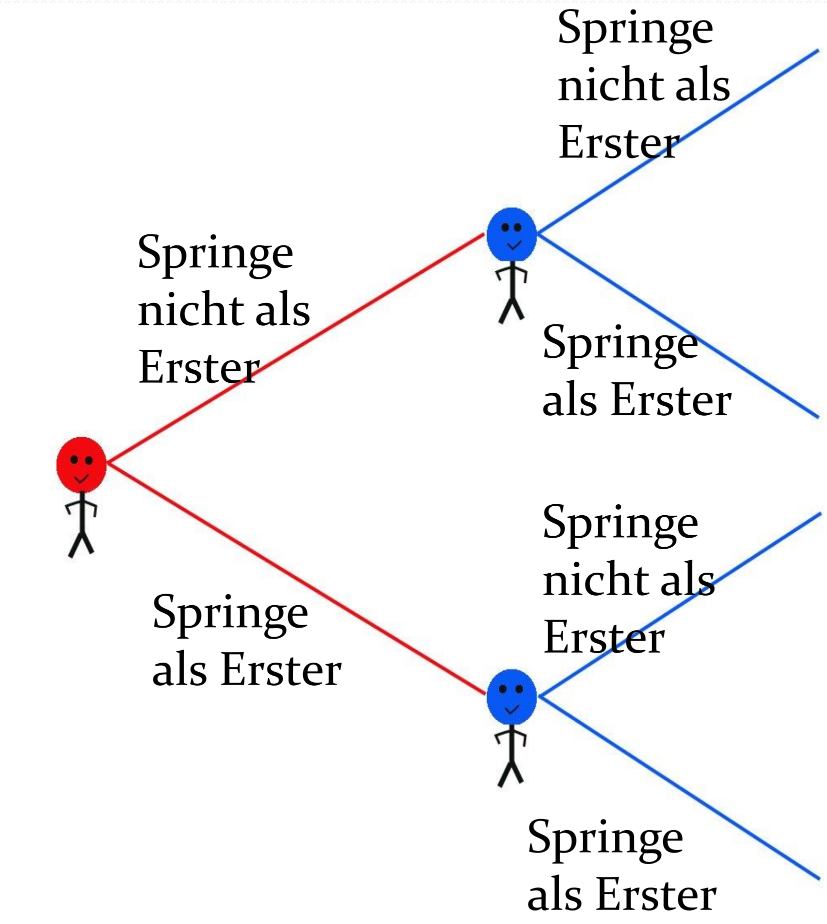


Beispiel: Hirschjagt-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Das Angsthasen-Spiel

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1 , -1)	(2 , 0)
Springe	(0 , 2)	(1 , 1)



Basierend auf dem Film von Nicholas Ray „Denn sie wissen nicht was sie tun“ aus dem Jahre 1955 (Hauptdarsteller „James Dean“): Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto rausspringt. Der erzielte Nutzen kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

Replikatordynamik

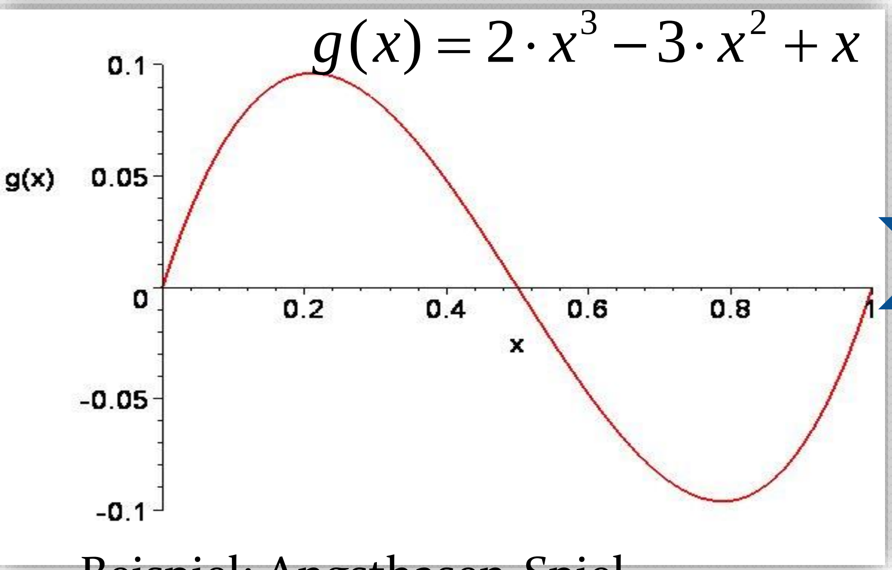
(für das Angsthasen-Spiel)

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1 , -1)	(2 , 0)
Springe	(0 , 2)	(1 , 1)

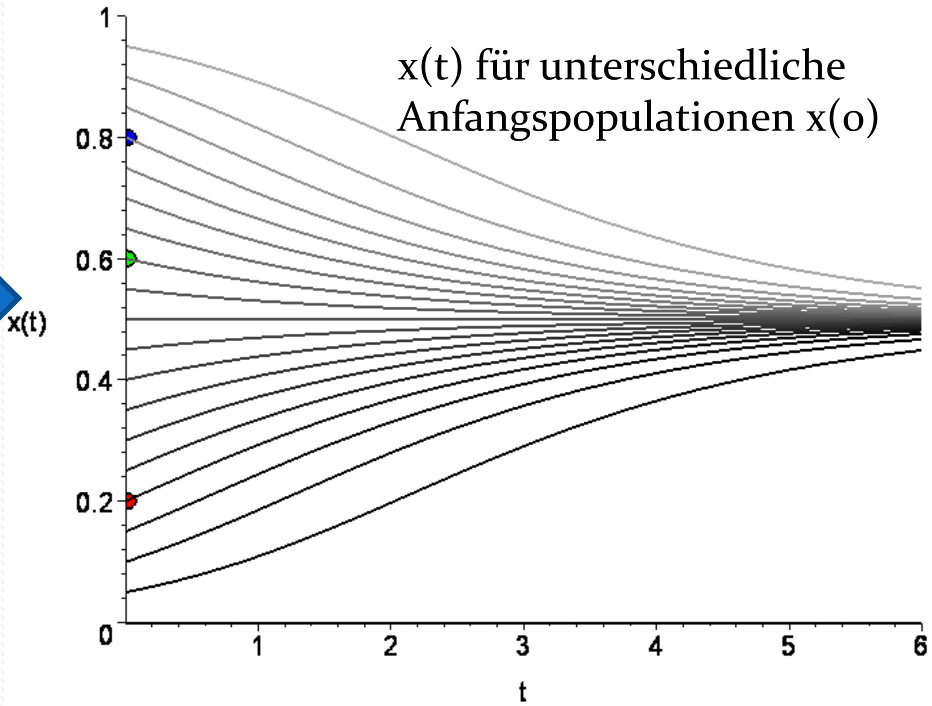
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2\cdot\left(x(t)\right)^3 - 3\cdot\left(x(t)\right)^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t)\cdot\Big((-1-0)\cdot(x(t)-x(t)^2) + (1-2)\cdot(2\cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\Big)$$

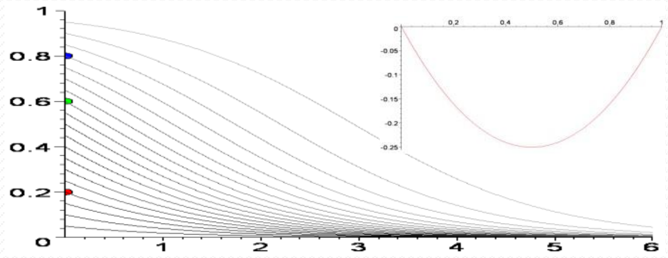


Beispiel: Angsthasen-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt

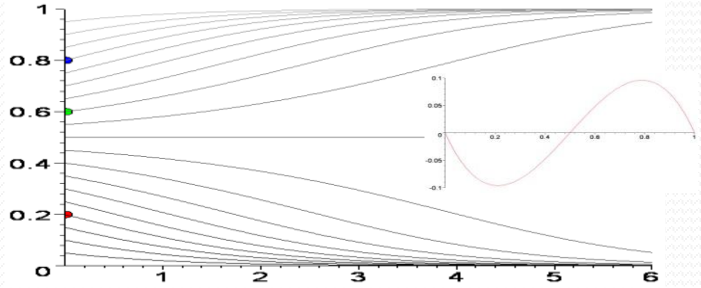


Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

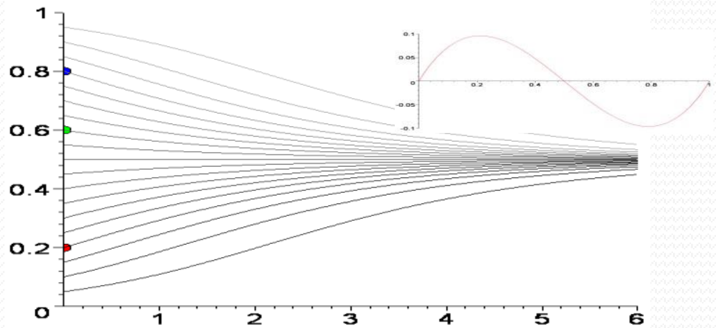
- **Dominante Spiele**
  (2. Strategie dominiert 1.Strategie)
  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=0.



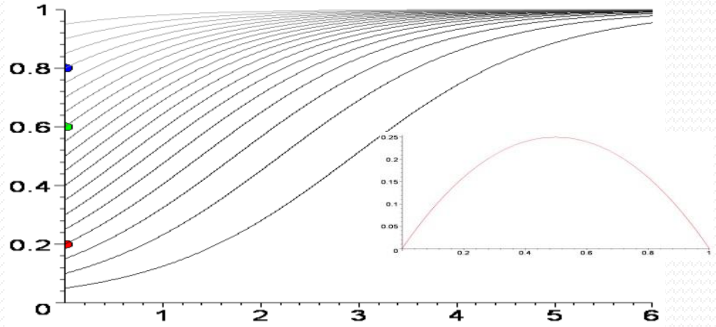
- **Koordinationsspiele**
  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti – Koordinationsspiele**
  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**
  (1. Strategie dominiert 2.Strategie)
  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=1.

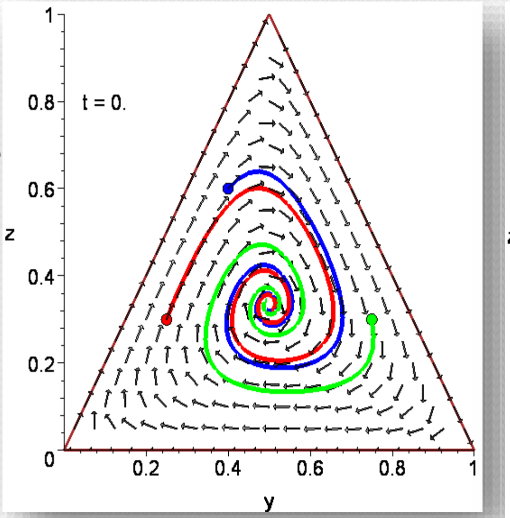


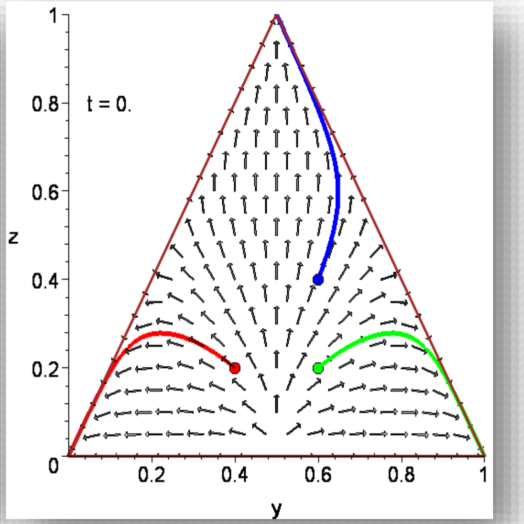
Weitere Arten von Spieltypen

(Ausblick: Vorlesungsteil 5)

- **Mehr als zwei Strategien:**

Schon bei drei Strategien können 19 unterschiedliche Spielklassen unterschieden werden.

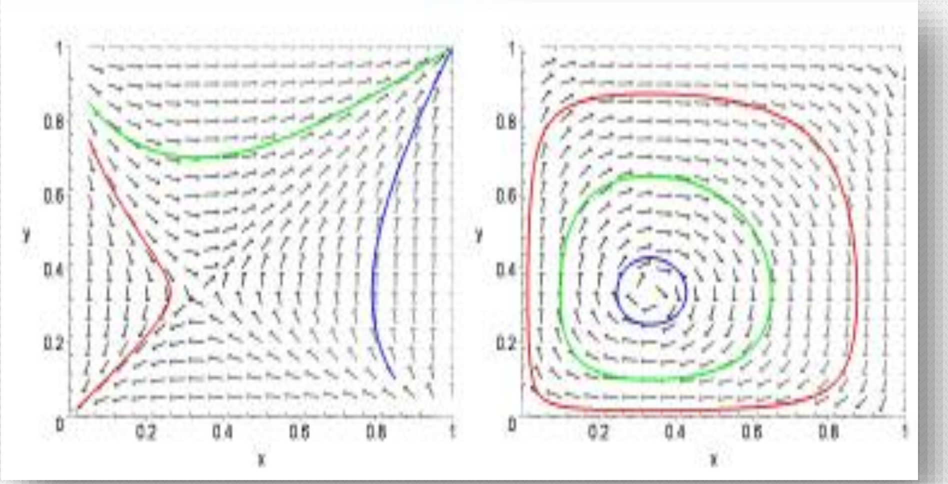




- **Bimatrix Spiele**

Unsymmetrische (2x2) Spiele:

Setzt sich die Population aus zwei unterschiedlichen Spielergruppen (x(t) und y(t)) zusammen, so spricht man von Bimatrix Spielen.



E-Learning

Zusatzmaterial auf der Online-Lernplatform Lon Capa

Zusäzlich zu den Informationen aus dieser Internetseite wurde ein separater Kurs auf der Online-Lernplatform Lon Capa eerstellt. Er beinhaltet neben den hier dargestellten Informationen zusäzliche Erläuterungen, diverse interaktive Übungsaufgaben, Feedbackmöglichkeiten und Probeklausuren. Falls Sie schon einen Lon Capa Account besitzen können Sie sich einfach mit diesem unter dem unten angegebenen Link einloggen. Falls Sie Student der Universiät Frankfurt sind, können Sie sich mit Ihrem HRZ-Account einloggen. Anderenfalls kontaktieren Sie bitte per E-Mail und ich werde für Sie einen Account für die Lernplatform erstellen.

Hier gehts zu Lon Capa