Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
09.11.2018

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

4. Vorlesung

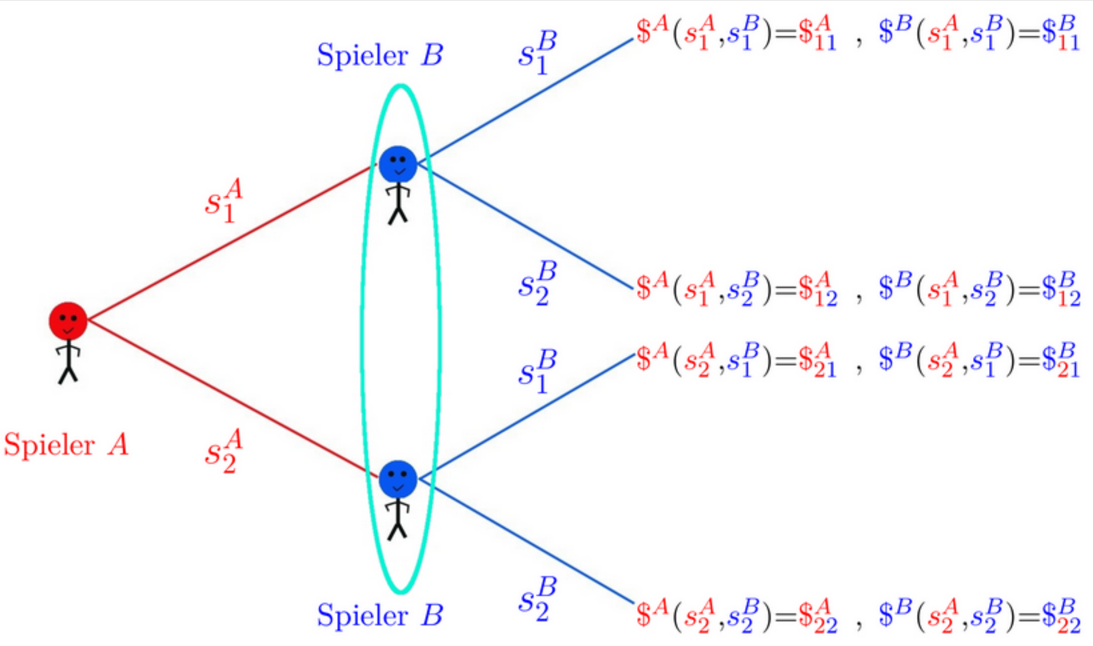
Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
  PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr

- Vorlesungs-Materialien:
  http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/VPSOC/

- Aufgaben auf der Online-Lernplatform Lon Capa:
  http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/

- Plan für die heutige Vorlesung:
  Klassifizierung von symmetrischen (2x2)-Spielen, Evolutionäre Spieltheorie , unsymmetrische Spiele, Übungsaufgabe auf der Lon Capa Lernplatform



Spielbaum eines (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels mit den Auszahlungsfunktionen für Spieler A ($\$^A$) und Spieler B ($\$^B$).

Die nebenstehende Abbildung stellt den Spielbaum eines simultanen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels dar. Beide Spieler (Spieler A und Spieler B) treffen die Entscheidung, welche der beiden reinen Strategien (s_1 und s_2) sie auszuwählen gedenken, zur gleichen Zeit, d.h. beim Zeitpunkt der Entscheidung wissen beide Spieler nicht, welche der Strategien der andere Spieler auswählt. $\$^\mu$ (mit $\mu = A,\ B$) bezeichnet die Auszahlung, welche den Spielern nach Bekanntgabe ihrer Entscheidung ausgezahlt wird. Die Auszahlungen der vier möglichen Strategienkombinationen werden im folgenden durch die Auszahlungsmatrizen $\hat{\$}^\mu$ angegeben. Die oben angegebene Definition vereinfacht sich in einem solchen (2×2) Spiel somit wie folgt:

(2×2) Spiel:

$$\Gamma := \left(\{A, B\}\, , \mathcal{S}^A \times \mathcal{S}^B, (\hat{\$}^A, \hat{\$}^B) \right)$$

Menge der reinen Strategien des Spielers A und B:

$$\mathcal{S}^A = \{s_1^A, s_2^A\} \ , \ \mathcal{S}^B = \{s_1^B, s_2^B\}$$

Auszahlungsmatrix der Spieler A und B:

$$\hat{\$}^A = \begin{pmatrix} \$^A_{11} & \$^A_{12} \\ \$^A_{21} & \$^A_{22} \end{pmatrix} , \ \hat{\$}^B = \begin{pmatrix} \$^B_{11} & \$^B_{12} \\ \$^B_{21} & \$^B_{22} \end{pmatrix}$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Spielbaum eines simultanen (2 Personen)-(2 Strategien) Spiels. Die ovale, türkisene Linie visualisiert den simultanen Charakter des Spiels; ohne diese, wäre der Spielablauf ein sequentieller und Spieler B wüste schon wie sich Spieler A entschieden hätte, bevor er seine Entscheidung trifft. Die vier möglichen Ausgänge des Spiels sind mit unterschiedlichen

Symmetriebedingung der Auszahlungsmatrizen

	Spieler 2 wählt Strategie 1	**Spieler 2 wählt Strategie 2**
Spieler 1 wählt Strategie 1	$(\$^1_{11}, \$^2_{11})$	$(\$^1_{12}, \$^2_{12})$
Spieler 1 wählt Strategie 2	$(\$^1_{21}, \$^2_{21})$	$(\$^1_{22}, \$^2_{22})$

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} \$^2_{11} & \$^2_{12} \\ \$^2_{21} & \$^2_{22} \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$^1_{11} & \$^1_{12} \\ \$^1_{21} & \$^1_{22} \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} \$^2_{11} & \$^2_{21} \\ \$^2_{12} & \$^2_{22} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \$^1_{11} & \$^1_{12} \\ \$^1_{21} & \$^1_{22} \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

Transponierte Matrix

Allgemeines (2x2)-Spiel

	Spieler B wählt Strategie 1	Spieler B wählt Strategie 2
Spieler A wählt Strategie 1	$(\$_{11}^{A}, \$_{11}^{B})$	$(\$_{12}^{A}, \$_{12}^{B})$
Spieler A wählt Strategie 2	$(\$_{21}^{A}, \$_{21}^{B})$	$(\$_{22}^{A}, \$_{22}^{B})$

Symmetrisches (2x2)-Spiel

	Spieler B Strategie 1 y=1	Spieler B Strategie 1 y=0
Spieler A Strategie 1 x=1	(a , a)	(b , c)
Spieler A Strategie 2 x=0	(c , b)	(d , d)

Die Klasse der dominanten Spiele (a > c und b > d bzw. a < c und b < d)

Bei dieser Spielklasse dominiert eine Strategie die andere. Es existiert nur ein reines Nash-Gleichgewicht welches die dominante Strategie des Spiels darstellt. Dieser Fall tritt ein, falls:
a > c und b > d : Strategie 1 dominiert Strategie 2; dominante Strategie bei (x,y)=(1,1).
a < c und b < d : Strategie 2 dominiert Strategie 1; dominante Strategie bei (x,y)=(0,0).

Koordinationsspiele (a > c und b < d)

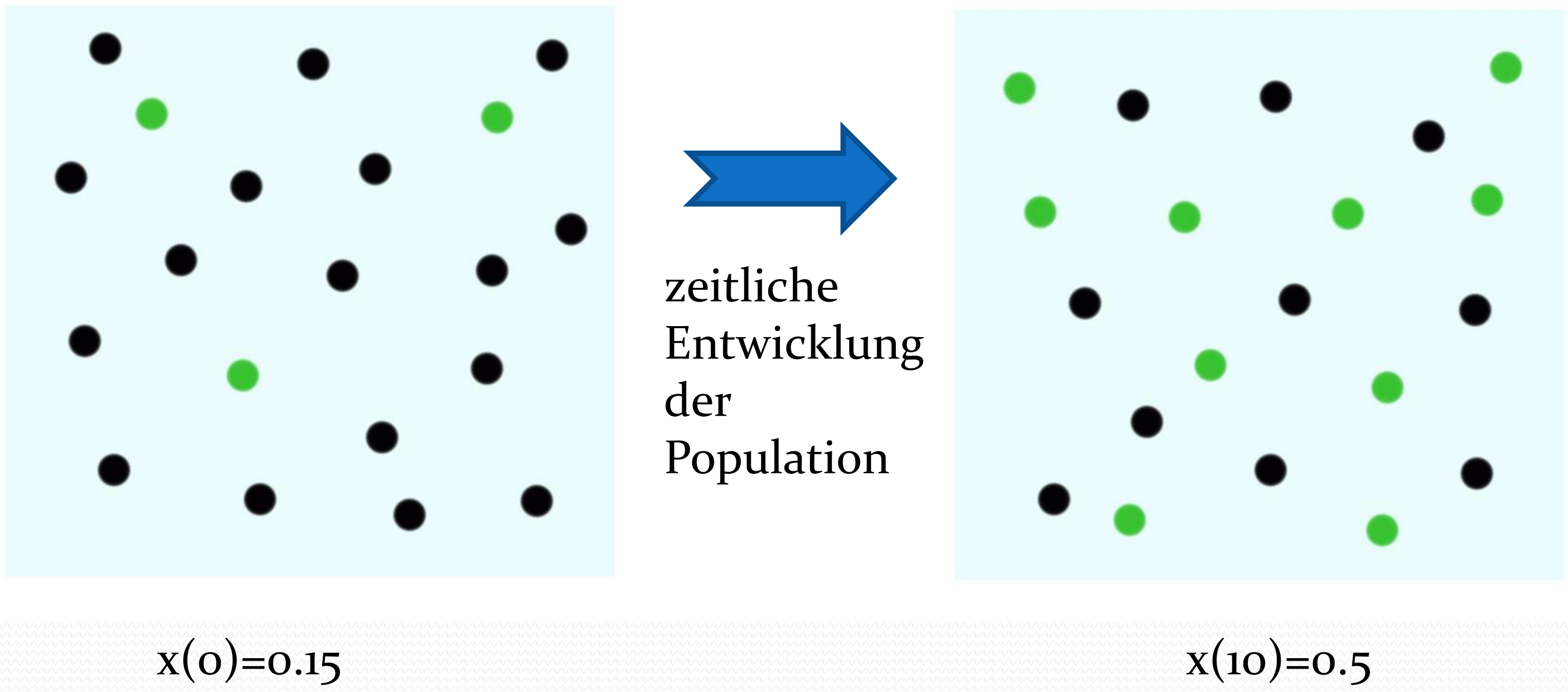
Ein Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: a > c und b < d . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, symmetrische Nash-Gleichgewicht bei (x,y)=(0,0) und (x,y)=(1,1).

Anti-Koordinationsspiele (a < c und b > d)

Ein Anti-Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: a < c und b > d . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, unsymmetrische Nash-Gleichgewicht bei (x,y)=(0,1) und (x,y)=(0,1).

Evolutionäre Spieltheorie (I)

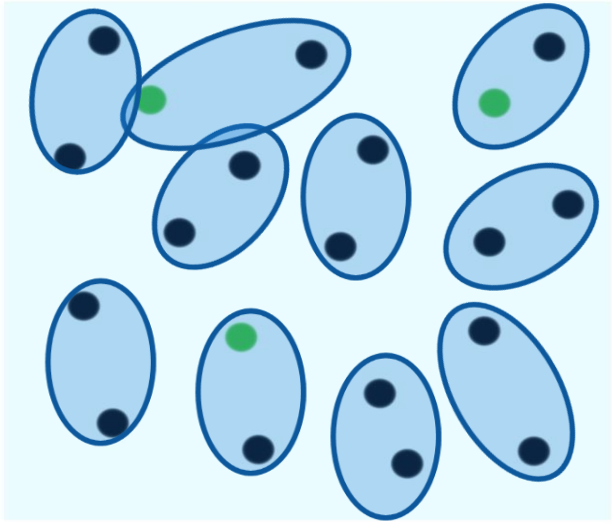
Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.



Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
$x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

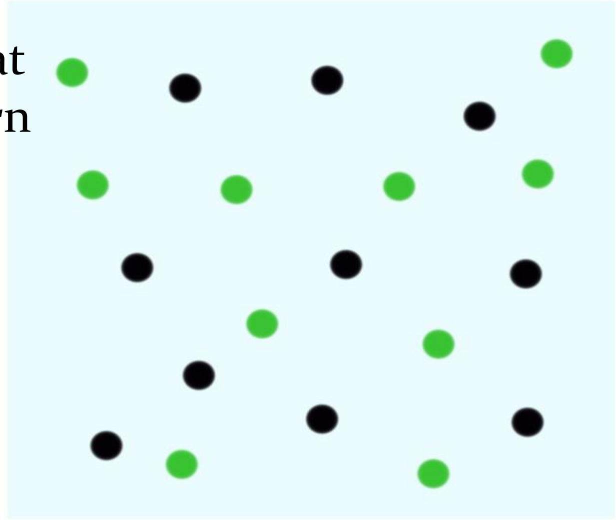
Evolutionäre Spieltheorie (II)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



x(0)=0.15

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt t=0 das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



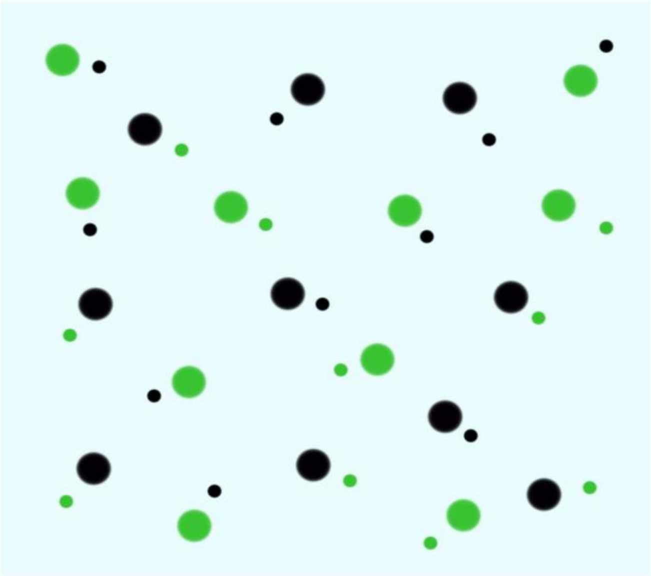
x(10)=0.5

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt t=10 spielen schon 50% grün.

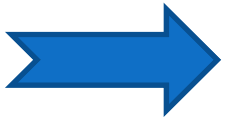
Evolutionäre Spieltheorie (I)

Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele)

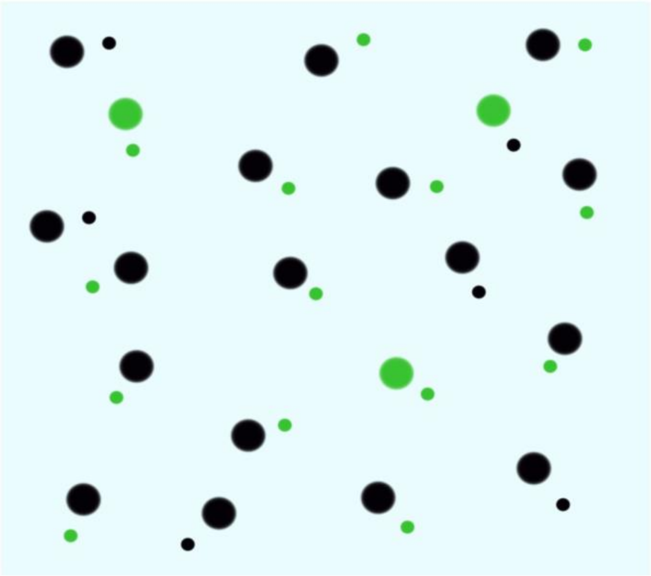
Bei unsymmetrischen (2x2)-Spielen besteht die zugrundeliegende Population aus zwei Gruppen (hier große und kleine Kreise). Aufgrund der unterschiedlichen Auszahlungsmatrizen können die Populationsgruppen sich in ihren Strategieentscheidungen (grün , schwarz) unterschiedlich entwickeln.



$x(0)=0.5$, $y(0)=0.5$



zeitliche Entwicklung der Population



$x(10)=0.15$, $y(10)=0.7$

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit" dar.

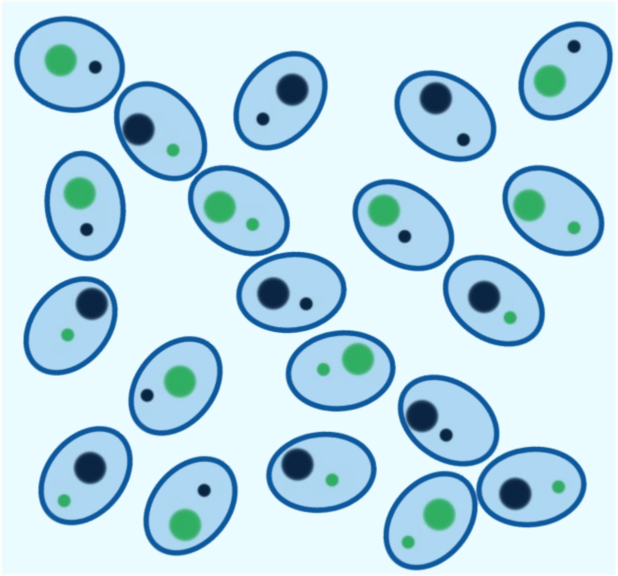
$x(t)$: Anteil der großen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün" spielen.

$y(t)$: Anteil der kleinen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün" spielen.

Evolutionäre Spieltheorie (II)

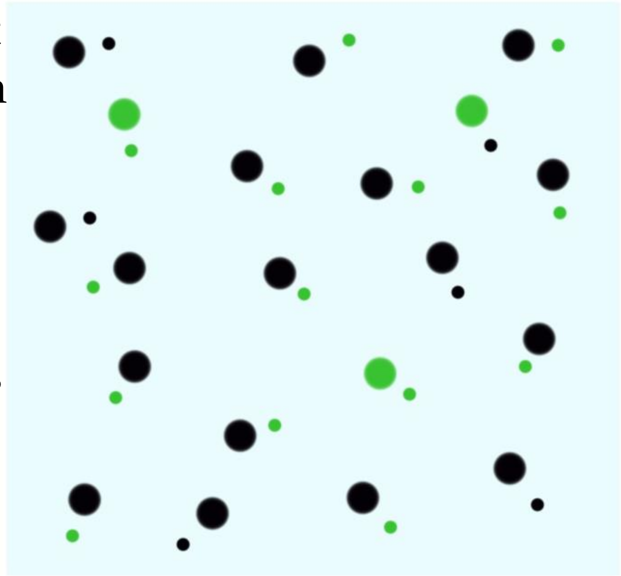
Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten gesamten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler mit unterschiedlichen Gruppenzugehörigkeiten zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner der anderen Gruppe wechseln .



x(10)=0.5 , y(10)=0.5

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt t=0 das erste Mal das Spiel. Es bilden sich stets Zweier-Gruppen aus großen und kleinen Kreisen.



x(10)=0.15 , y(10)=0.7

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die kleinen Spieler zunehmend attraktiver (y(10)=0.7), wohingegen sie für die großen Spieler zunehmend weniger attraktiv wird (x(10)=0.15).

I.2.1 Die Gleichungen der evolutionären Dynamik

Dieses Kapitel fasst die wesentlichen Konzepte der deterministischen evolutionäre Spieltheorie zusammen. Die evolutionäre Spieltheorie untersucht das zeitliche Verhalten einer großen Anzahl von individuellen Spielern, der sogenannten Population (siehe [1,2,3,4]). Wir nehmen im folgenden zunächst an, dass die Population aus einer unendlichen Anzahl von individuellen Spieler besteht, die sich aus zwei separaten, unterscheidbaren Gruppen (A und B) zusammensetzt. Gegeben sei die strategische Form eines, zunächst noch unsymmetrischen (2 Personen)-(m Strategien) Spiels Γ. $x_i^\mu(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, m_\mu$ und $\mu = A, B$) seien die zeitabhängigen, gemittelten Anteile der Spieler innerhalb der Spielergruppe $\mu = A, B$, die die Strategie i wählen. Diese gruppenspezifischen Populationsvektoren ($\vec{x}^A(t) = (x_1^A(t), x_2^A(t), \ldots, x_{m_A}^A(t))$ und $\vec{x}^B(t) = (x_1^B(t), x_2^B(t), \ldots, x_{m_B}^B(t))$) unterliegen folgenden Normalisierungsbedingungen:

$$x_i^\mu(t) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m_\mu} x_i^\mu(t) = 1 \quad \forall\; i = 1, 2, \ldots, m_\mu\;,\; t \in \mathbb{R},\; \mu = A, B$$

Die gesamte Population spielt zu jedem Zeitpunkt das gleiche Spiel, wobei sich die einzelnen Spieler der Gruppe A mit Spielern der Gruppe B zufällig paaren, das simultane Spiel spielen, ihre erzielten Auzahlungen erhalten und dann erneut zufällig paaren. Eine Miteinbeziehung von zugrundeliegenden komplexen Netzwerkstrukturen, die eine nicht-zufällige Paarung in die Beschreibung mitaufnehmen, bzw. die Betrachtung einer endlichen Spielerpopulation erfordert meisst eine nicht analytische, nummerisch simulative Beschreibung; dies wird Gegenstand der Untersuchungen im Teil II und Teil III dieser Vorlesung sein.

Die zeitliche Veränderung der Populationsvektoren $\vec{x}^A(t)$ und $\vec{x}^B(t)$ spiegelt die in der Gruppe vorherschende Strategienwahl zum Zeitpunkt t wider und beschreibt demnach die evolutionäre Dynamik der interagierenden Menschengruppen. Die maßgeblichen Faktoren, die die evolutionäre Entwicklung bestimmen sind der Soziobiologie entnommen und basieren auf Reproduktion, Mutation und Selektion der Strategienentscheidungen. Die zugrundeliegende mathematische Beschreibung lehnt sich an die, in der theoretischen Biologie verwendete, sogenannte *Quasispezies-Gleichung* (siehe [1], S: 33) an und ist ein System nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Für das zuvor definierte evolutionäre Spiel besitzt die Differentialgleichung das folgende Aussehen:

$$\frac{d\vec{x}^A}{dt} = \left(\hat{\$}^A \, \vec{x}^B - \vec{x}^B \left(\hat{\$}^A \, \vec{x}^A\right)\right) \vec{x}^A$$

$$\frac{d\vec{x}^B}{dt} = \left(\hat{\$}^B \, \vec{x}^A - \vec{x}^A \left(\hat{\$}^B \, \vec{x}^B\right)\right) \vec{x}^B$$

$$\frac{dx_i^A(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A \, x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A \, x_k^A(t) \, x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \Bigg] \, x_i^A(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dx_j^B(t)}{dt} = \Bigg[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B \, x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B \, x_l^A(t) \, x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \Bigg] \, x_j^B(t) \quad ,$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Replikatordynamik

Wir beschränken uns zunächst auf symmetrische (2xM)-Spiele , d.h. zwei Personen - M Strategien Spiele. Da es sich um symmetrische Spiele handelt, sind alle Spieler gleichberechtigt und man kann von einer homogenen Population ausgehen.
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik beschreibt wie sich die einzelnen Populationsanteil der zur Zeit t gewählten Strategien $x_j(t)$, j=1,2,…M im Laufe der Zeit entwickeln.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{M} \$_{jk} \cdot x_k(t)} - \underbrace{\sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t)} \right]$$

Wobei die Parameter $\$_{kl}$ die einzelnen Einträge in der Auszahlungsmatrix des 1.Spielers darstellen

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

Fitness der Strategie j

Durchschnitt-licher Erfolg der j-ten Strategie

Durschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population

Replikatordynamik

(für symmetrische (2x2)-Spiele)

Wir beschränken uns nun auf symmetrische (2x2)-Spiele , d.h. zwei Personen - 2 Strategien Spiele (M=2). Die Differentialgleichung der Replikatordynamik vereinfacht sich unter dieser Annahme wie folgt:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^{2} \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j \cdot \left[\$_{j1} \cdot x_1 + \$_{j2} \cdot x_2 - \left(\$_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \$_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 \right) \right]$$

Da es lediglich zwei Strategien und somit zwei Populationsanteile (x_1, x_2) gibt, können wir den zweiten Populationsanteil durch den ersten ausdrücken: $x_2 = 1 - x_1$
Wir setzen im Folgenden der Einfachheit halber $x = x_1$ und $1 - x = x_2$
und betrachten nur j=1.

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \left[\$_{11} \cdot x + \$_{12} \cdot (1-x) - \left(\$_{11} \cdot x \cdot x + \$_{12} \cdot x \cdot (1-x) + \$_{21} \cdot (1-x) \cdot x + \$_{22} \cdot (1-x) \cdot (1-x) \right) \right]$$

Wir beschränken uns im folgenden auf den 2-Strategien Fall ($m_A = m_B = 2$), lassen jedoch weiter eine Unsymmetrie der Auszahlungsmatrix zu. Die beiden Komponenten der zweidimensionalen gruppenspezifischen Populationsvektoren lassen sich dann, aufgrund ihrer Normalisierungsbedingung, auf eine Komponente reduzieren ($x_2^A = 1 - x_1^A$ und $x_2^B = 1 - x_1^B$). Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben (siehe z.B. [4], S:116 oder [3], S:69):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\left(\$^A_{11} + \$^A_{22} - \$^A_{12} - \$^A_{21}\right)\, y(t) + \left(\$^A_{12} - \$^A_{22}\right)\right] \left(x(t) - (x(t))^2\right) =: \; g_A(x,y) \qquad (2)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\left(\$^B_{11} + \$^B_{22} - \$^B_{12} - \$^B_{21}\right)\, x(t) + \left(\$^B_{12} - \$^B_{22}\right)\right] \left(y(t) - (y(t))^2\right) =: \; g_B(x,y)$$

Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ($\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$), in welchem die Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren $x(t) = y(t)$ annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)\right]\, x(t) \;=:\; g(x) \qquad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\hat{\$}\,\vec{x} - \vec{x}\left(\hat{\$}\,\vec{x}\right)\right)\vec{x}$$

Evolutionär stabile Strategien (ESS)

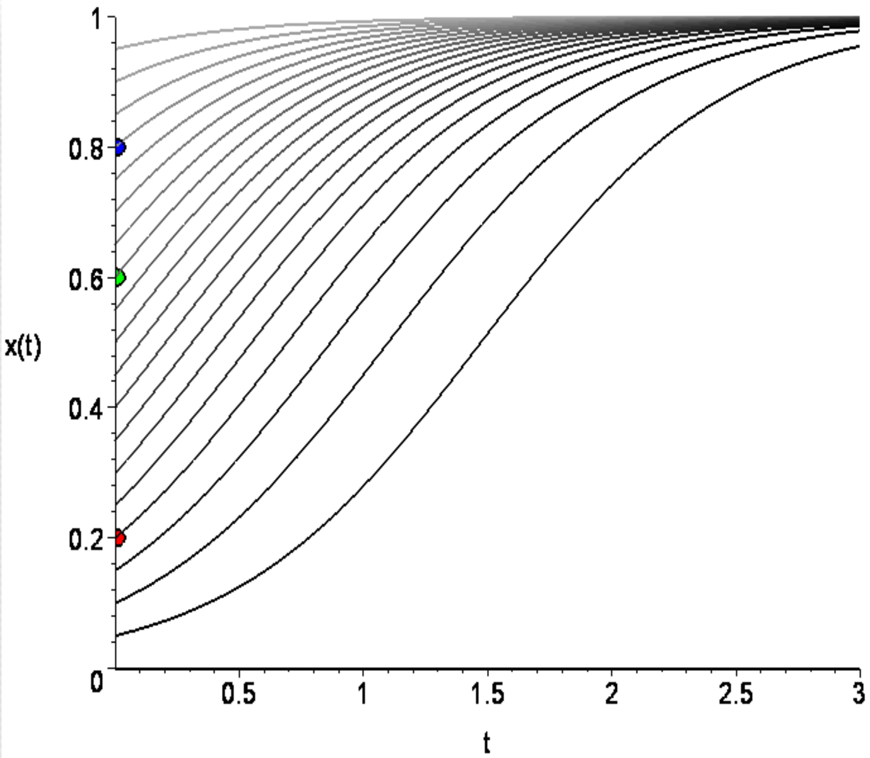
- Evolutionär stabile Strategien sind die stabilen Endzustände der Häufigkeitsverteilung x(t):

$$\lim_{t \to \infty} \left(x(t) \right)$$

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz einer ESS ist, dass diese ein Nash – Gleichgewicht des zugrundeliegenden Spiels ist.

Beispiel:
Gefangenendilemma ähnliche Spiele
Für die ESS des evolutionären Gefangenendilemma – Spiels ergibt sich:

$$\lim_{t \to \infty} \left(x(t) \right) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \text{alle "gestehen"}$$



Def.: Evolutionär stabile Strategie

(Für symmetrisches Zweipersonen-Spiel)

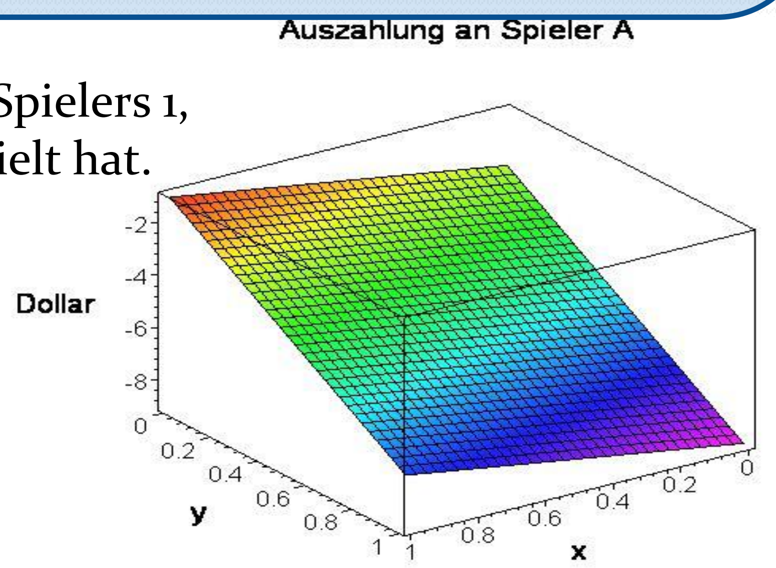
Mathematische Definition (W.Schlee):
Gegeben sei ein symmetrisches Zweipersonen-Spiel Γ mit der Auszahlungsmatrix $\hat{\$} := \hat{\$}^1 = \left(\hat{\$}^2\right)^T$. Eine Strategie $s^* := s^{1*} = s^{2*}$ heißt evolutionär stabile Strategie (ESS), wenn

1. (s^*, s^*) ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht des Spiels ist, und
2. $\forall s$ mit der Eigenschaft $s \neq s^*$ und $s \in r(s^*)$

   gilt $\$(s\ ,s\ ) < \$(s^*, s\ )$

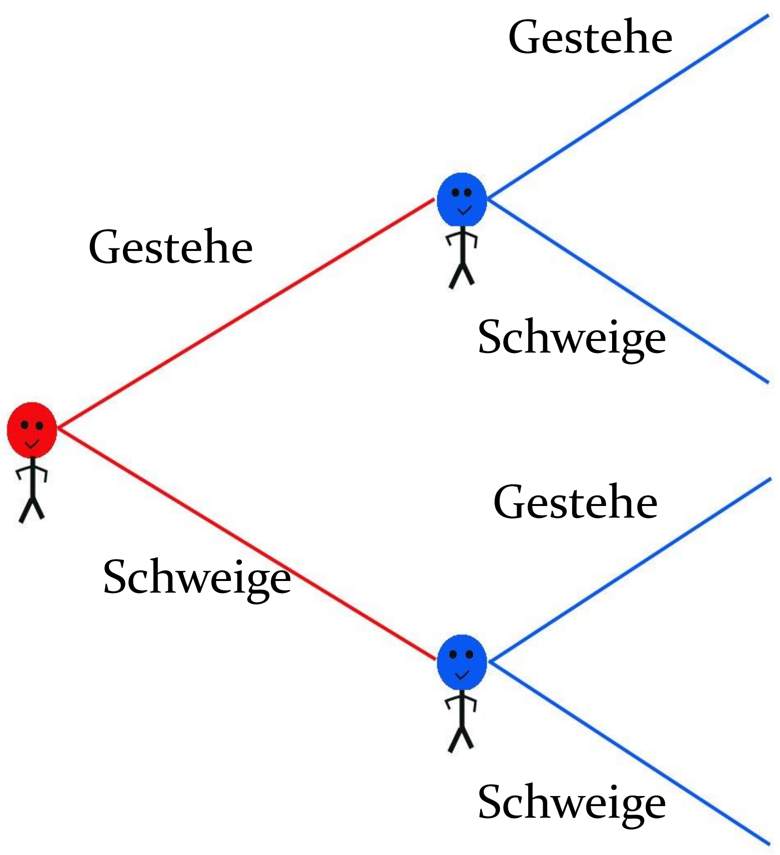
$r(s^*)$ ist die Menge der besten Antworten des Spielers 1, wenn der andere Spieler die Strategie s^* gespielt hat.

Beispiel:	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Ge$	$s_1^2 \mathrel{\hat{=}} Sc$
$s_1^1 \mathrel{\hat{=}} Ge$	(-7 , -7)	(-1 , -9)
$s_2^1 \mathrel{\hat{=}} Sc$	(-9 , -1)	(-3 , -3)



Das Gefangenendilemma

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)



Bonnie und Clyde werden nach einem missglückten Banküberfall geschnappt und in verschiedenen Zellen untergebracht. Wenn beide schweigen kann der Staatsanwalt sie nur wegen verbotenen Waffenbesitzes für drei Jahre hinter Gitter bringen. Verrät jedoch einer den anderen, dann bekommt der Geständige als Zeuge der Anklage nur für ein Jahr hinter Gitter – der Nichtgeständige muss dann aber für neun Jahre ins Gefängnis. Gestehen beide, so müssen sie sieben Jahre absitzen.

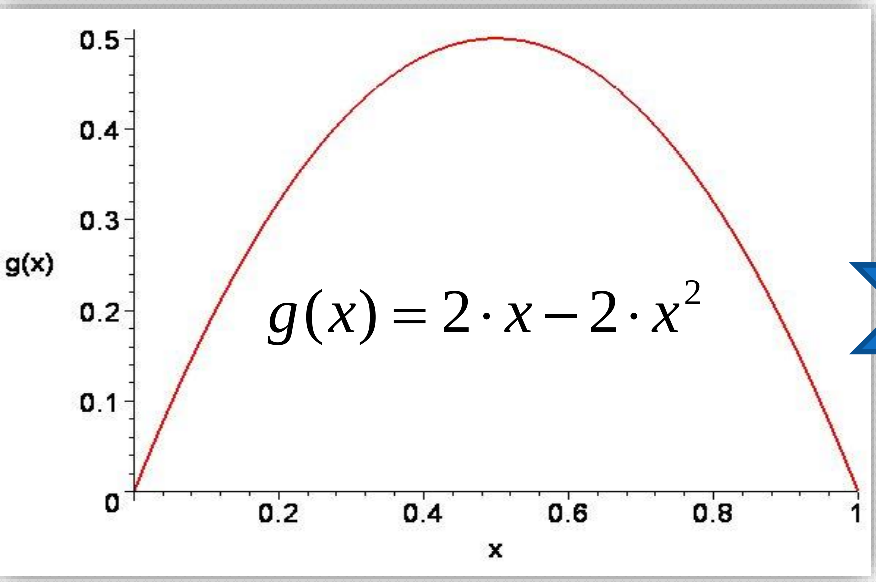
Replikatordynamik
(für das Gefangenendilemma)

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

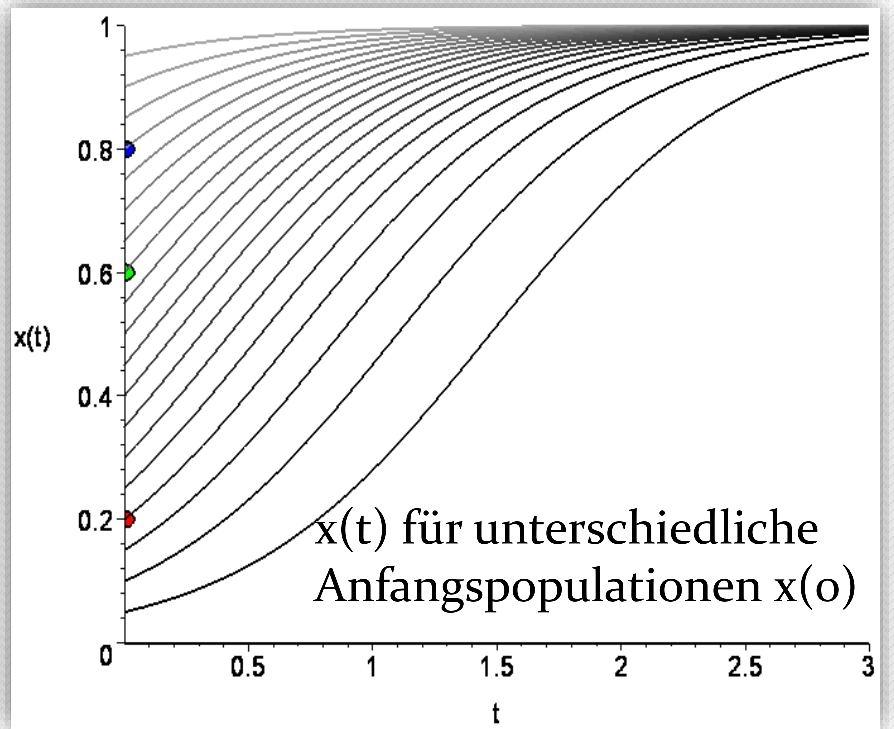
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Gefangenendilemma lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot \left(x(t)\right)^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-7 - (-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3 - (-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

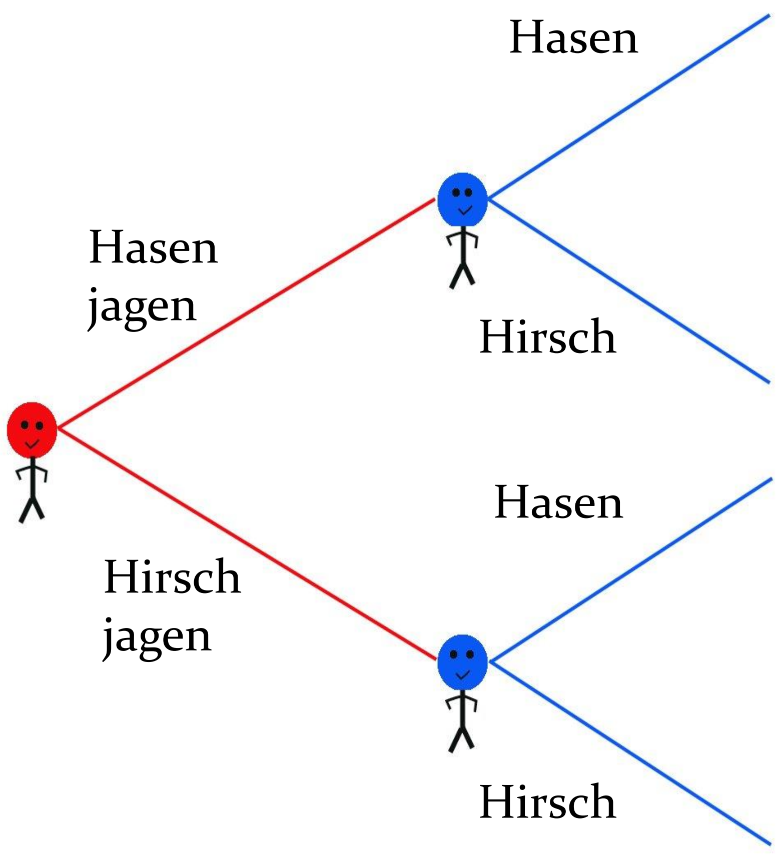


Beispiel: Gefangenendilemma
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Rousseaus Hirschjagt - Spiel

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)



Zwei Jägern ist es im Laufe der Jagt gelungen einen Hirsch und vier Hasen einzukreisen. Die Jäger stehen nun vor der Entscheidung die Hasen entkommen zu lassen und gemeinsam den Hirsch zu erlegen oder sofort das Feuer auf die Hasen zu eröffnen. Entscheiden sich beide dafür den Hirsch zu erlegen, dann hat der Hirsch keine Chance. Einen Hirsch kann man für 10 Goldmünzen verkaufen. Entscheiden sich beide für die Hasenjagt, dann erschießt jeder Jäger zwei Hasen, für die man jeweils eine Goldmünze bekommt. Entscheidet sich jedoch nur einer für die Hirschjagt, so kann der Hirsch entkommen und derjenige der sich für die Hasenjagt entschieden hat kann alle vier Hasen erlegen.

Replikatordynamik

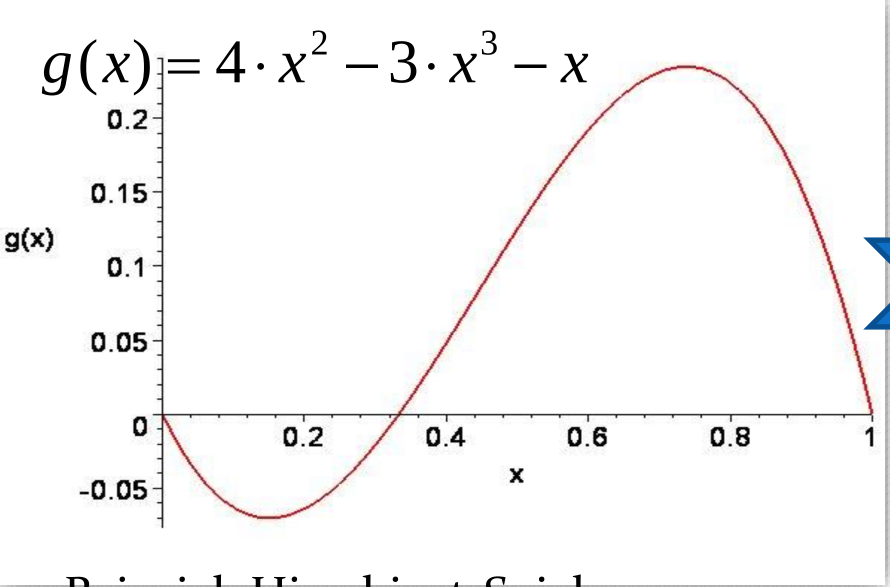
(für das Hirschjagt-Spiel)

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)

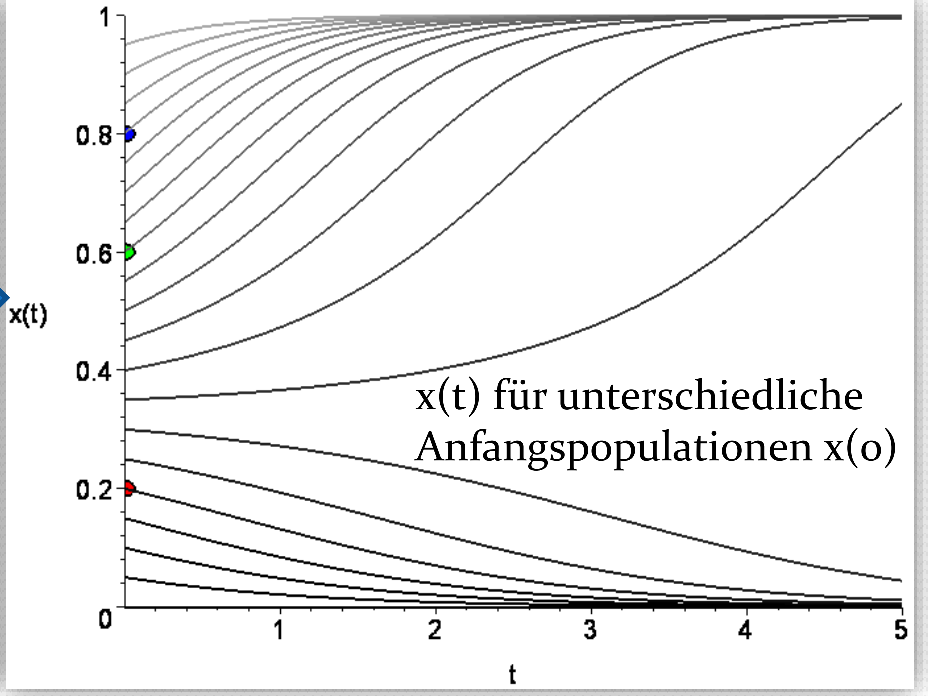
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4\cdot\left(x(t)\right)^2 - 3\cdot\left(x(t)\right)^3 - x(t) - = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t)\cdot\left((2-0)\cdot(x(t)-x(t)^2) + (5-4)\cdot(2\cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\right)$$

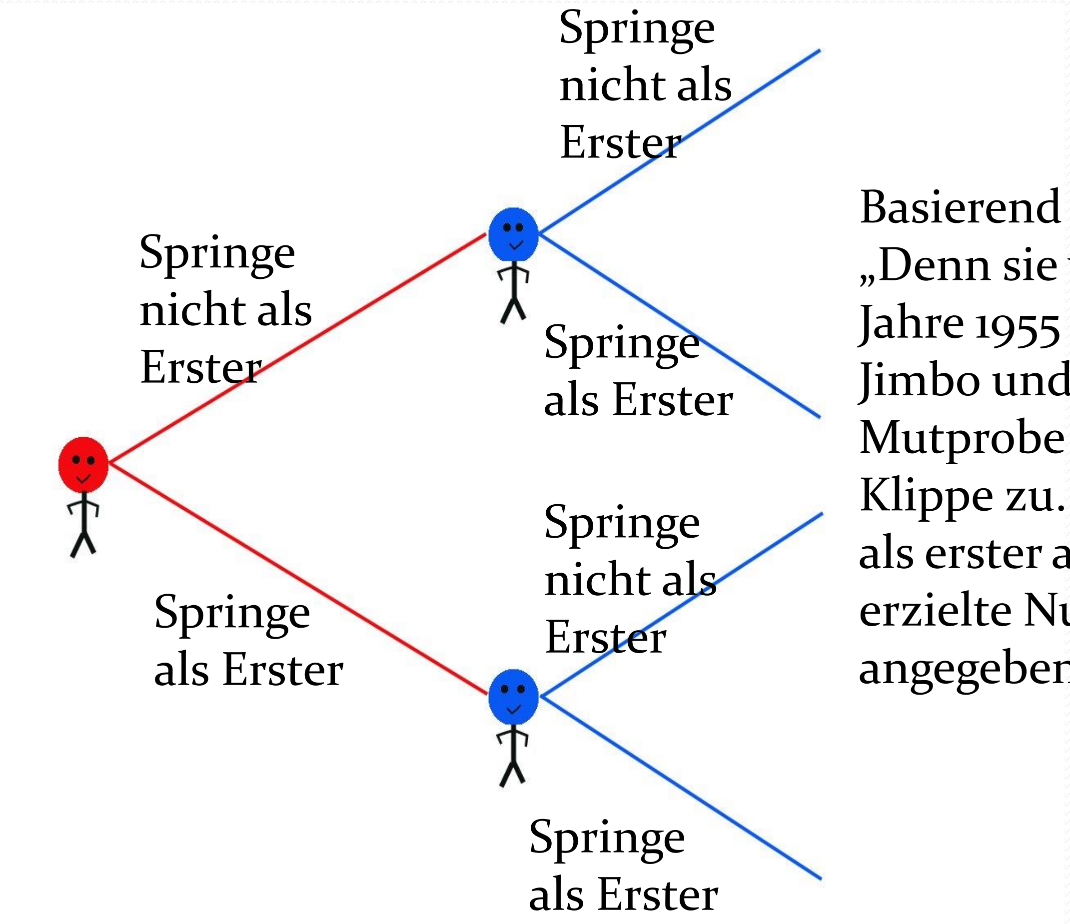


Beispiel: Hirschjagt-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Das Angsthasen-Spiel

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1 , -1)	(2 , 0)
Springe	(0 , 2)	(1 , 1)



Basierend auf dem Film von Nicholas Ray „Denn sie wissen nicht was sie tun“ aus dem Jahre 1955 (Hauptdarsteller „James Dean“): Jimbo und sein Erzfeind Buzz machen eine Mutprobe und rasen in ihren Autos auf eine Klippe zu. Derjenige ist der Angsthase, der als erster aus seinem Auto rausspringt. Der erzielte Nutzen kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

Replikatordynamik

(für das Angsthasen-Spiel)

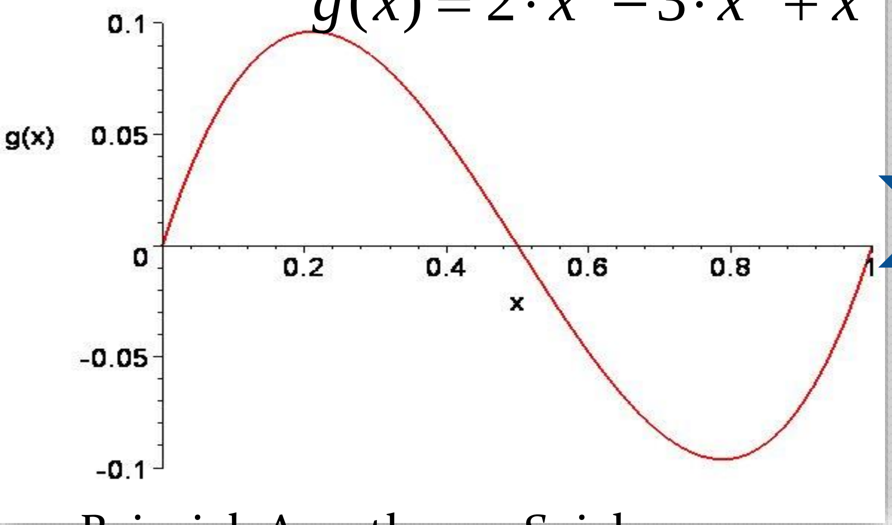
	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1 , -1)	(2 , 0)
Springe	(0 , 2)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

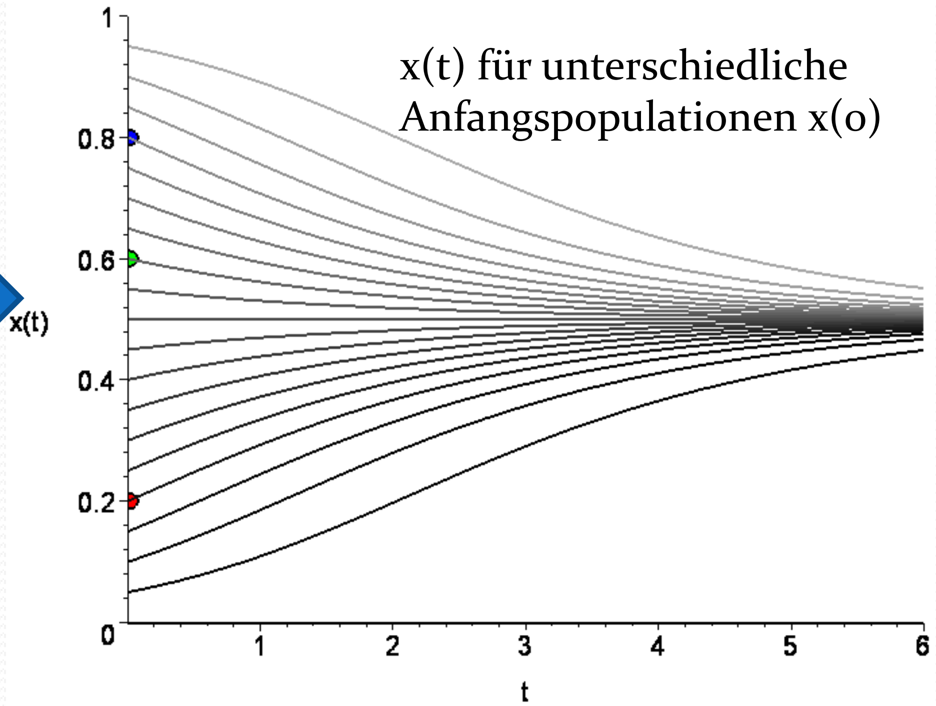
$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2\cdot(x(t))^3 - 3\cdot(x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t)\cdot\left((-1-0)\cdot(x(t)-x(t)^2) + (1-2)\cdot(2\cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\right)$$

$$g(x) = 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + x$$



Beispiel: Angsthasen-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

Evolutionär Stabile Strategien

- Betrachten Sie die folgenden Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

Beispiel 1	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Das Spiel gehört zur Klasse der dominanten Spiele.

Beispiel 2	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,KK) und (KK,K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Anti-Koordinationsspiele.

Beispiel 3	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Koordinationsspiele.

Nullstellen der Funktion g(x)

Beispiel 1:

$$g(x) = x - x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

Die Funktion hat zwei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 1$$

Beispiel 3:
Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{1}{3}$$

Beispiel 2:

$$g(x) = 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

$$x \cdot (3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2 = 0 \;\Big|\; /3$$

$$x^2 - \frac{5}{3} \cdot x + \frac{2}{3} = 0 \;\Big|\; \text{p-q Formel}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{36}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1,\; x_3 = \frac{2}{3}$$

Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{2}{3}$$

Evolutionäre Strategien (Beispiel 1)

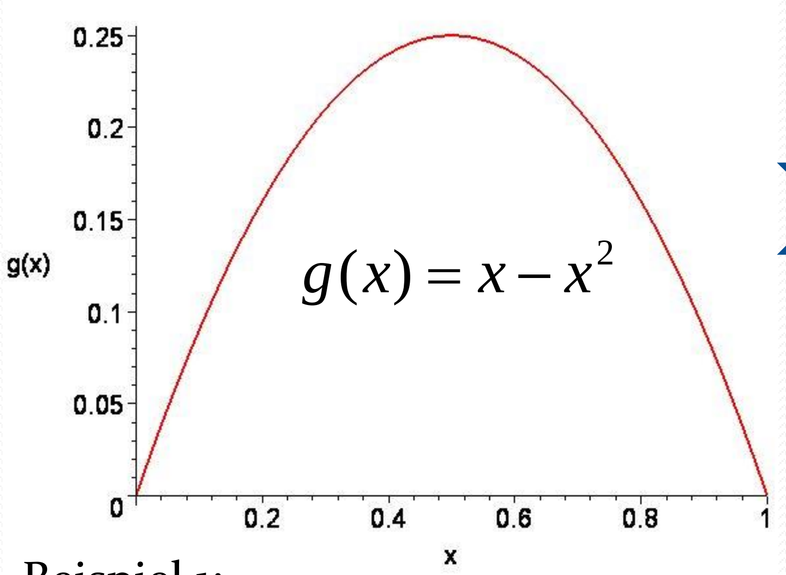
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = x(t) - (x(t))^2$$

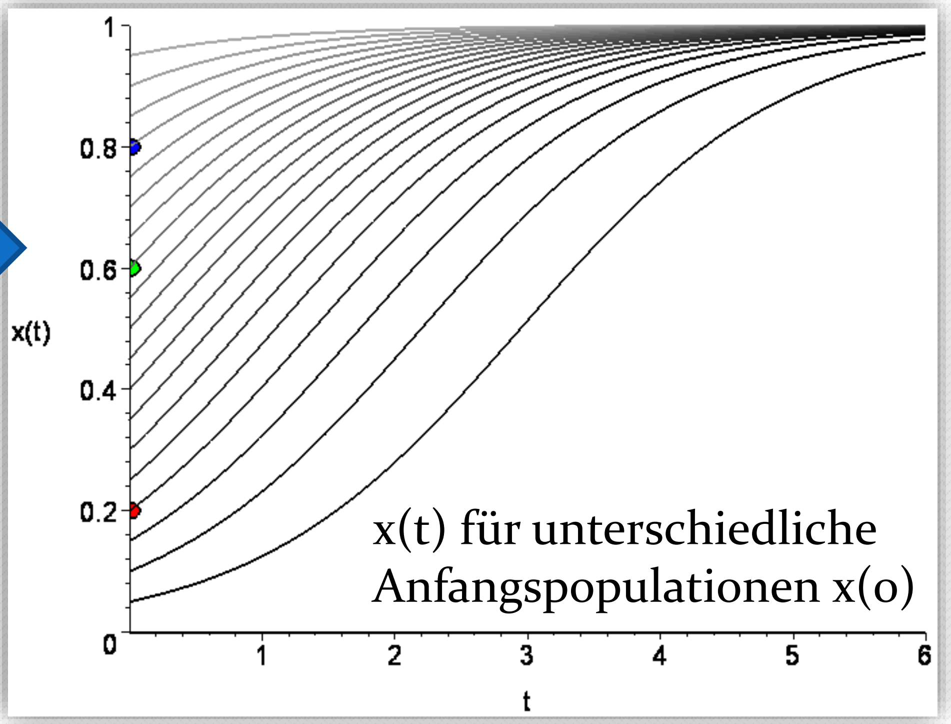
Da es sich bei diesem Beispiel um ein dominantes, symmetrisches (2x2)-Spiel handelt und die Funktion g(x) im relevanten Bereich (x=[0,1]) immer größer-gleich Null ist, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer gegen 1.

Eine ESS bei x=1



$$g(x) = x - x^2$$

Beispiel 1:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

Evolutionäre Strategien (Beispiel 2)

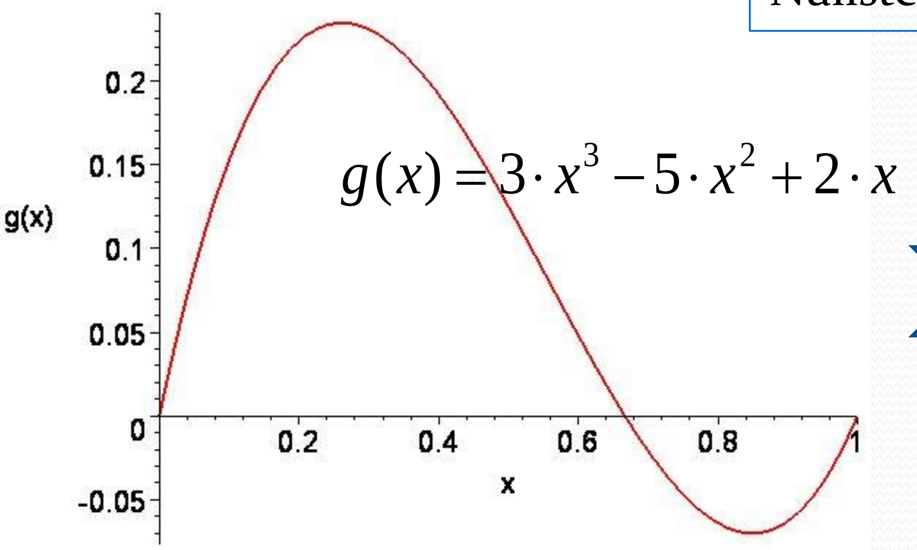
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0, 3)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das zweite Beispiel lautet:

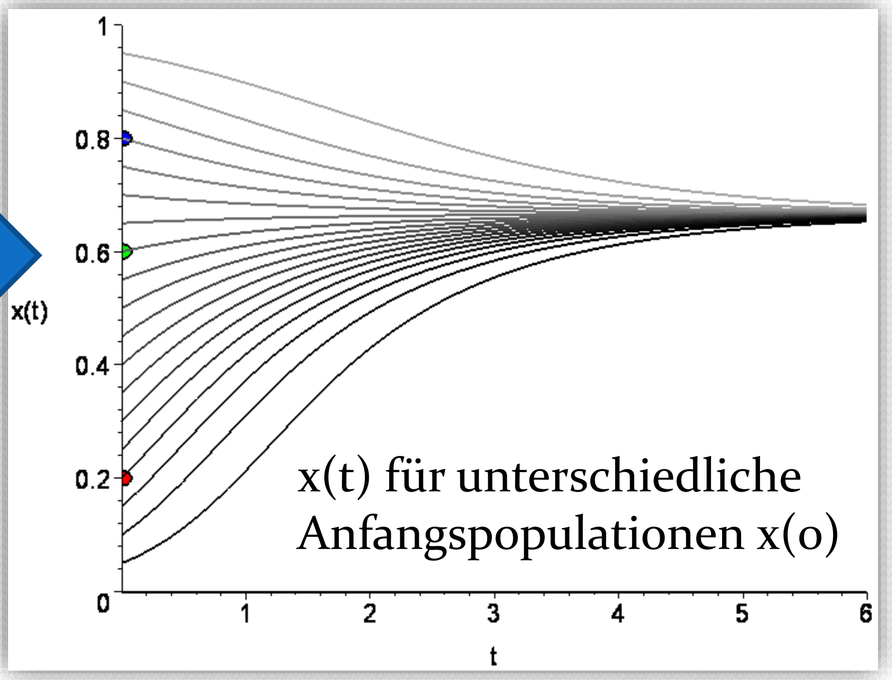
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = 3\cdot\left(x(t)\right)^3 - 5\cdot\left(x(t)\right)^2 + 2\cdot x(t)$$

Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht, was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion g(x) ist (x=0.67).

$\boxed{\text{Eine ESS bei x=0.67}}$



Beispiel 2:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

Evolutionäre Strategien (Beispiel 3)

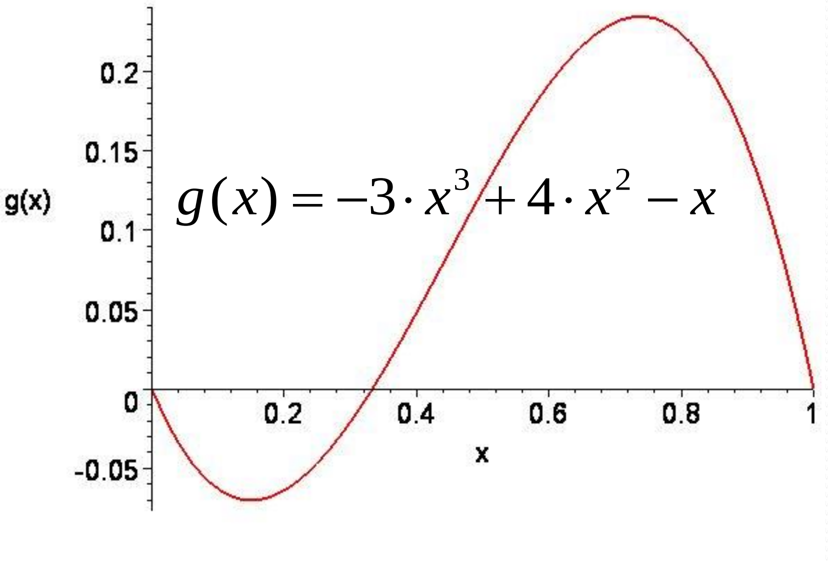
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2, 2)	(3 , 3)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das zweite Beispiel lautet:

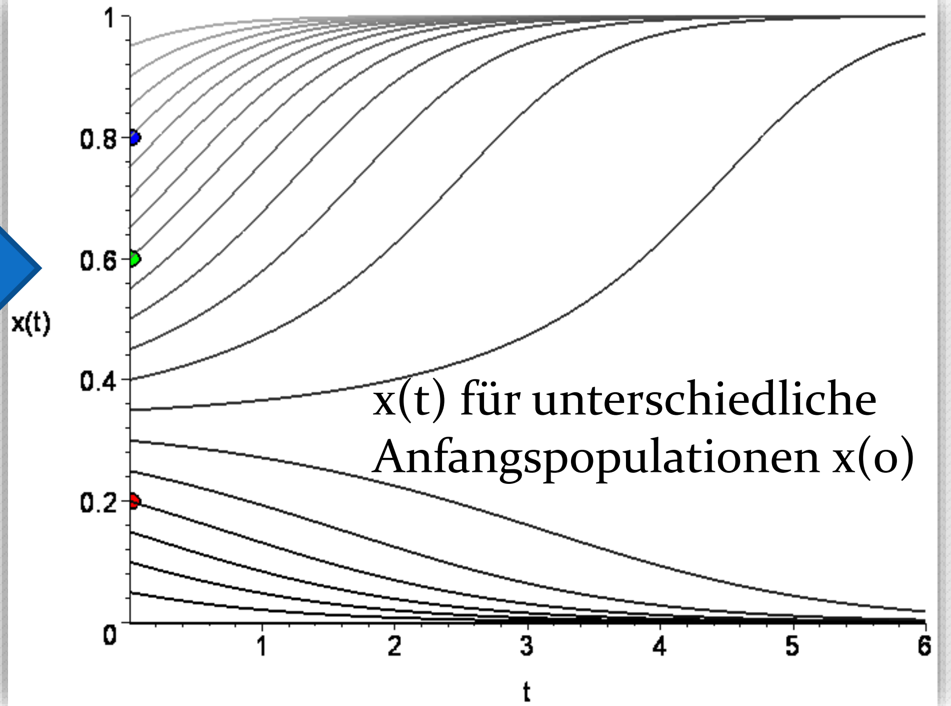
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = -3\cdot(x(t))^3 + 4\cdot(x(t))^2 - x(t)$$

Zwei ESSs : (x=1 und x=0)

Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler abhängig vom Anfangswert zu einem der beiden reinen Nash-Gleichgewichte (x=1 oder x=0).



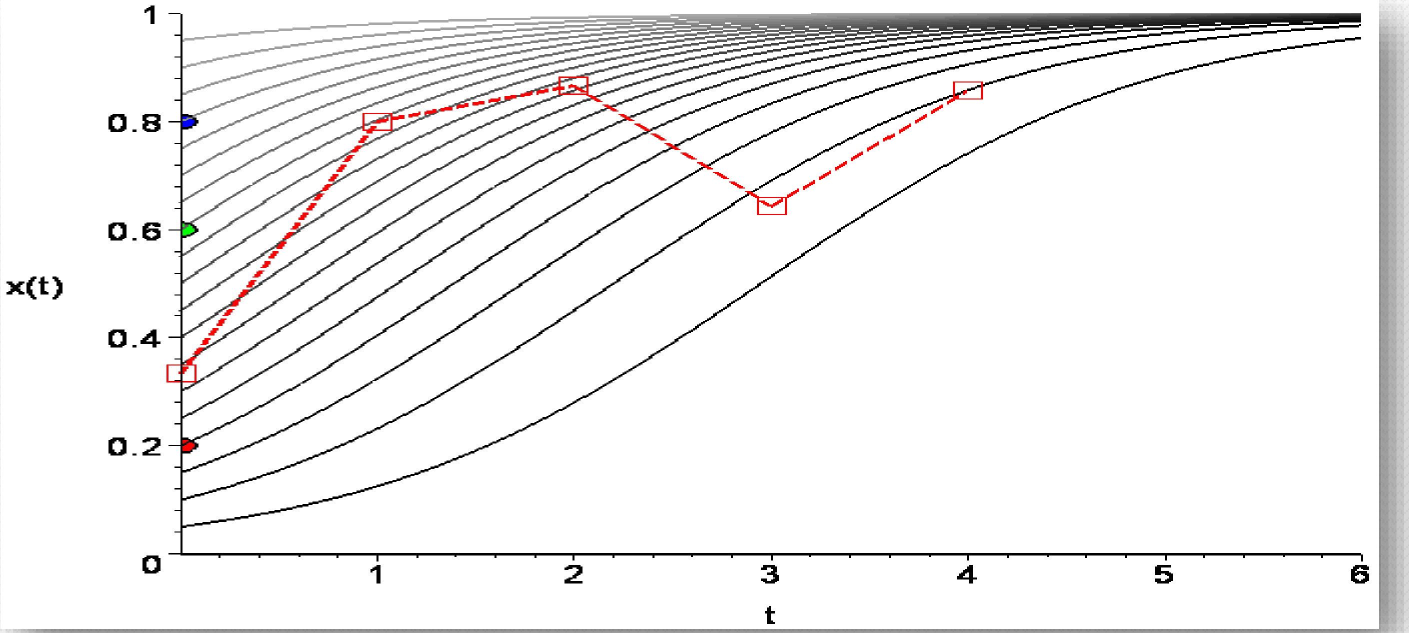
Beispiel 3:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



x(t) für unterschiedliche Anfangspopulationen x(0)

Theorie ⟺ Experiment

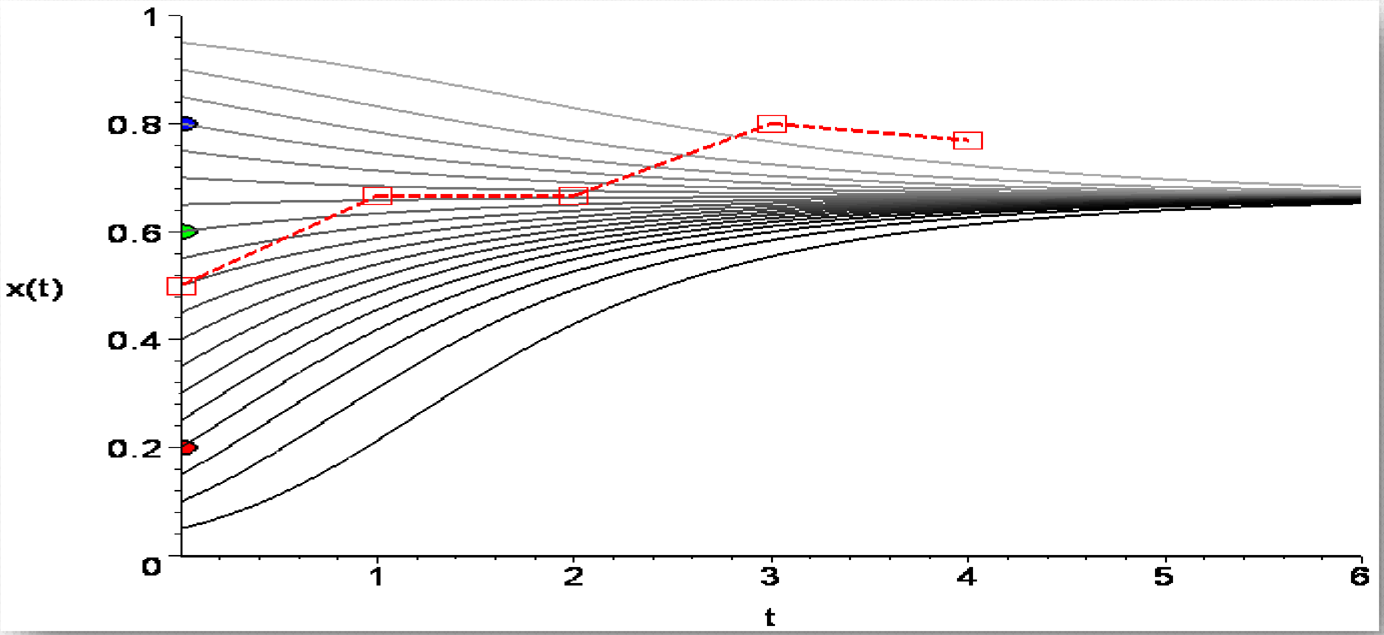
Experimentelle Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 1



Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Da es sich bei diesem Beispiel um ein dominantes, symmetrisches (2x2)-Spiel handelt und die Funktion g(x) im relevanten Bereich (x=[0,1]) immer größer-gleich Null ist, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer gegen die evolutionär stabile Strategie x=1. Die klassische evolutionäre Spieltheorie sagt demnach voraus, dass die Spieler innerhalb der betrachteten Population nach einer gewissen Zeit maßgeblich die Strategie Kugel wählen (x=1). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 1.

Theorie ⟺ Experiment

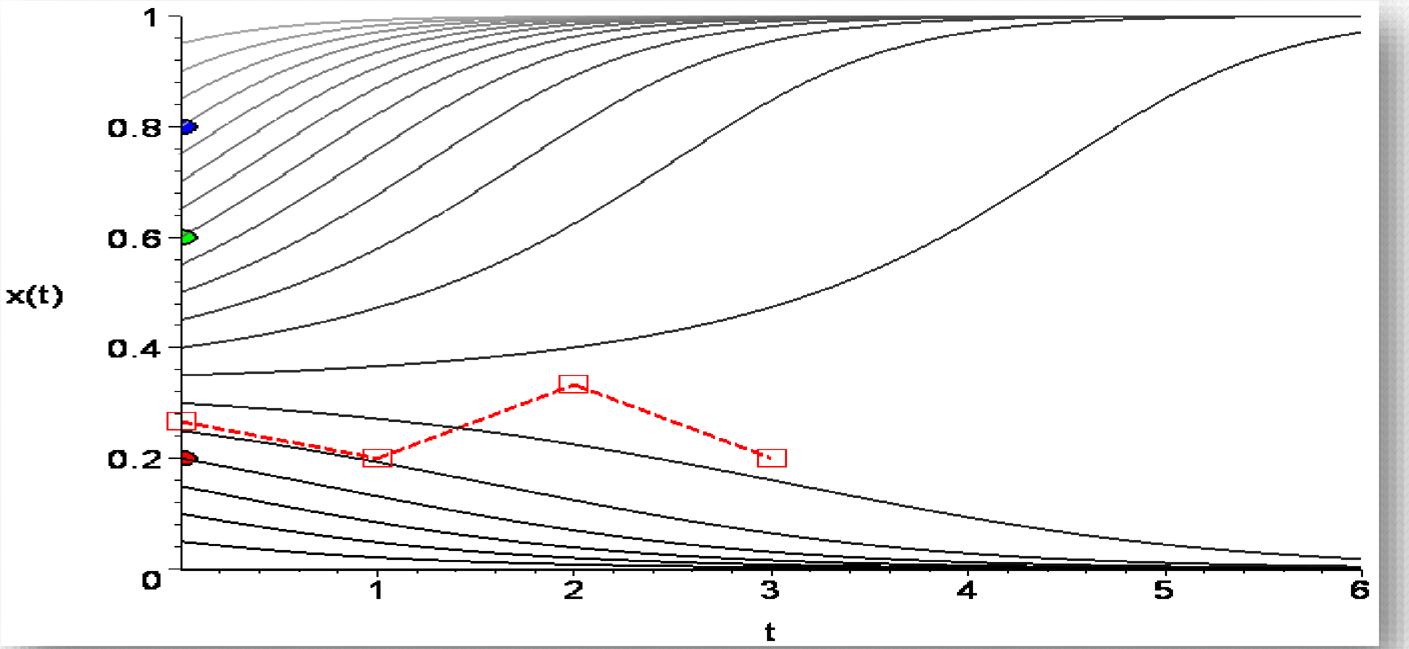
Experimentelle Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 2



Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,KK) und (KK,K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht (der einzigen evolutionär stabilen Strategie des Spiels), was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion g(x) ist (x=0.67). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 2.

Theorie ⟺ Experiment

Experimentelle Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 3



Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler abhängig vom Anfangswert zu einem der beiden reinen Nash-Gleichgewichte (x=1 oder x=0). Die klassische evolutionäre Spieltheorie sagt demnach voraus, dass es zwei evolutionär stabile Strategien gibt (x=1 oder x=0). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 3.

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Ein „einfaches“Beispiel

Ein einfaches Beispiel einer Differentialgleichung lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(o)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \Big| \cdot dt$$

$$dx = x \cdot dt \quad \Big| / x$$

$$\frac{1}{x} dx = dt \quad \Big| \int (\ldots)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \int_0^t dt$$

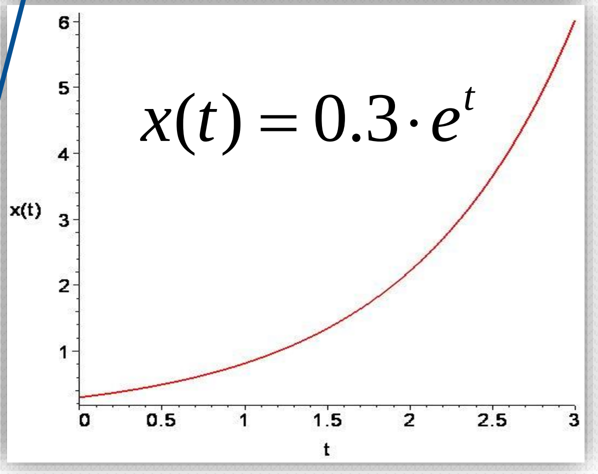
$$\ln(x(t)) - \ln(x(0)) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right) = t \quad \Big| e^{(\ldots)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = e^t \quad \Big| \cdot x(0)$$

$$x(t) = x(0) \cdot e^t$$



x(t), wobei x(o)=0.3

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(o)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 \quad \left|\cdot dt\right.$$

$$dx = \left(x - x^2\right)\cdot dt \quad \left|/\left(x - x^2\right)\right.$$

$$\frac{1}{x - x^2} dx = dt \quad \left|\int(\ldots)\right.$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x - x^2} dx = \int_0^t dt$$

$$\ln(x(t)) - \ln(x(t)-1) - \left(\ln(x(0)) - \ln(x(0)-1)\right) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t)\cdot(x(0)-1)}{x(0)\cdot(x(t)-1)}\right) = t \quad \left|e^{(\ldots)}\right.$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t)\cdot(x(0)-1)}{x(0)\cdot(x(t)-1)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t)\cdot(x(0)-1)}{x(0)\cdot(x(t)-1)} = e^t \quad \left|\cdot\left(x(0)\cdot(x(t)-1)\right)\right.$$

$$x(t)\cdot(x(0)-1) = x(0)\cdot x(t)\cdot e^t - x(0)\cdot e^t \quad \left|-\left(x(0)\cdot x(t)\cdot e^t\right)\right.$$

$$x(t)\cdot\left(x(0)-1-x(0)\cdot e^t\right) = -x(0)\cdot e^t \quad \left|/\left(x(0)-1-x(0)\cdot e^t\right)\right.$$

$$x(t) = \frac{-x(0)\cdot e^t}{x(0)-1-x(0)\cdot e^t} \Leftrightarrow x(t) = \frac{x(0)\cdot e^t}{1-x(0)+x(0)\cdot e^t}$$

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1

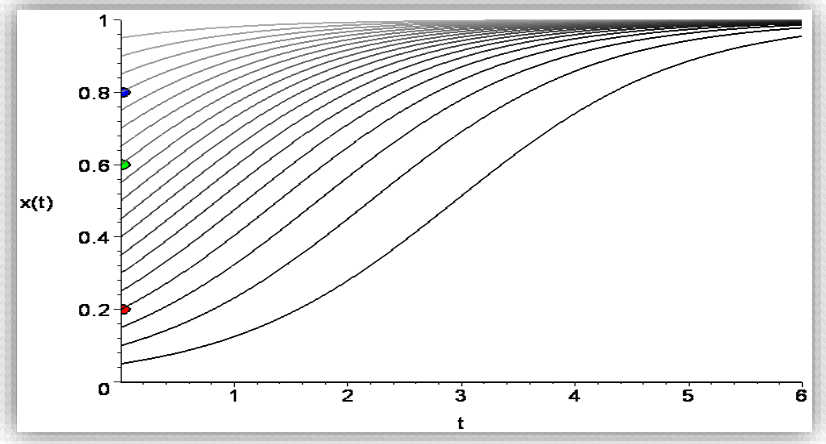
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

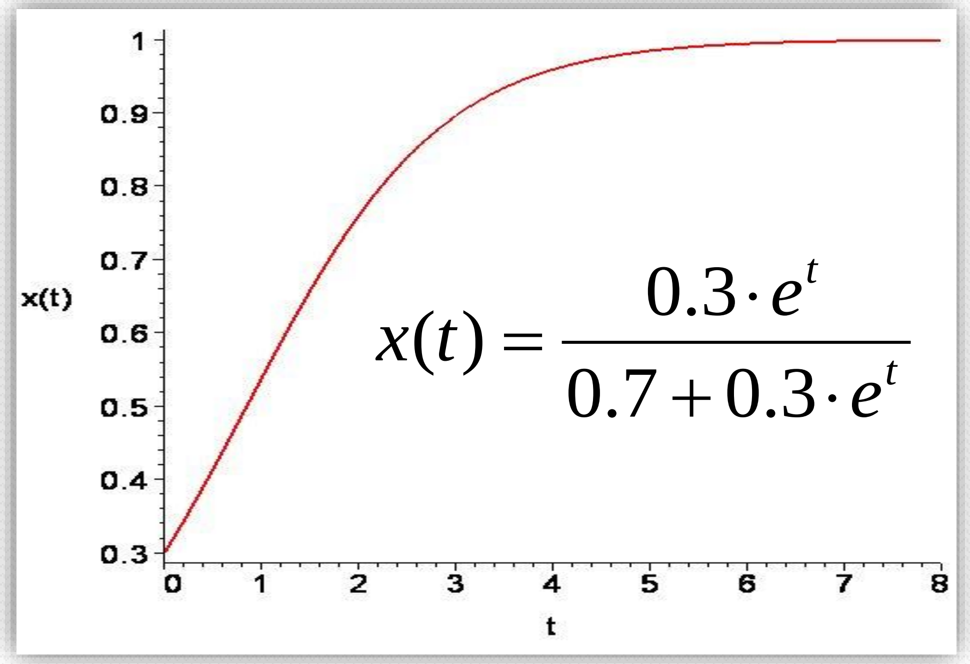
$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

Analytische Lösung:

$$x(t) = \frac{x(0) \cdot e^t}{1 - x(0) + x(0) \cdot e^t}$$





$$x(t) = \frac{0.3 \cdot e^t}{0.7 + 0.3 \cdot e^t}$$

x(t), wobei x(0)=0.3

Lösen des evolutionären Spiels mit Maple

(Vorlage2.mw)

```
> restart:
  with(LinearAlgebra):
  with(plots):
```

Definition der Auszahlunsmatrix für Spieler A (USA) im Spiel des Wettrüstens:

```
> D_A11:=1:
  D_A12:=4:
  D_A21:=0:
  D_A22:=2:
  D_A:=Matrix(2,2,[D_A11,D_A12,D_A21,D_A22]);
```

Da sich das Spiel um ein symmetrisches (2 Personen)-(2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlunsmatrix für Spieler B (Nord Korea) durch die transponierte Matrix des Spielers A:

```
> D_B:=Transpose(D_A);
```

Wir betrachten im folgenden die evolutionäre Erweiterung des Dilemma des Wettrüstens. Die Population bestehe aus den Entscheidungsträgern von vielen Ländern und zu jedem Zeitpunkt treffen sie erneut die Entscheidung "Aufrüsten" oder "Abrüsten". Die Differentialgleichung, die die zeitliche Entwicklung des Populationsvektors x(t) (Anteil der Länder die "Aufrüsten") beschreibt lautet:

```
> DGL:=diff(x(t),t)=simplify(((D_A11-D_A21)*(x(t)-x(t)^2) + (D_A12-D_A22)*(1-2*x(t)+x
  (t)^2))*x(t));
  g:=simplify(((D_A11-D_A21)*(x-x^2) + (D_A12-D_A22)*(1-2*x+x^2))*x);
```

Die die zeitliche Entwicklung bestimmende Funktion g(x) besitzt das folgende Aussehen:

```
> plot(g, x=0..1);
```

Lösen des evolutionären Spiels mit Maple

(Vorlage2.mw)

x(t), der Anteil der Spieler (Länder) die zum Zeitpunkt t die Strategie 1 ("Aufrüsten") spielen , hängt neben der Funktion g(x) von dem Anfangswert x(t=0) ab.Setzt man z.B. x(t=0)=0.1 (entspricht einer Anfangspopulation von 10% der Länder rüstet auf und 90% rüstet ab) so kann man die Differentialgleichung analytisch Lösen (nicht immer möglich):

```
> LoesDGL:=simplify(dsolve({DGL,x(0)=0.1}));
```

Darstellen der Lösung:

```
> plot(rhs(LoesDGL),t=0..4);
```

Ausgabe des Wertes zu einer festen Zeit (z.B. t=2)

```
> evalf(subs({t=2},rhs(LoesDGL)));
```

Falls eine analytische Lösung nicht möglich ist kann man wie folgt die DGL numerisch lösen und grafisch darstellen:

```
> LoesDGL:=dsolve({DGL,x(0)=0.1},x(t),type=numeric):
  odeplot(LoesDGL,[t,x(t)],0..4);
```

Ausgabe des Wertes zu einer festen Zeit (z.B. t=2)

```
> LoesDGL(2);
```

Python mit Matplotlib: http://matplotlib.org/

matplotlib

Version 3.0.0

home | examples | tutorials | API | docs »

Matplotlib is a Python 2D plotting library which produces publication quality figures in a variety of hardcopy formats and interactive environments across platforms. Matplotlib can be used in Python scripts, the Python and IPython shells, the Jupyter notebook, web application servers, and four graphical user interface toolkits.

Matplotlib tries to make easy things easy and hard things possible. You can generate plots, histograms, power spectra, bar charts, errorcharts, scatterplots, etc., with just a few lines of code. For examples, see the sample plots and thumbnail gallery.

For simple plotting the `pyplot` module provides a MATLAB-like interface, particularly when combined with IPython. For the power user, you have full control of line styles, font properties, axes properties, etc, via an object oriented interface or via a set of functions familiar to MATLAB users.

Installation

Visit the Matplotlib installation instructions.

Lösen des evolutionären Spiels mit Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
params = {
    'text.usetex'       : True,
    'axes.labelsize'  : 20,
    'xtick.labelsize' : 20,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)

# Definition der Funktion g
def g(x,a,b,c,d):
  g=((a-c)*(x-x*x) + (b-d)*(1-2*x+x*x))*x
  return g

#Festlegung der Auszahlungsmatrix des symmetrischen (2x2)-Spiels
a=2
b=4
c=0
d=5
#End(zeit)punkt, Anzahl der Zeitschritte
tend=6
numpoints=500
#Anfangswert der Population
x0=0.4
```

Lösen des evolutionären Spiels mit Python

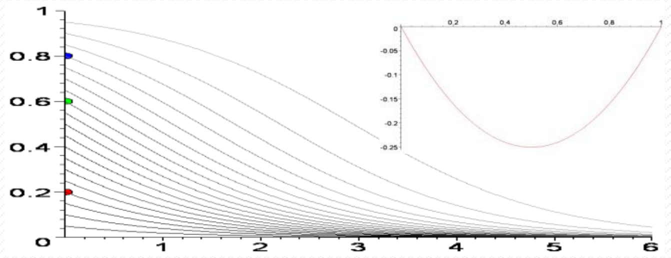
```
#Loesen der DGL
Loes=np.empty([numpoints,2])
t=np.linspace(0,tend,numpoints)
dt=t[1]-t[0]
Loes[0].flat[0] = t[0]
Loes[0].flat[1] = x0
i = 1
while i < len(Loes):
    Loes[i].flat[0] = t[i]
    dx=g(Loes[i-1,1],a,b,c,d)*dt
    Loes[i].flat[1] = Loes[i-1,1] + dx
    i = i + 1

#Plotten des Bildes
plt.plot(Loes[:,0],Loes[:,1],c="black", linewidth=1.5, linestyle='-')

# Achsenbeschriftungen usw.
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel(r"$\rm x(t)$")
plt.xlabel(r"$\rm t$")

#Speichern des Bildes als .jpg--Datei
saveFig="./evol.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=100,bbox_inches="tight",pad_inches=0.05,format="jpg")
plt.show()
```

Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

- **Dominante Spiele**

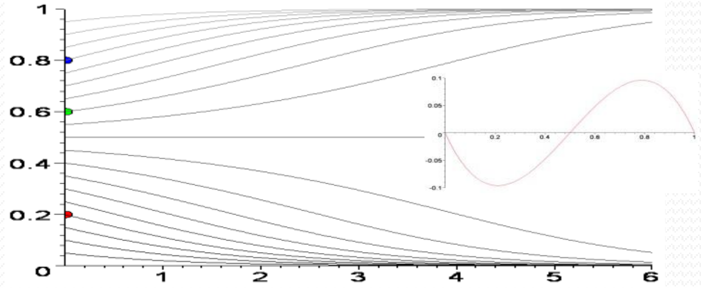
  (2. Strategie dominiert 1.Strategie)

  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=0.



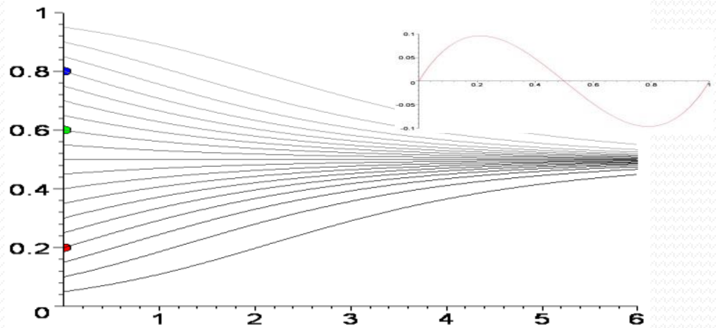
- **Koordinationsspiele**

  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti – Koordinationsspiele**

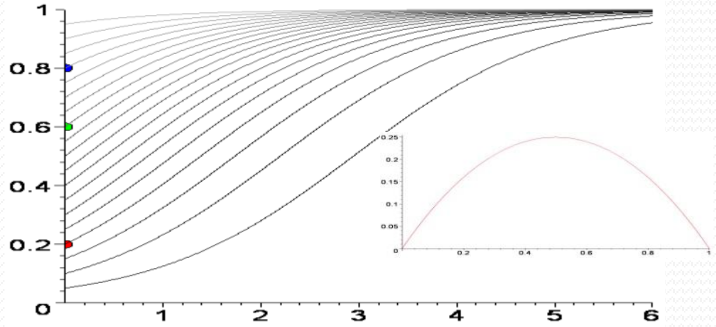
  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**

  (1. Strategie dominiert 2.Strategie)

  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=1.

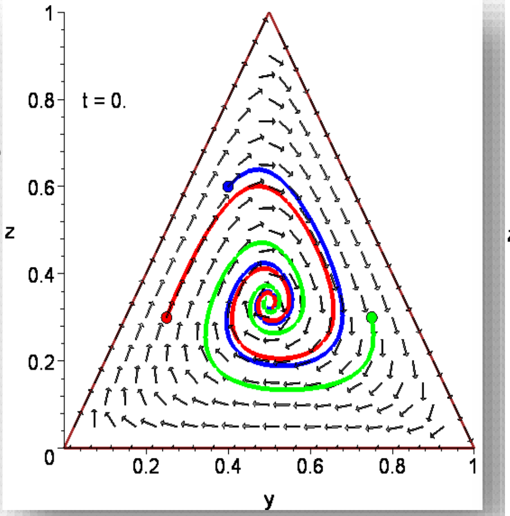


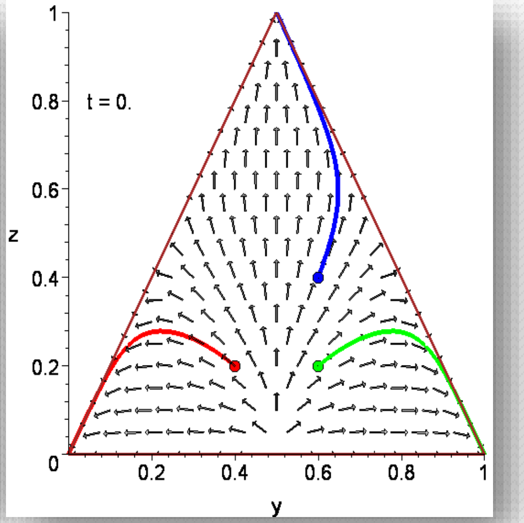
Weitere Arten von Spieltypen

(Ausblick: Vorlesungsteil 5)

- **Mehr als zwei Strategien:**

Schon bei drei Strategien können 19 unterschiedliche Spielklassen unterschieden werden.

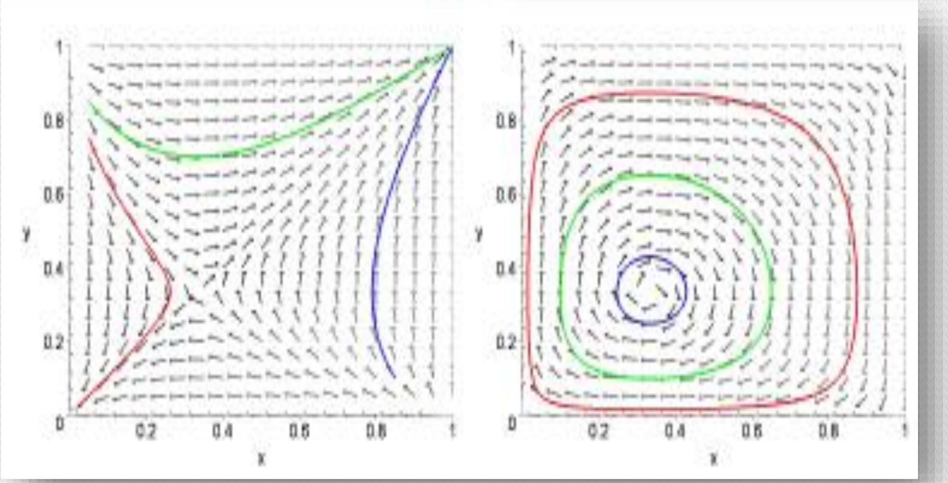




- **Bimatrix Spiele**

Unsymmetrische (2x2) Spiele:

Setzt sich die Population aus zwei unterschiedlichen Spielergruppen (x(t) und y(t)) zusammen, so spricht man von Bimatrix Spielen.



E-Learning

Zusatzmaterial auf der Online-Lernplatform Lon Capa

Zusäzlich zu den Informationen aus dieser Internetseite wurde ein separater Kurs auf der Online-Lernplatform Lon Capa eerstellt. Er beinhaltet neben den hier dargestellten Informationen zusäzliche Erläuterungen, diverse interaktive Übungsaufgaben, Feedbackmöglichkeiten und Probeklausuren. Falls Sie schon einen Lon Capa Account besitzen können Sie sich einfach mit diesem unter dem unten angegebenen Link einloggen. Falls Sie Student der Universiät Frankfurt sind, können Sie sich mit Ihrem HRZ-Account einloggen. Anderenfalls kontaktieren Sie bitte per E-Mail und ich werde für Sie einen Account für die Lernplatform erstellen.

Hier gehts zu Lon Capa

Aufgaben auf Lon-Cappa

Betrachten Sie die zeitliche Entwicklung eines evolutionären (2x2)-Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. Der Populationsvektors $\vec{x}(t)$ (hier $x(t)$, da nur zwei Strategien) wird durch folgende Differentialgleichung bestimmt

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)\right] x(t) \; := g(x)$$

$x(t)$, der Anteil der Spieler die zum Zeitpunkt t die Strategie s_1 spielen, hängt neben der Funktion $g(x)$ von dem Anfangswert $x(t = 0)$ ab. Die Auszahlungswerte des Spiels seien $\$_{11}$ = 1 ,$\$_{12}$ = 4 ,$\$_{21}$ = 0 und $\$_{22}$ = 2 und der Anfangswert der Population zum Zeitpunkt t=0 sei $x(0)$ = 0.1. Berechnen Sie den Wert des Populationsvektors zur Zeit t=1.64.

x(t=1.64)= ______ (bitte geben Sie den numerischen Wert auf mindestens 3 Nachkommastellen an; z.B. 0.111)

Antwort einreichen   Versuche 0/5

Aufgaben auf Lon-Cappa

Betrachten Sie die zeitliche Entwicklung eines evolutionären (2x2)-Spiels mit symmetrischer Auszahlungsmatrix. Der Populationsvektors $\vec{x}(t)$ (hier $x(t)$, da nur zwei Strategien) wird durch folgende Differentialgleichung bestimmt

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)\right] x(t) \; := g(x)$$

$x(t)$, der Anteil der Spieler die zum Zeitpunkt t die Strategie s_1 spielen, hängt neben der Funktion $g(x)$ von dem Anfangswert $x(t = 0)$ ab. Die Auszahlungswerte des Spiels seien $\$_{11}$ = 140 ,$\$_{12}$ = 61 ,$\$_{21}$ = 162 und $\$_{22}$ = 143 und der Anfangswert der Population zum Zeitpunkt t=0 sei $x(0)$ = 0.5. Berechnen Sie die evolutionär stabile Strategie des Spiels; gegen welchen Wert strebt der Populationsvektor für $t \to \infty$?

x($t \to \infty$)= ________ (bitte geben Sie den numerischen Wert auf mindestens 3 Nachkommastellen an; z.B. 0.111)

Antwort einreichen   Versuche 0/5