Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
08.11.2019

MATTHIAS HANAUSKE

FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY

4. Vorlesung

Klassen symmetrischer (2x2)-Spiele

	Spieler B Strategie 1 y=1	Spieler B Strategie 1 y=0
Spieler A Strategie 1 x=1	(a , a)	(b , c)
Spieler A Strategie 2 x=0	(c , b)	(d , d)

Symmetrisches (2x2)-Spiel

Symmetrische (2x2)-Spiele lassen sich in drei unterschiedliche Klassen gliedern:

1. Dominante Spiele
2. Koordinationspiele
3. Anti-Koordinationsspiele

Die Klasse der dominanten Spiele (a > c und b > d bzw. a < c und b < d)

Bei dieser Spielklasse dominiert eine Strategie die andere. Es existiert nur ein reines Nash-Gleichgewicht welches die dominante Strategie des Spiels darstellt. Dieser Fall tritt ein, falls:
a > c und b > d : Strategie 1 dominiert Strategie 2; dominante Strategie bei (x,y)=(1,1).
a < c und b < d : Strategie 2 dominiert Strategie 1; dominante Strategie bei (x,y)=(0,0).

Koordinationsspiele (a > c und b < d)

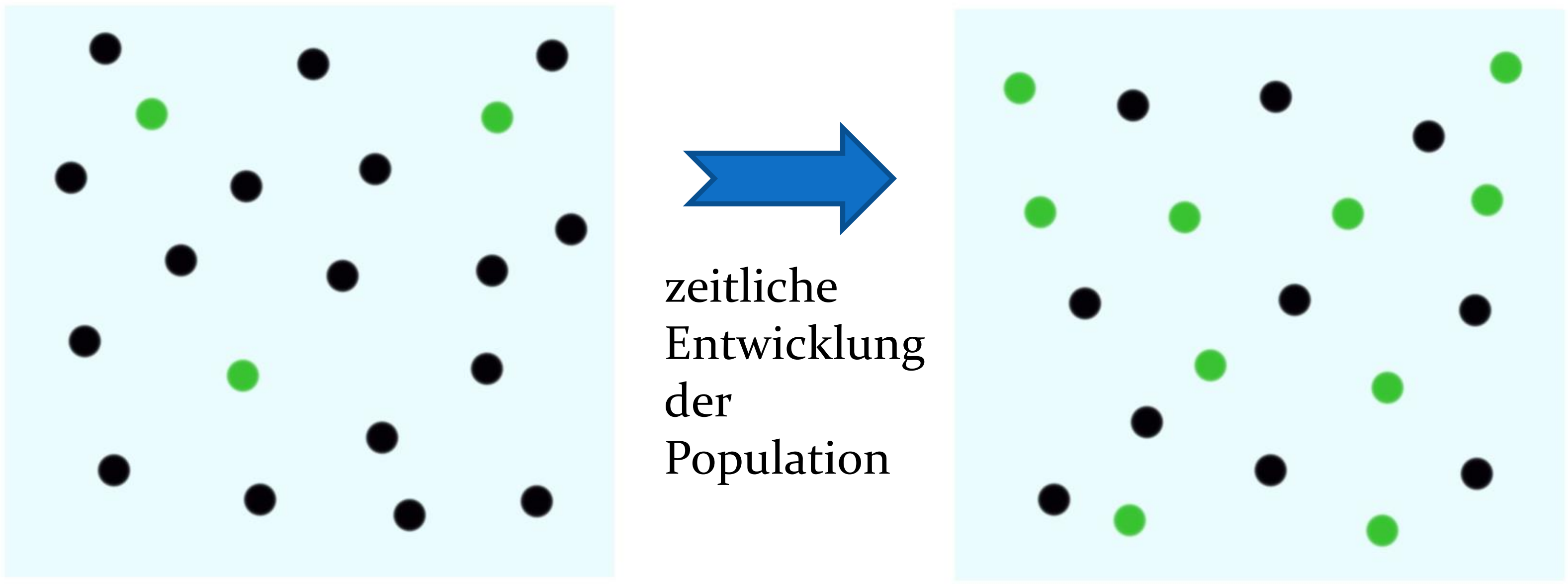
Ein Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: a > c und b < d . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, symmetrische Nash-Gleichgewicht bei (x,y)=(0,0) und (x,y)=(1,1).

Anti-Koordinationsspiele (a < c und b > d)

Ein Anti-Koordinationsspiel existiert, falls die Parameter a, b, c und d der Auszahlungmatrix die folgenden Bedingungen erfüllen: a < c und b > d . Bei dieser Spielklasse existieren drei Nash-Gleichgewichte, ein gemischtes Nash-Gleichgewicht und zwei reine, unsymmetrische Nash-Gleichgewicht bei (x,y)=(0,1) und (x,y)=(0,1).

Evolutionäre Spieltheorie (I)

Die evolutionäre Spieltheorie betrachtet die zeitliche Entwicklung des strategischen Verhaltens einer gesamten Spielerpopulation.

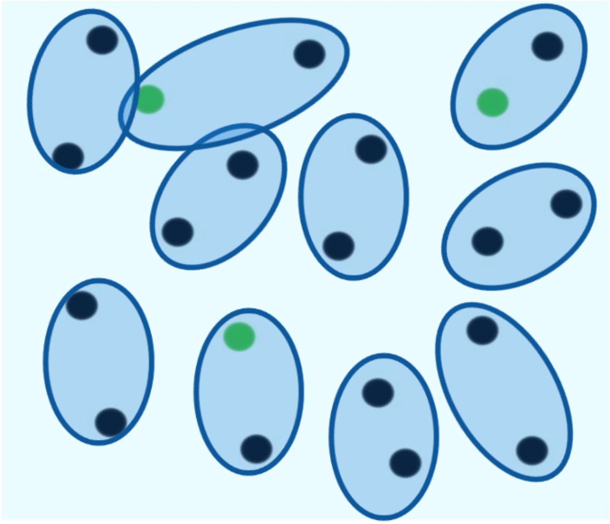


$x(0)=0.15$ $x(10)=0.5$

Mögliche Strategien: (grün , schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
$x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.

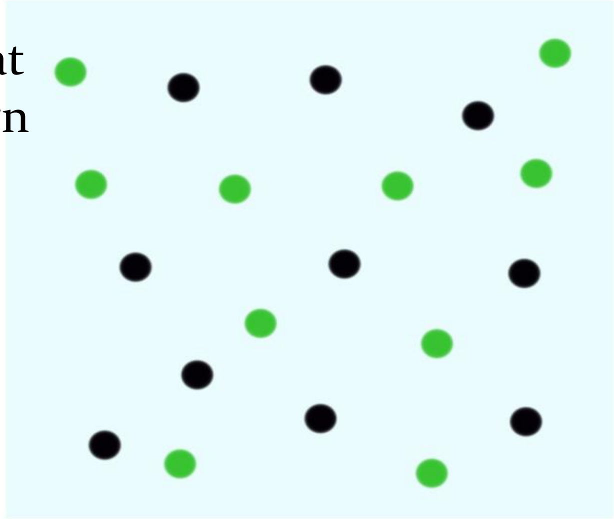
Evolutionäre Spieltheorie (II)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner wechseln .



$x(0)=0.15$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt t=0 das erste Mal das Spiel. Die Spieler wählen im Mittel zu 15% die grüne Strategie.



$x(10)=0.5$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die Spieler zunehmend attraktiver. Zum Zeitpunkt t=10 spielen schon 50% grün.

$$\frac{dx_i^A(t)}{dt} = \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A \, x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} \quad - \quad \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A \, x_k^A(t) \, x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dx_j^B(t)}{dt} = \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B \, x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} \quad - \quad \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B \, x_l^A(t) \, x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad ,$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Wir beschränken uns im folgenden auf den 2-Strategien Fall ($m_A = m_B = 2$), lassen jedoch weiter eine Unsymmetrie der Auszahlungsmatrix zu. Die beiden Komponenten der zweidimensionalen gruppenspezifischen Populationsvektoren lassen sich dann, aufgrund ihrer Normalisierungsbedingung, auf eine Komponente reduzieren ($x_2^A = 1 - x_1^A$ und $x_2^B = 1 - x_1^B$). Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben (siehe z.B. [4], S:116 oder [3], S:69):

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \left[\left(\$^A_{11} + \$^A_{22} - \$^A_{12} - \$^A_{21} \right) \, y(t) + \left(\$^A_{12} - \$^A_{22} \right) \right] \left(x(t) - \left(x(t) \right)^2 \right) \; =: \; g_A(x,y) \qquad (2) \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \left[\left(\$^B_{11} + \$^B_{22} - \$^B_{12} - \$^B_{21} \right) \, x(t) + \left(\$^B_{12} - \$^B_{22} \right) \right] \left(y(t) - \left(y(t) \right)^2 \right) \; =: \; g_B(x,y)
\end{aligned}$$

Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ($\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B\right)^T$), in welchem die Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren $x(t) = y(t)$ annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)\right] \, x(t) \; =: \; g(x) \qquad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\hat{\$}\,\vec{x} - \vec{x}\left(\hat{\$}\,\vec{x}\right)\right)\vec{x}$$

Evolutionär stabile Strategien (ESS)

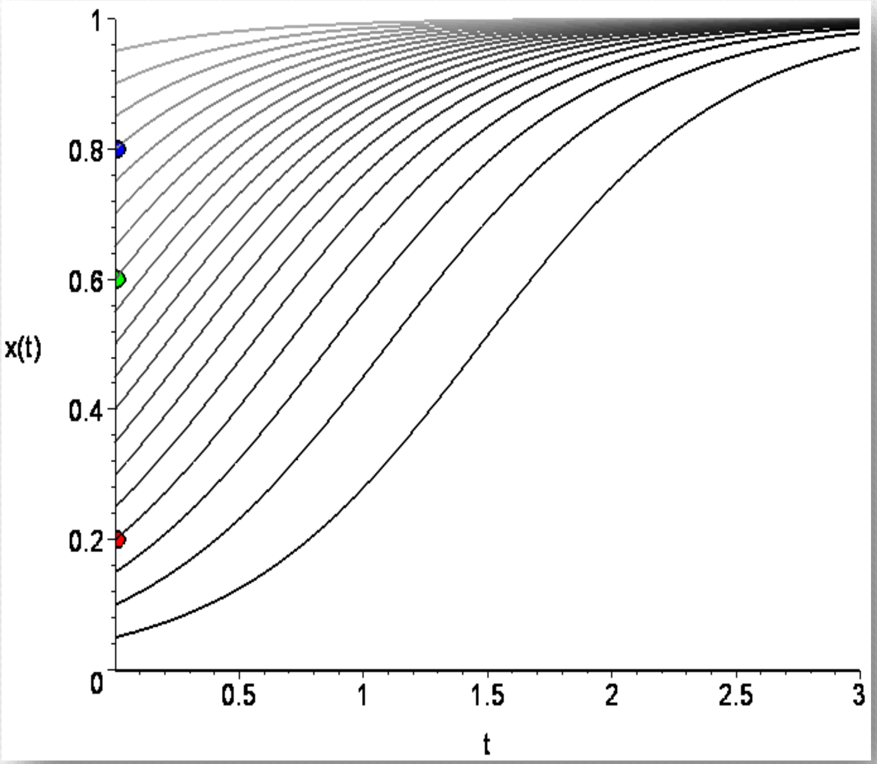
- Evolutionär stabile Strategien sind die stabilen Endzustände der Häufigkeitsverteilung x(t):

$$\underset{t \to \infty}{Limes}\left(x(t)\right)$$

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz einer ESS ist, dass diese ein Nash – Gleichgewicht des zugrundeliegenden Spiels ist.

Beispiel:
Gefangenendilemma ähnliche Spiele
Für die ESS des evolutionären Gefangenendilemma – Spiels ergibt sich:

$$\underset{t \to \infty}{Limes}\left(x(t)\right) = 1 \;\Rightarrow\; \text{alle "gestehen"}$$



Replikatordynamik

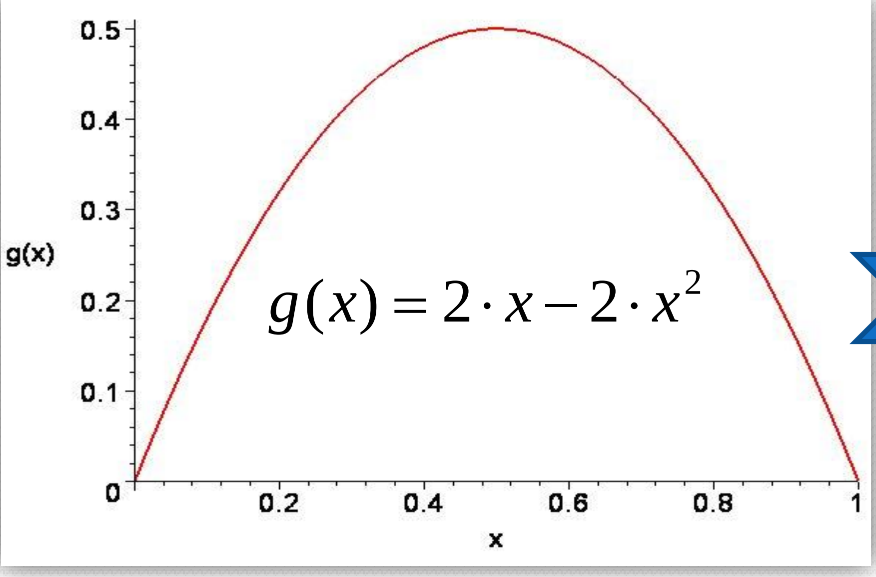
(für das Gefangenendilemma)

	Ge	Sc
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

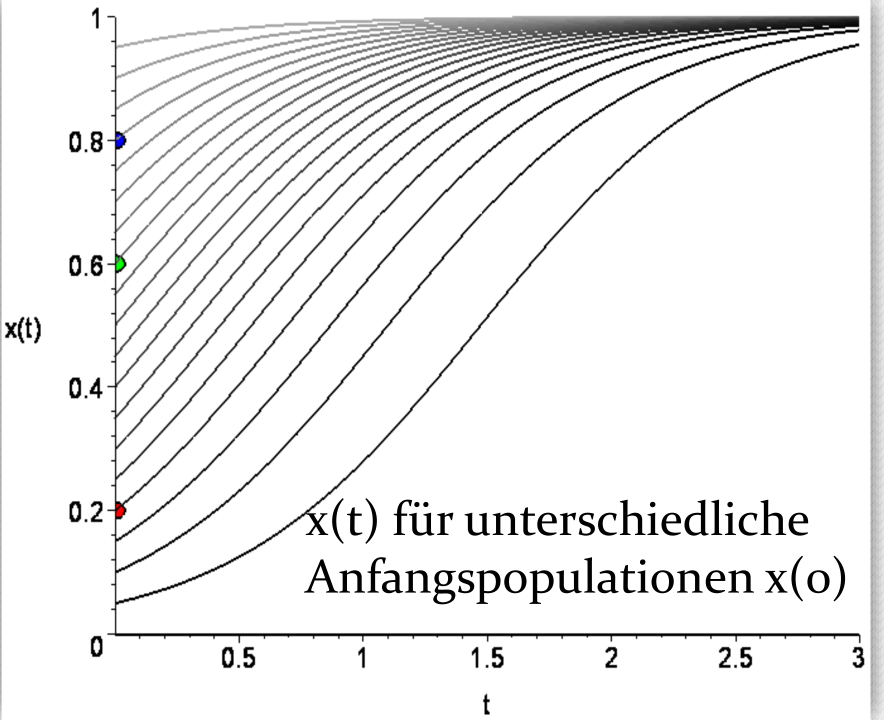
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Gefangenendilemma lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot \left(x(t)\right)^2 = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-7-(-9)) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (-3-(-1)) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2)\right)$$



Beispiel: Gefangenendilemma
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Replikatordynamik

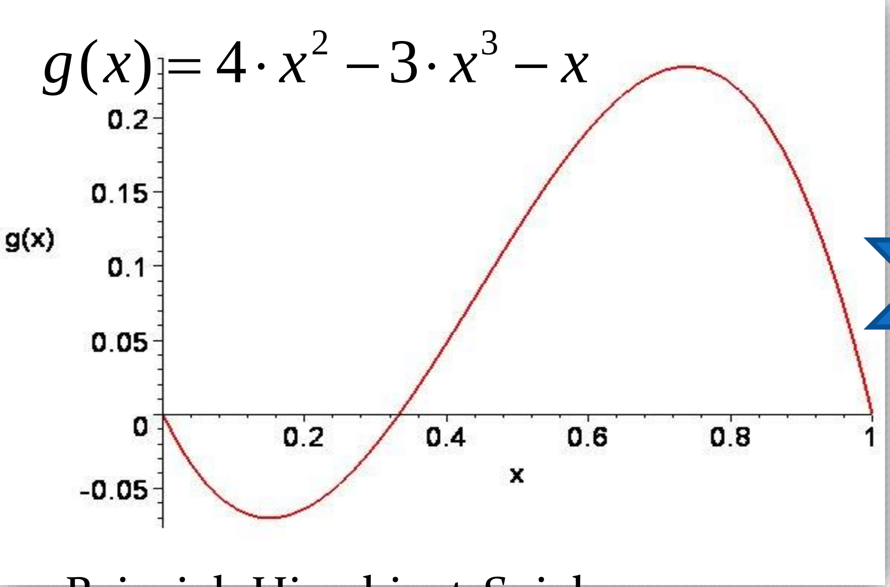
(für das Hirschjagt-Spiel)

	Hasen	Hirsch
Hasen	(2 , 2)	(4 , 0)
Hirsch	(0 , 4)	(5 , 5)

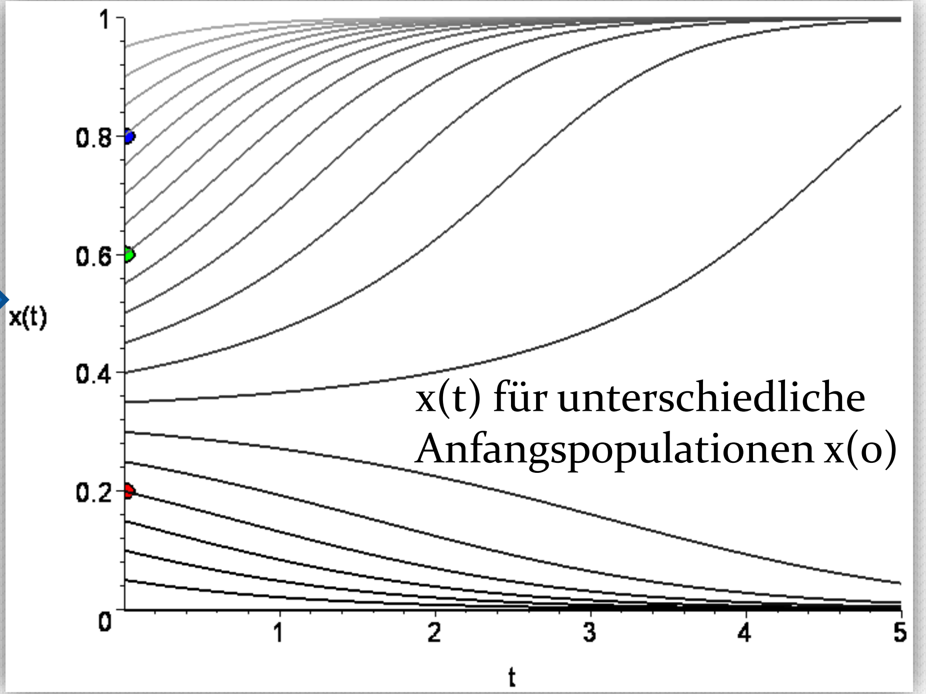
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Hirschjagt-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 4\cdot(x(t))^2 - 3\cdot(x(t))^3 - x(t) - = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t)\cdot\left((2-0)\cdot(x(t)-x(t)^2)+(5-4)\cdot(2\cdot x(t)-1-x(t)^2)\right)$$



Beispiel: Hirschjagt-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Replikatordynamik

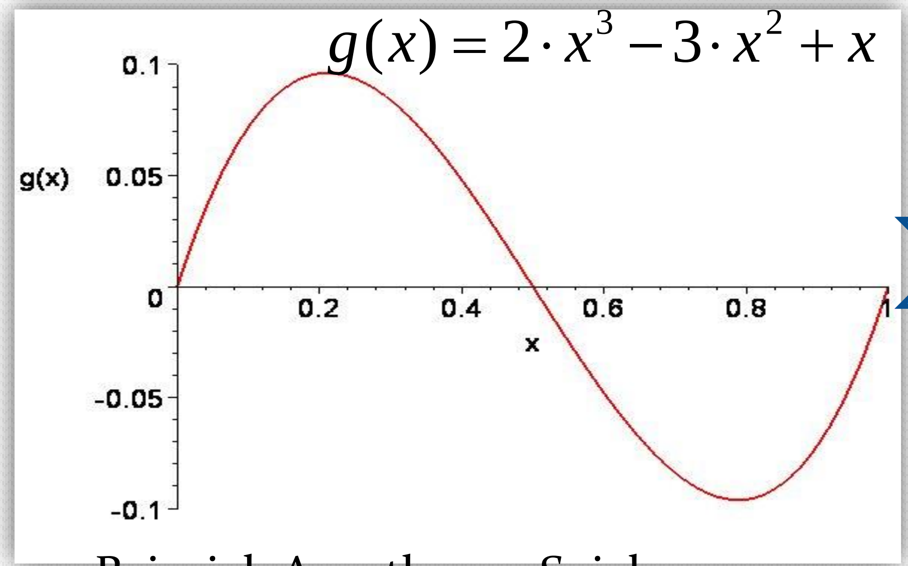
(für das Angsthasen-Spiel)

	Springe nicht	Springe
Springe nicht	(-1 , -1)	(2 , 0)
Springe	(0 , 2)	(1 , 1)

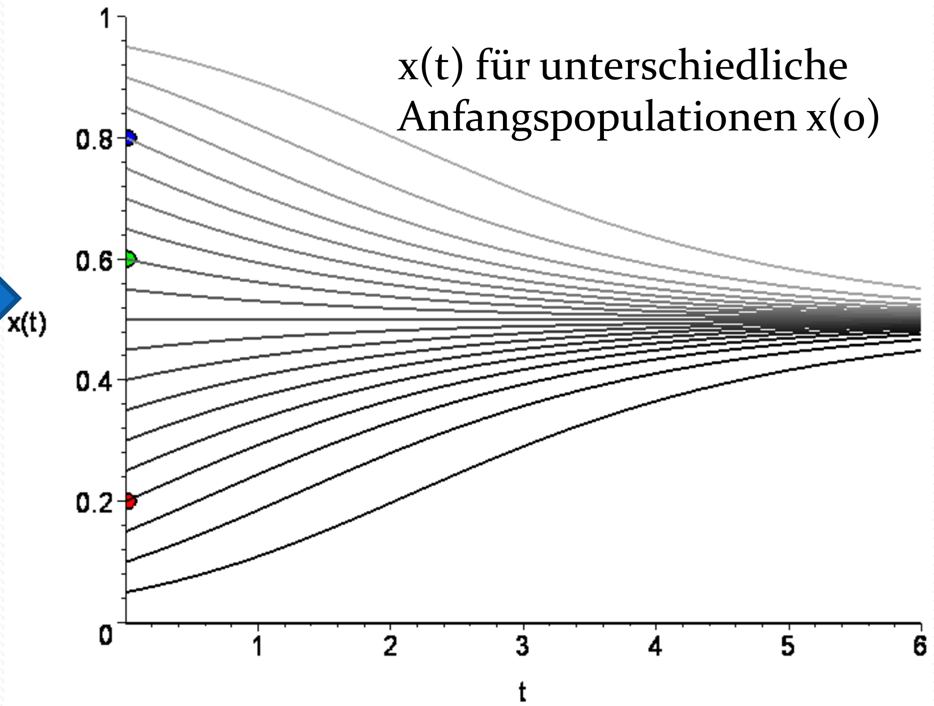
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das Angsthasen-Spiel lautet:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt} = 2 \cdot (x(t))^3 - 3 \cdot (x(t))^2 + x(t) = g(x(t))$$

$$g(x(t)) := x(t) \cdot \left((-1-0) \cdot (x(t) - x(t)^2) + (1-2) \cdot (2 \cdot x(t) - 1 - x(t)^2) \right)$$

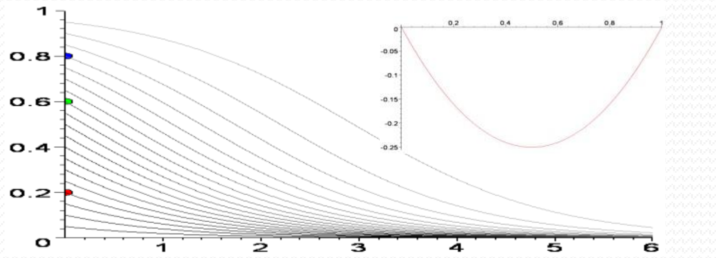


Beispiel: Angsthasen-Spiel
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt

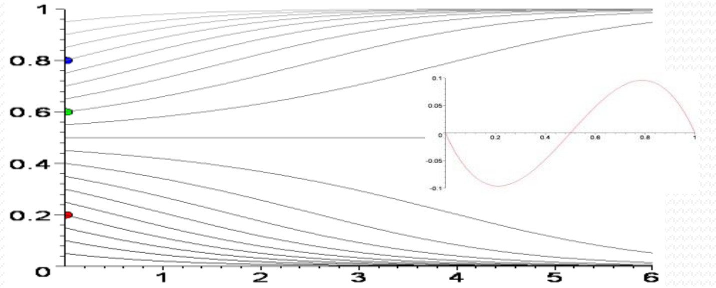


Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

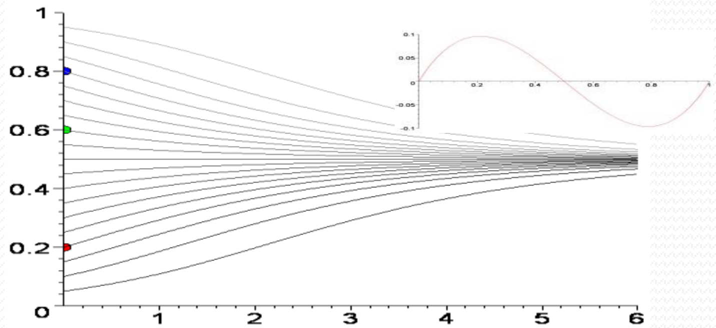
- **Dominante Spiele**
  (2. Strategie dominiert 1.Strategie)
  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=0.



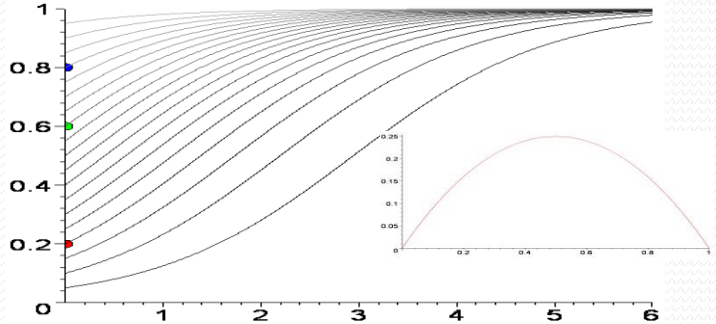
- **Koordinationsspiele**
  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti – Koordinationsspiele**
  Es existieren drei Nash – Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**
  (1. Strategie dominiert 2.Strategie)
  Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei x=1.



Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Ein „einfaches“Beispiel

Ein einfaches Beispiel einer Differentialgleichung lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \Big|\cdot dt$$

$$dx = x \cdot dt \quad \Big|/\, x$$

$$\frac{1}{x} dx = dt \quad \Big|\int(\ldots)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \int_0^t dt$$

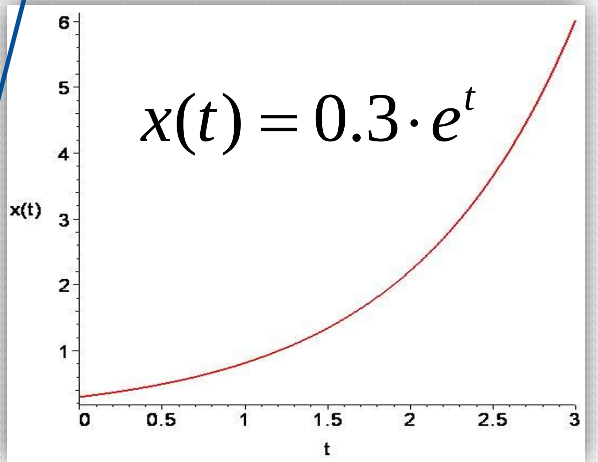
$$\ln(x(t)) - \ln(x(0)) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right) = t \quad \Big|e^{(\ldots)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t)}{x(0)} = e^t \quad \Big|\cdot x(0)$$

$$x(t) = x(0) \cdot e^t$$



x(t), wobei x(0)=0.3

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(o)berechnen?

Analytische Lösung:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 \quad \Big| \cdot dt$$

$$dx = \left(x - x^2\right) \cdot dt \quad \Big| / \left(x - x^2\right)$$

$$\frac{1}{x - x^2} dx = dt \quad \Big| \int (\ldots)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{x - x^2} dx = \int_0^t dt$$

$$\ln(x(t)) - \ln(x(t) - 1) - \left(\ln(x(0)) - \ln(x(0) - 1)\right) = t$$

$$\ln\left(\frac{x(t) \cdot (x(0) - 1)}{x(0) \cdot (x(t) - 1)}\right) = t \quad \Big| e^{(\ldots)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x(t) \cdot (x(0) - 1)}{x(0) \cdot (x(t) - 1)}\right)} = e^t$$

$$\frac{x(t) \cdot (x(0) - 1)}{x(0) \cdot (x(t) - 1)} = e^t \quad \Big| \cdot \left(x(0) \cdot (x(t) - 1)\right)$$

$$x(t) \cdot (x(0) - 1) = x(0) \cdot x(t) \cdot e^t - x(0) \cdot e^t \quad \Big| - \left(x(0) \cdot x(t) \cdot e^t\right)$$

$$x(t) \cdot \left(x(0) - 1 - x(0) \cdot e^t\right) = -x(0) \cdot e^t \quad \Big| / \left(x(0) - 1 - x(0) \cdot e^t\right)$$

$$x(t) = \frac{-x(0) \cdot e^t}{x(0) - 1 - x(0) \cdot e^t} \Leftrightarrow x(t) = \frac{x(0) \cdot e^t}{1 - x(0) + x(0) \cdot e^t}$$

Analytische Lösung von Differentialgleichungen

Beispiel 1

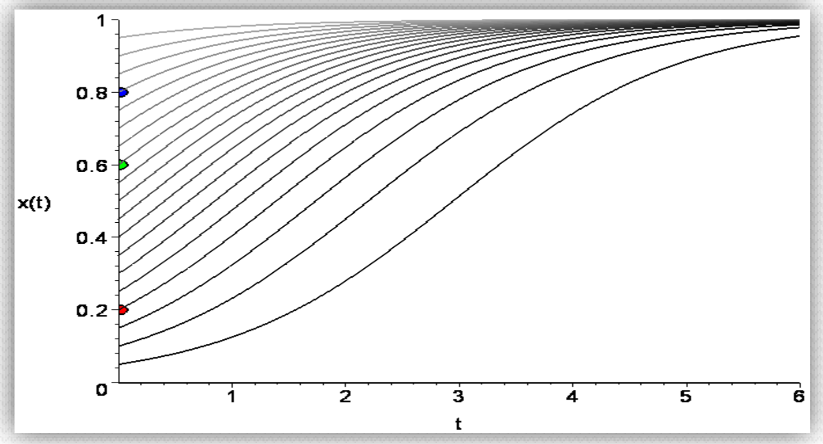
Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautete:

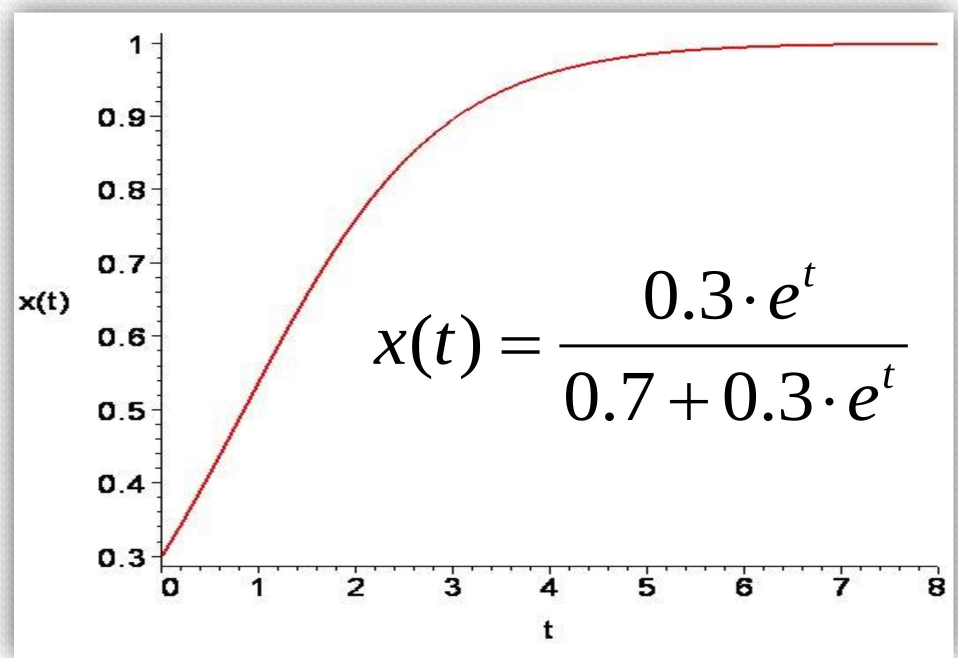
$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) - \left(x(t)\right)^2$$

Frage: Wie kann man die Funktion x(t) für einen bestimmten Anfangswert x(0)berechnen?

<u>Analytische Lösung:</u>

$$x(t) = \frac{x(0)\cdot e^t}{1 - x(0) + x(0)\cdot e^t}$$





x(t), wobei x(0)=0.3

Evolutionär Stabile Strategien

- Betrachten Sie die folgenden Beispiele:

Beispiel 1:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Beispiel 2:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Beispiel 3:

	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion g(x) für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g(x) (g(x)=0).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte

Beispiel 1	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Das Spiel gehört zur Klasse der dominanten Spiele.

Beispiel 2	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0 , 3)	(1 , 1)

Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,KK) und (KK,K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Anti-Koordinationsspiele.

Beispiel 3	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2 , 2)	(3 , 3)

Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Das Spiel gehört zur Klasse der Koordinationsspiele.

Nullstellen der Funktion g(x)

Beispiel 1:

$$g(x) = x - x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (1 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

Die Funktion hat zwei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 1$$

Beispiel 2:

$$g(x) = 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

$$x \cdot \left(3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2 = 0 \;\Big|\; /3$$

$$x^2 - \frac{5}{3} \cdot x + \frac{2}{3} = 0 \;\Big|\; \text{p-q Formel}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25 - 24}{36}}$$

$$x_{2/3} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1, \; x_3 = \frac{2}{3}$$

Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{2}{3}$$

Beispiel 3:

Die Funktion hat drei Nullstellen:

$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 1 \text{ und } x_3 = \frac{1}{3}$$

Evolutionäre Strategien (Beispiel 1)

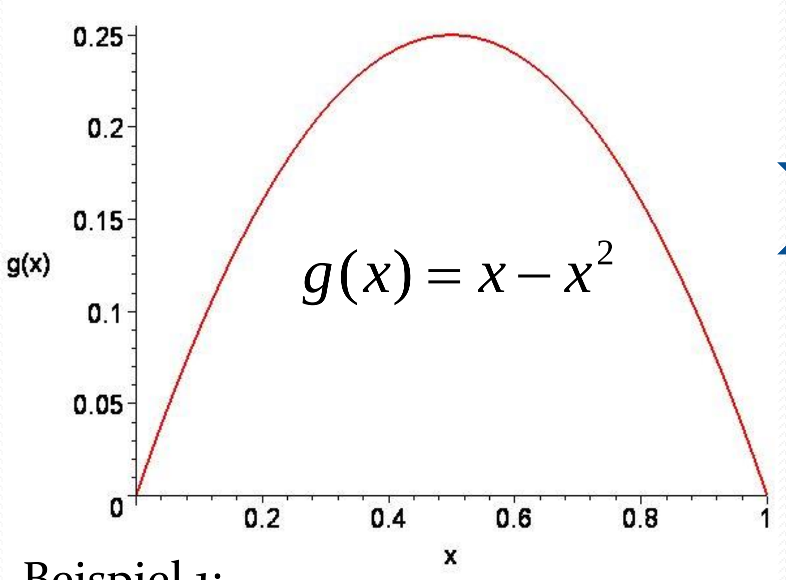
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0 , 0)	(2 , -1)
Keine Kugel	(-1 , 2)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das erste Beispiel lautet:

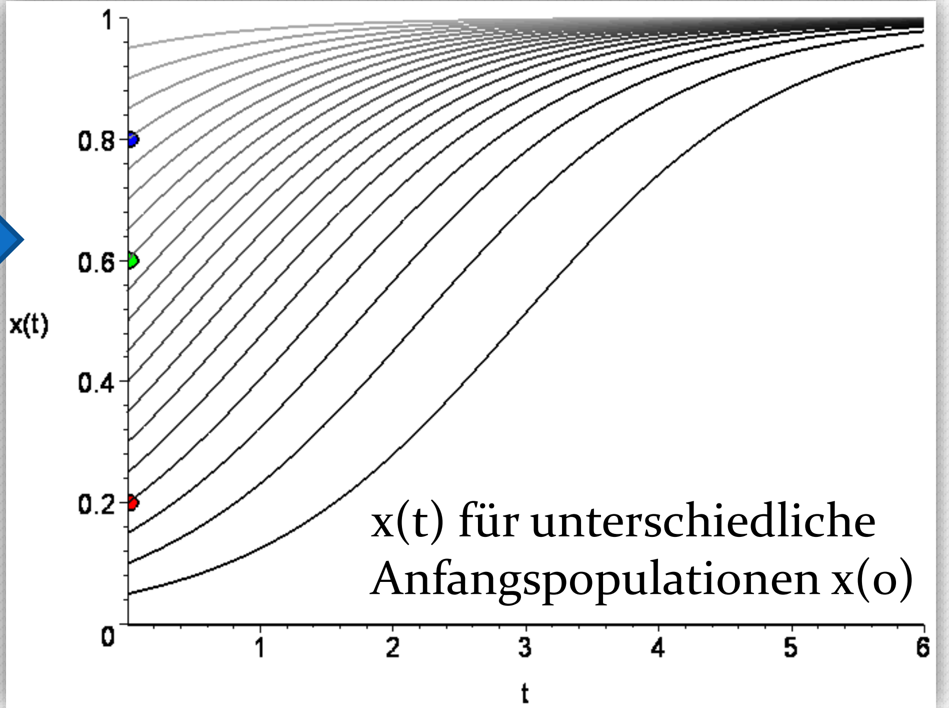
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = x(t) - (x(t))^2$$

$\boxed{\text{Eine ESS bei } x=1}$

Da es sich bei diesem Beispiel um ein dominantes, symmetrisches (2x2)-Spiel handelt und die Funktion g(x) im relevanten Bereich (x=[0,1]) immer größer-gleich Null ist, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer gegen 1.



Beispiel 1:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Evolutionäre Strategien (Beispiel 2)

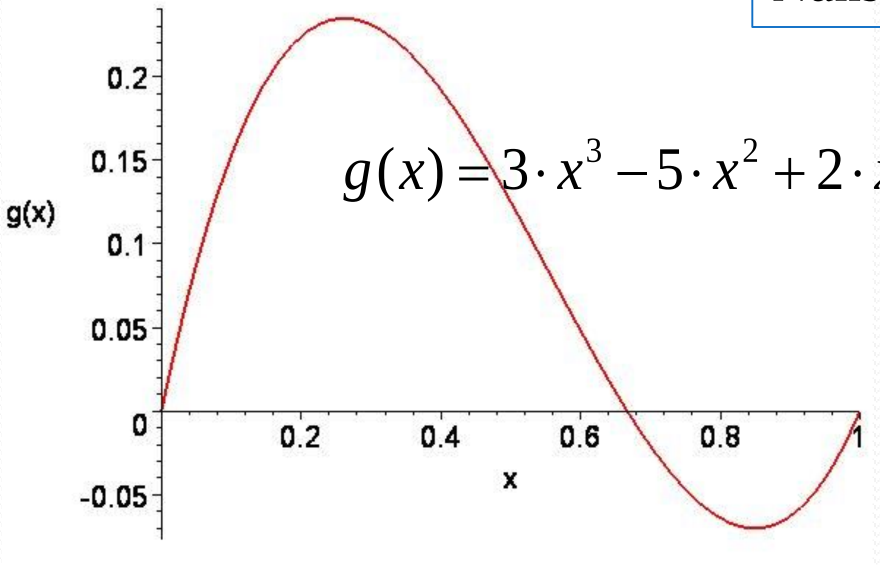
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(-1 , -1)	(3 , 0)
Keine Kugel	(0, 3)	(1 , 1)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das zweite Beispiel lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = 3\cdot(x(t))^3 - 5\cdot(x(t))^2 + 2\cdot x(t)$$

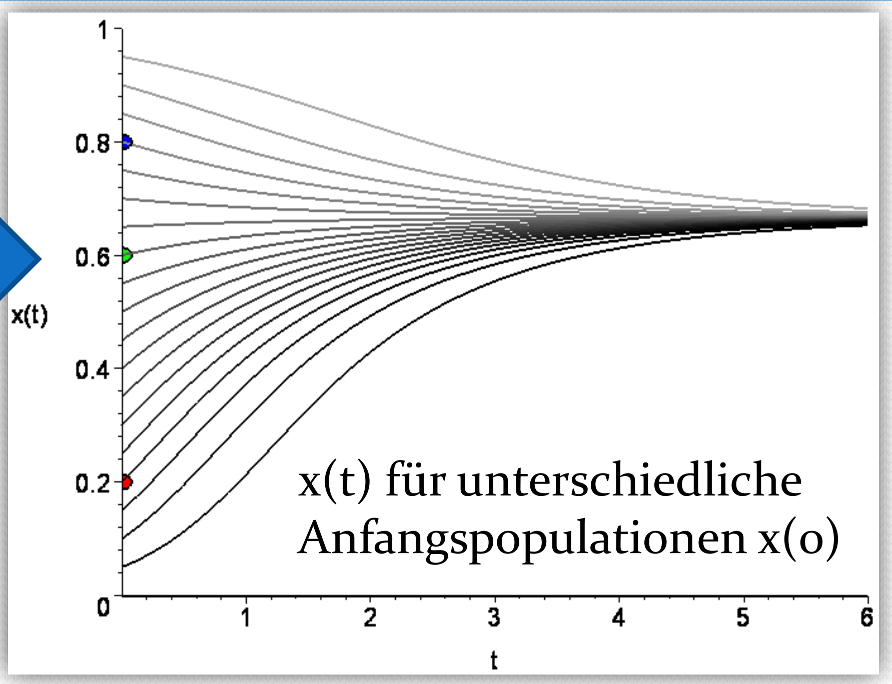
Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht, was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion g(x) ist (x=0.67).

Eine ESS bei x=0.67



$$g(x) = 3\cdot x^3 - 5\cdot x^2 + 2\cdot x$$

Beispiel 2:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Evolutionäre Strategien (Beispiel 3)

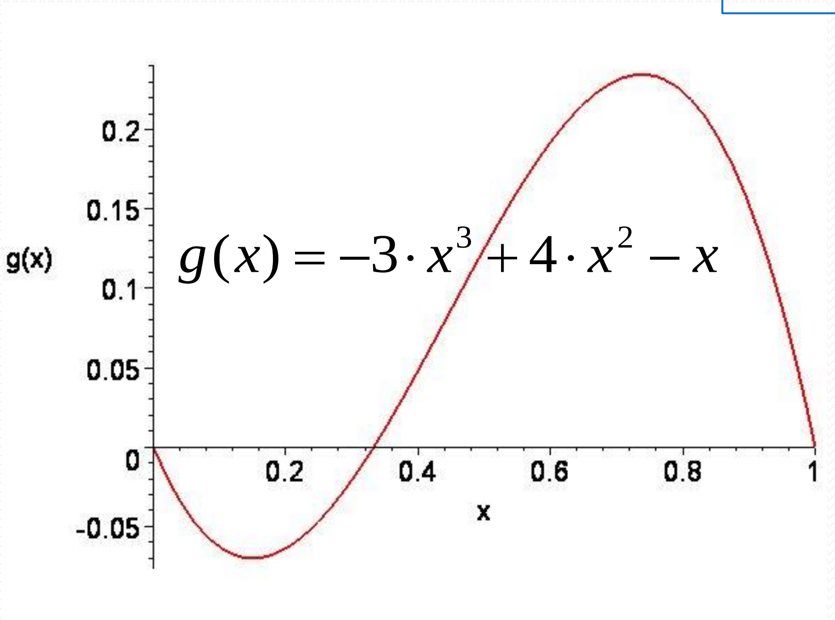
	Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2 , -2)
Keine Kugel	(-2, 2)	(3 , 3)

Die Differentialgleichung der Replikatordynamik für das zweite Beispiel lautet:

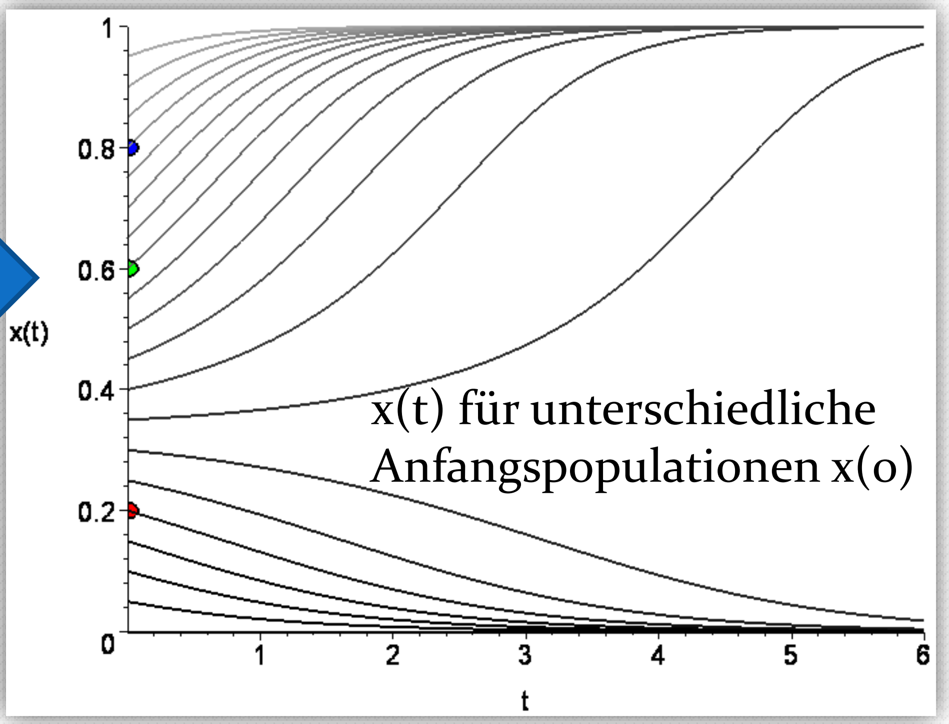
$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t)) = -3\cdot(x(t))^3 + 4\cdot(x(t))^2 - x(t)$$

$\boxed{\text{Zwei ESSs : (x=1 und x=0)}}$

Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler abhängig vom Anfangswert zu einem der beiden reinen Nash-Gleichgewichte (x=1 oder x=0).



Beispiel 3:
g(x)=g(x(t)) im Bereich [0,1] dargestellt



Lösen des evolutionären Spiels mit Maple

(Vorlage2.mw)

```
> restart:
  with(LinearAlgebra):
  with(plots):
```

Definition der Auszahlunsmatrix für Spieler A (USA) im Spiel des Wettrüstens:

```
> D_A11:=1:
  D_A12:=4:
  D_A21:=0:
  D_A22:=2:
  D_A:=Matrix(2,2,[D_A11,D_A12,D_A21,D_A22]);
```

Da sich das Spiel um ein symmetrisches (2 Personen)–(2 Strategien) Spiel handelt, erhält man die Auszahlunsmatrix für Spieler B (Nord Korea) durch die transponierte Matrix des Spielers A:

```
> D_B:=Transpose(D_A);
```

Wir betrachten im folgenden die evolutionäre Erweiterung des Dilemma des Wettrüstens. Die Population bestehe aus den Entscheidungsträgern von vielen Ländern und zu jedem Zeitpunkt treffen sie erneut die Entscheidung "Aufrüsten" oder "Abrüsten". Die Differentialgleichung, die die zeitliche Entwicklung des Populationsvektors x(t) (Anteil der Länder die "Aufrüsten") beschreibt lautet:

```
> DGL:=diff(x(t),t)=simplify(((D_A11-D_A21)*(x(t)-x(t)^2) + (D_A12-D_A22)*(1-2*x(t)+x
  (t)^2))*x(t));
  g:=simplify(((D_A11-D_A21)*(x-x^2) + (D_A12-D_A22)*(1-2*x+x^2))*x);
```

Die die zeitliche Entwicklung bestimmende Funktion g(x) besitzt das folgende Aussehen:

```
> plot(g, x=0..1);
```

Lösen des evolutionären Spiels mit Maple

(Vorlage2.mw)

x(t), der Anteil der Spieler (Länder) die zum Zeitpunkt t die Strategie 1 ("Aufrüsten") spielen , hängt neben der Funktion g(x) von dem Anfangswert x(t=0) ab.Setzt man z.B. x(t=0)=0.1 (entspricht einer Anfangspopulation von 10% der Länder rüstet auf und 90% rüstet ab) so kann man die Differentialgleichung analytisch Lösen (nicht immer möglich):

```
> LoesDGL:=simplify(dsolve({DGL,x(0)=0.1}));
```

Darstellen der Lösung:

```
> plot(rhs(LoesDGL),t=0..4);
```

Ausgabe des Wertes zu einer festen Zeit (z.B. t=2)

```
> evalf(subs({t=2},rhs(LoesDGL)));
```

Falls eine analytische Lösung nicht möglich ist kann man wie folgt die DGL numerisch lösen und grafisch darstellen:

```
> LoesDGL:=dsolve({DGL,x(0)=0.1},x(t),type=numeric):
  odeplot(LoesDGL,[t,x(t)],0..4);
```

Ausgabe des Wertes zu einer festen Zeit (z.B. t=2)

```
> LoesDGL(2);
```

Python mit Matplotlib: http://matplotlib.org/

matplotlib

Version 3.0.0

home | examples | tutorials | API | docs »

Matplotlib is a Python 2D plotting library which produces publication quality figures in a variety of hardcopy formats and interactive environments across platforms. Matplotlib can be used in Python scripts, the Python and IPython shells, the Jupyter notebook, web application servers, and four graphical user interface toolkits.

Matplotlib tries to make easy things easy and hard things possible. You can generate plots, histograms, power spectra, bar charts, errorcharts, scatterplots, etc., with just a few lines of code. For examples, see the sample plots and thumbnail gallery.

For simple plotting the `pyplot` module provides a MATLAB-like interface, particularly when combined with IPython. For the power user, you have full control of line styles, font properties, axes properties, etc, via an object oriented interface or via a set of functions familiar to MATLAB users.

Installation

Visit the Matplotlib installation instructions.

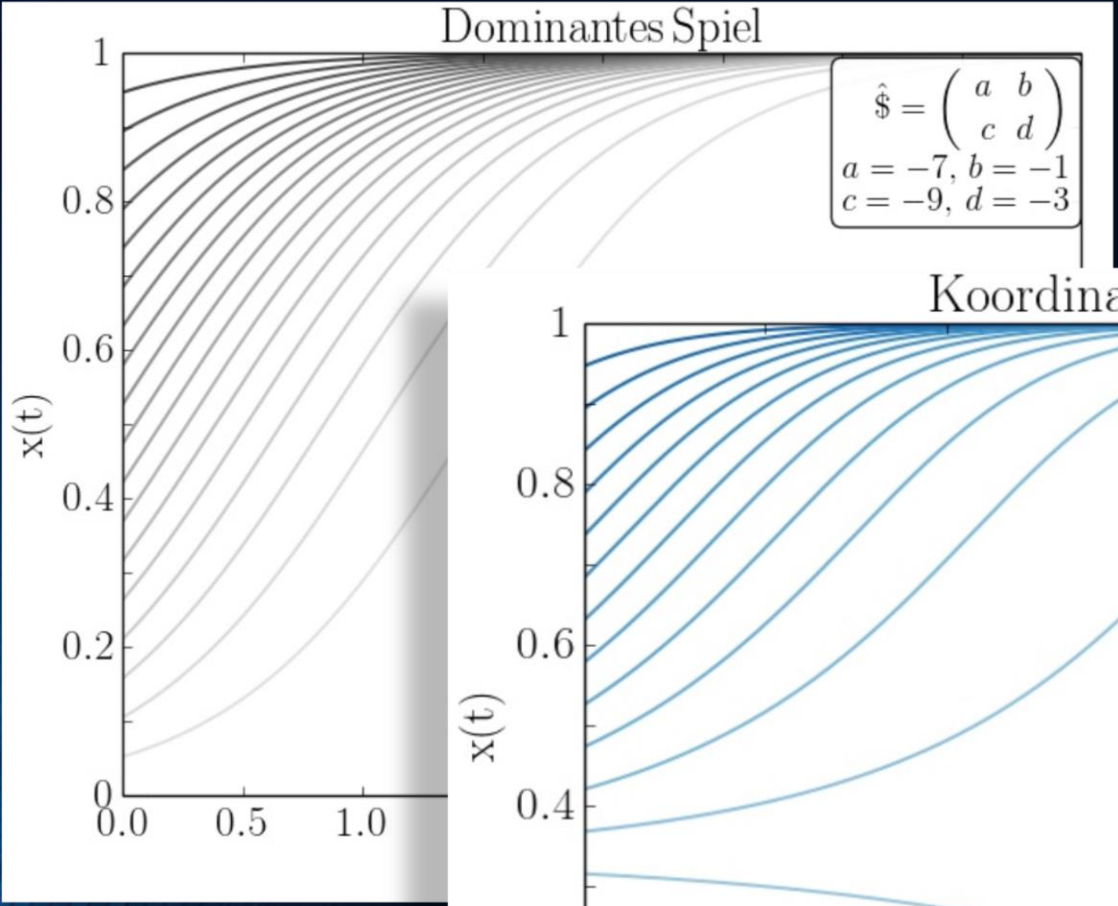
Lösen des evolutionären Spiels mit Python

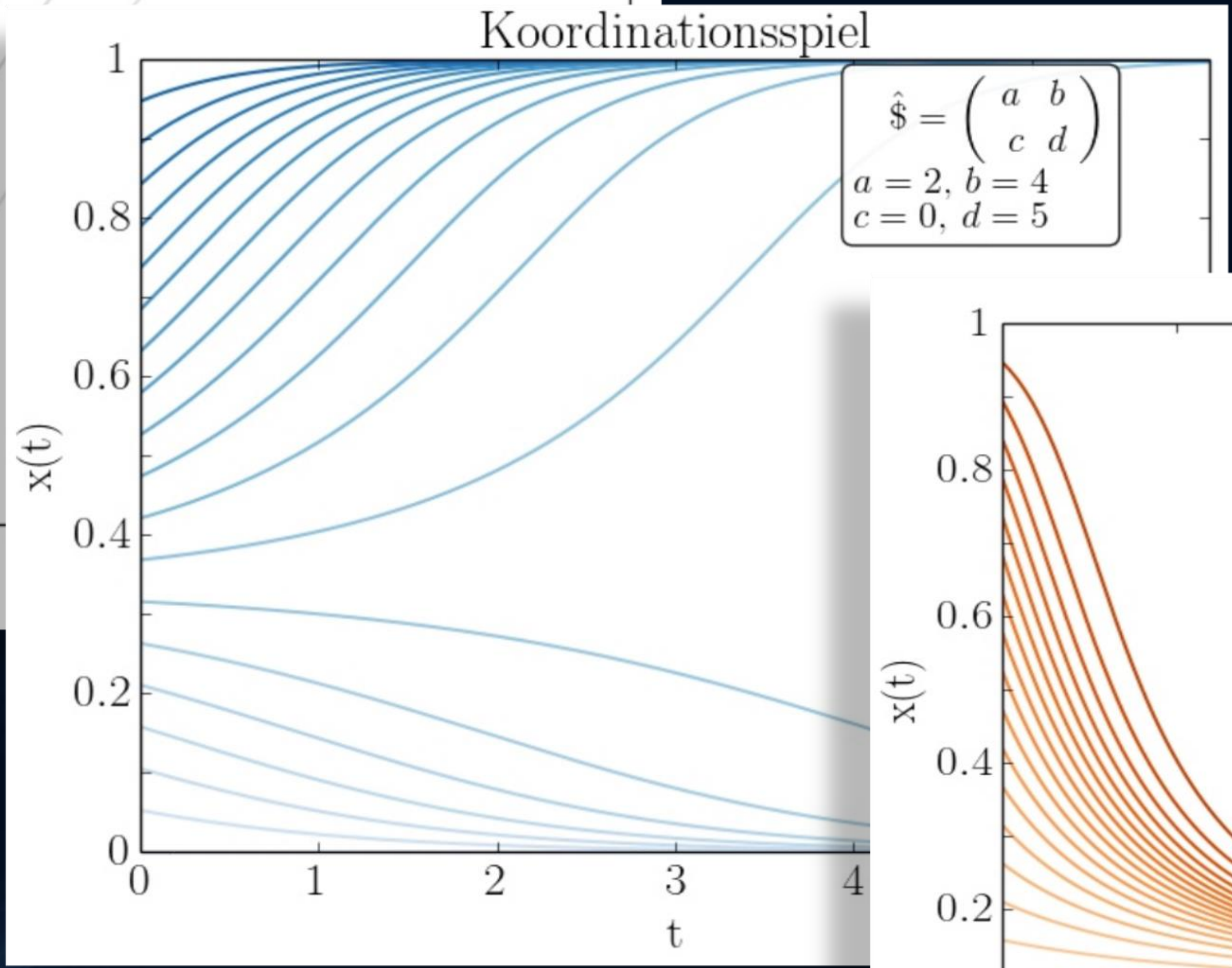
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
params = {
    'text.usetex'       : True,
    'axes.labelsize'   : 20,
    'xtick.labelsize' : 20,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)

# Definition der Funktion g
def g(x,a,b,c,d):
  g=((a-c)*(x-x*x) + (b-d)*(1-2*x+x*x))*x
  return g

#Festlegung der Auszahlungsmatrix des symmetrischen (2x2)-Spiels
a=2
b=4
c=0
d=5
#End(zeit)punkt, Anzahl der Zeitschritte
tend=6
numpoints=500
#Anfangswert der Population
x0=0.4
```

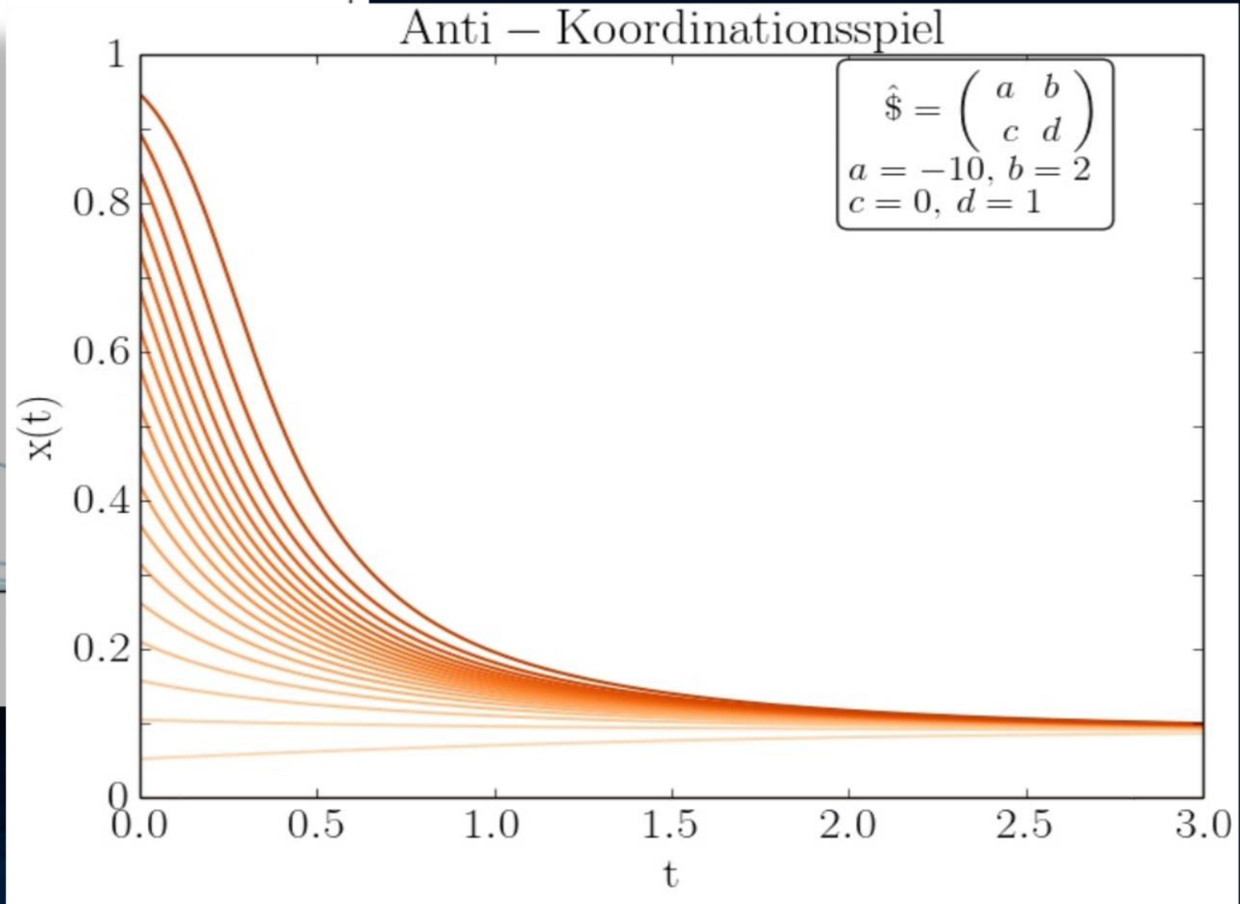
Lösen des evolutionären Spiels mit Python

```python
#Loesen der DGL
Loes=np.empty([numpoints,2])
t=np.linspace(0,tend,numpoints)
dt=t[1]-t[0]
Loes[0].flat[0] = t[0]
Loes[0].flat[1] = x0
i = 1
while i < len(Loes):
    Loes[i].flat[0] = t[i]
    dx=g(Loes[i-1,1],a,b,c,d)*dt
    Loes[i].flat[1] = Loes[i-1,1] + dx
    i = i + 1

#Plotten des Bildes
plt.plot(Loes[:,0],Loes[:,1],c="black", linewidth=1.5, linestyle='-')

# Achsenbeschriftungen usw.
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel(r"$\rm x(t)$")
plt.xlabel(r"$\rm t$")

#Speichern des Bildes als .jpg--Datei
saveFig="./evol.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=100,bbox_inches="tight",pad_inches=0.05,format="jpg")
plt.show()
```

Lösen des evolutionären Spiels mit Python Version evol1.py





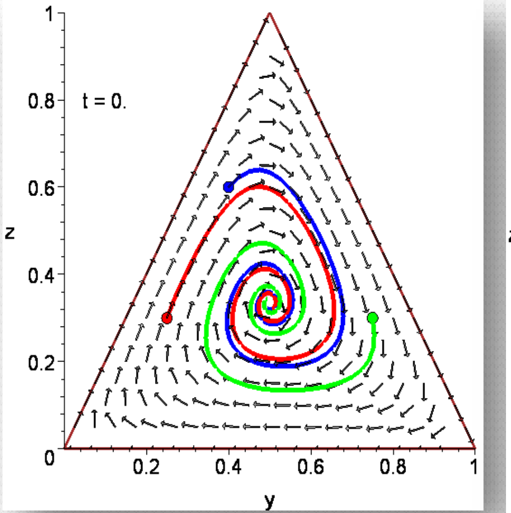


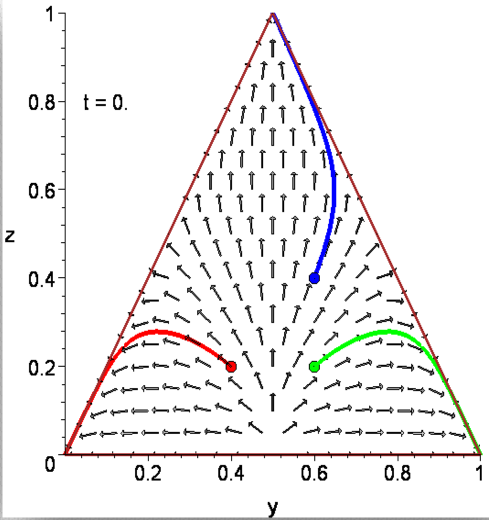
Weitere Arten von Spieltypen

(Ausblick: Vorlesungsteil 5)

- **Mehr als zwei Strategien:**

Schon bei drei Strategien können 19 unterschiedliche Spielklassen unterschieden werden.





- **Bimatrix Spiele**

Unsymmetrische (2x2) Spiele:

Setzt sich die Population aus zwei unterschiedlichen Spielergruppen (x(t) und y(t)) zusammen, so spricht man von Bimatrix Spielen.