

Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
15.11.2019*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

5. Vorlesung

Nimmt man zusätzlich ein symmetrisches Spiel an ($\hat{\$} := \hat{\$}^A = \left(\hat{\$}^B \right)^T$), in welchem die

Auszahlungswerte (Fitness-Werte) der Populationsgruppen gleich sind, so kann man die beiden Gruppen von ihrer mathematischen Struktur her als ununterscheidbare Spielergruppen mit identischen Populationsvektoren $x(t) = y(t)$ annehmen. Die Differentialgleichung schreibt sich dann wie folgt:

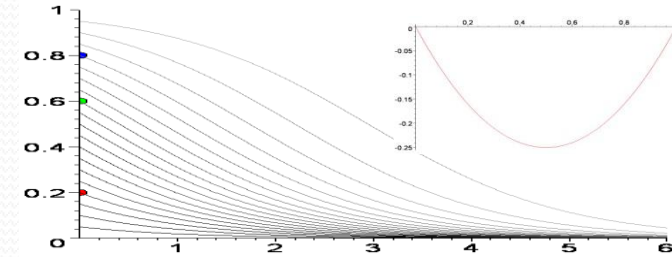
$$\frac{dx(t)}{dt} = [(\$_{11} - \$_{21})(x - x^2) + (\$_{12} - \$_{22})(1 - 2x + x^2)] x(t) =: g(x) \quad (3)$$

Verallgemeinert man diese Differentialgleichung wieder auf mehr als zwei Strategien, so kann man abkürzend die folgende Formulierung schreiben:

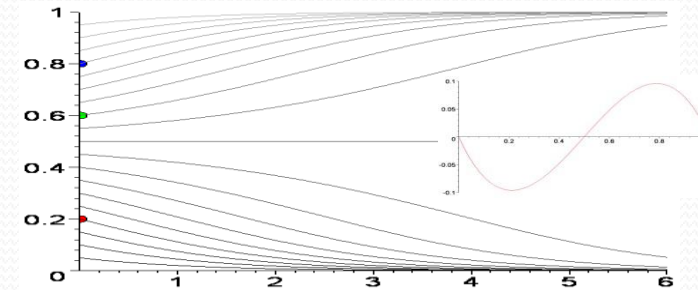
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\hat{\$} \vec{x} - \vec{x} \left(\hat{\$} \vec{x} \right) \right) \vec{x}$$

Klassifizierung von evolutionären, symmetrischen (2x2)-Spielen

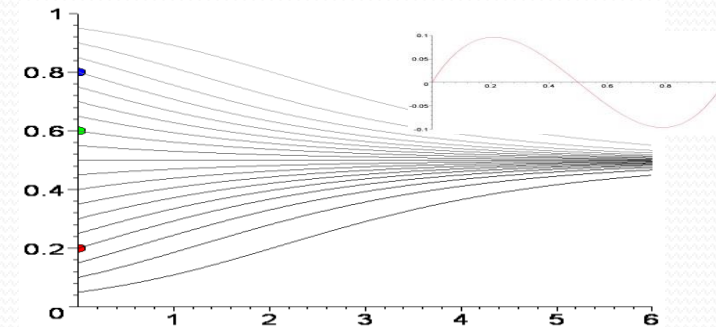
- **Dominante Spiele**
(2. Strategie dominiert 1.Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=0$.



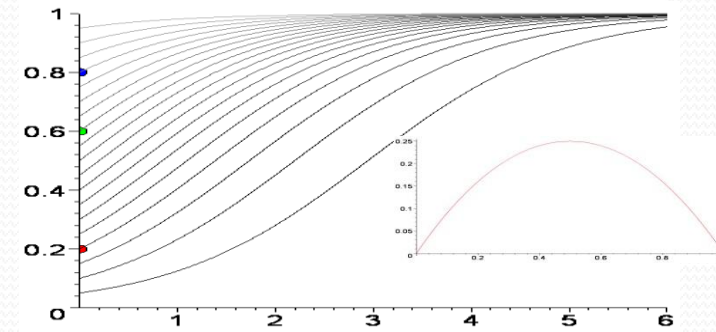
- **Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte und zwei reine ESS, die abhängig von der Anfangsbedingung realisiert werden.



- **Anti - Koordinationsspiele**
Es existieren drei Nash - Gleichgewichte aber nur eine gemischte ESS, die unabhängig von der Anfangsbedingung realisiert wird.



- **Dominante Spiele**
(1. Strategie dominiert 2.Strategie)
Es existiert ein Nash - Gleichgewicht, welches die anderen Strategien dominiert. ESS bei $x=1$.



Evolutionär Stabile Strategien

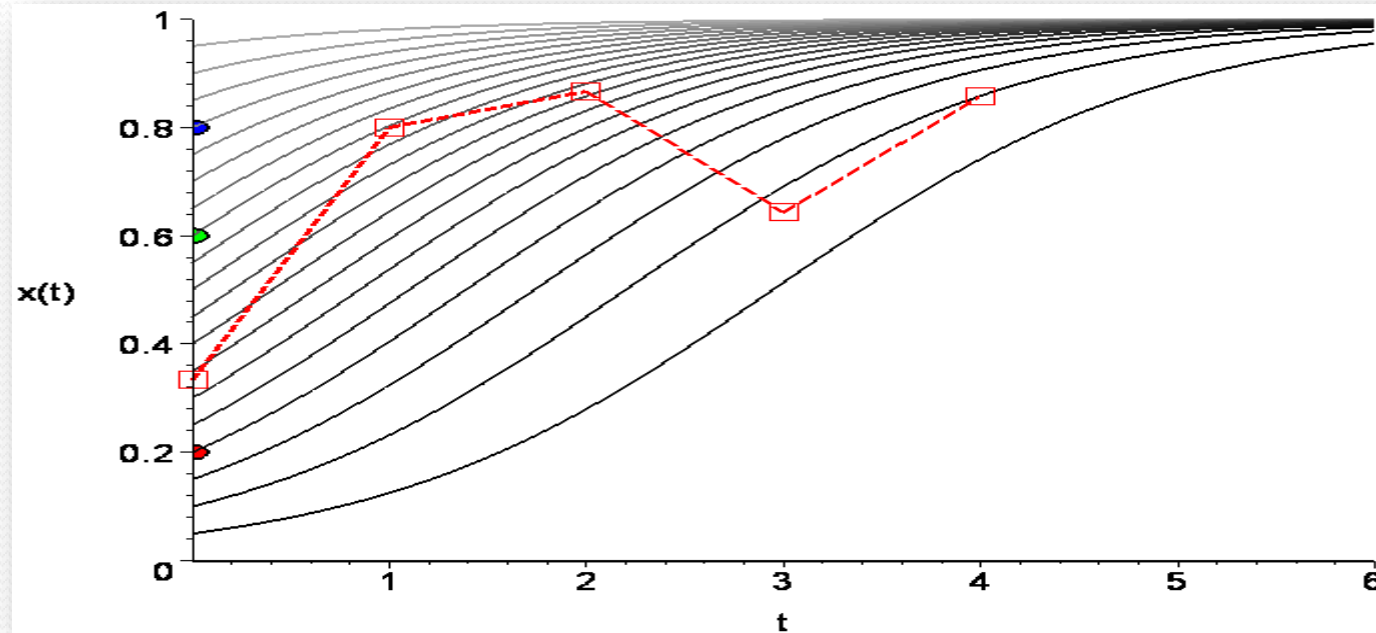
- Betrachten Sie die folgenden Beispiele:

Beispiel 1:			Beispiel 2:			Beispiel 3:		
	Kugel	Keine Kugel		Kugel	Keine Kugel		Kugel	Keine Kugel
Kugel	(0, 0)	(2, -1)	Kugel	(-1, -1)	(3, 0)	Kugel	(0, 0)	(2, -2)
Keine Kugel	(-1, 2)	(1, 1)	Keine Kugel	(0, 3)	(1, 1)	Keine Kugel	(-2, 2)	(3, 3)

1. Geben Sie mögliche dominante Strategien und Nash-Gleichgewichte der Spiele an.
2. Bestimmen und zeichnen Sie die Funktion $g(x)$ für alle drei Spiele?
3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $g(x)$ ($g(x)=0$).
4. Geben Sie die evolutionär stabilen Strategien der Spiele an?

Theorie ↔ Experiment

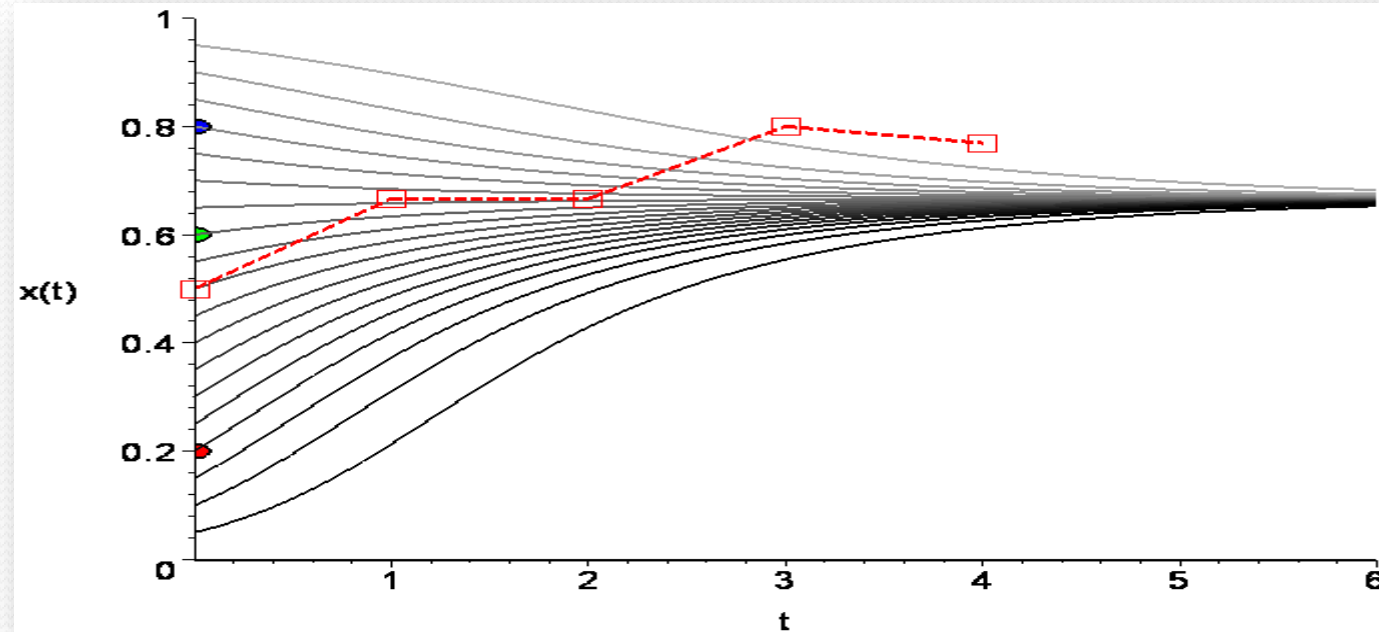
Experimentelle Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 1



Das erste Spiel besitzt nur ein Nash-Gleichgewicht das gleichzeitig die dominante Strategie des Spiels ist (Kugel, Kugel). Da es sich bei diesem Beispiel um ein dominantes, symmetrisches (2x2)-Spiel handelt und die Funktion $g(x)$ im relevanten Bereich ($x=[0,1]$) immer größer-gleich Null ist, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer gegen die evolutionär stabile Strategie $x=1$. Die klassische evolutionäre Spieltheorie sagt demnach voraus, dass die Spieler innerhalb der betrachteten Population nach einer gewissen Zeit maßgeblich die Strategie Kugel wählen ($x=1$). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 1.

Theorie ↔ Experiment

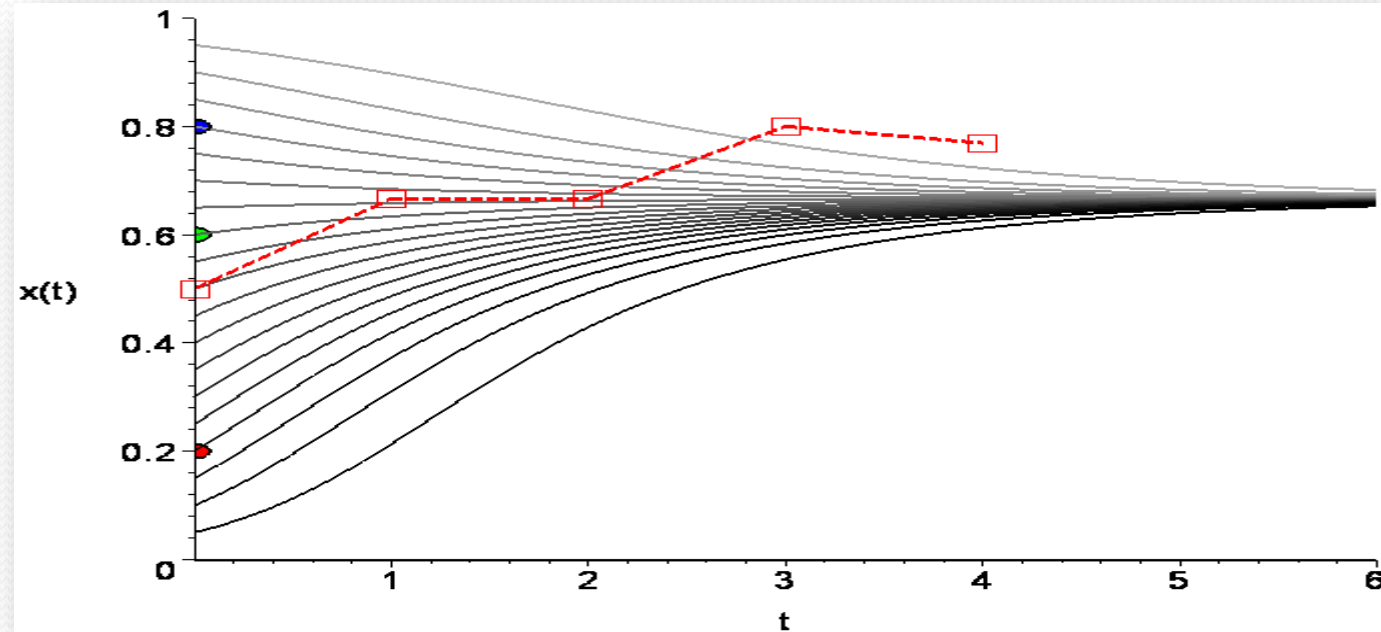
Experimentelle Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 2



Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ((K, KK) und (KK, K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht (der einzigen evolutionär stabilen Strategie des Spiels), was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion $g(x)$ ist ($x=0.67$). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 2.

Theorie ↔ Experiment

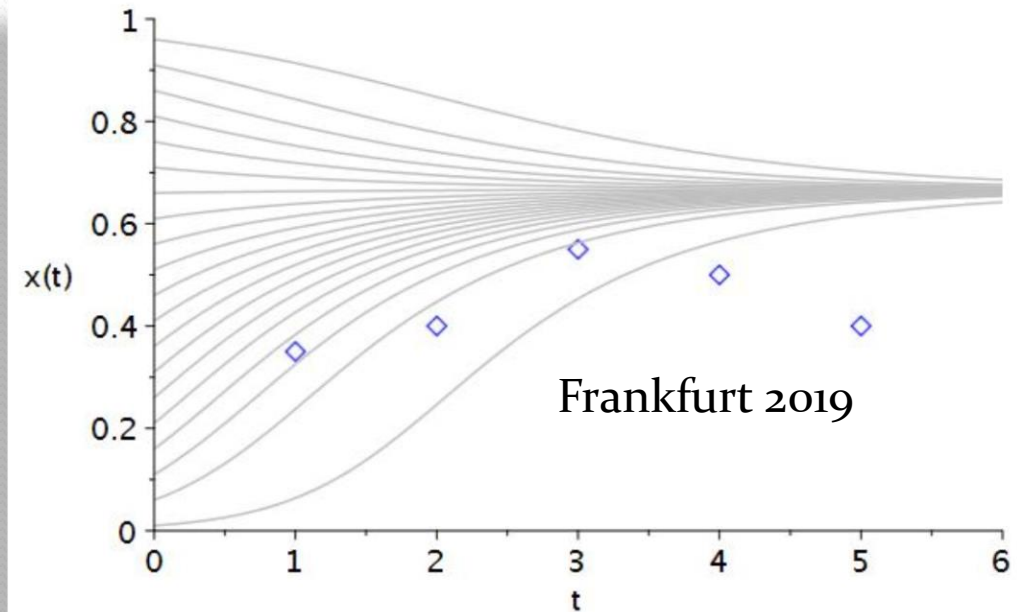
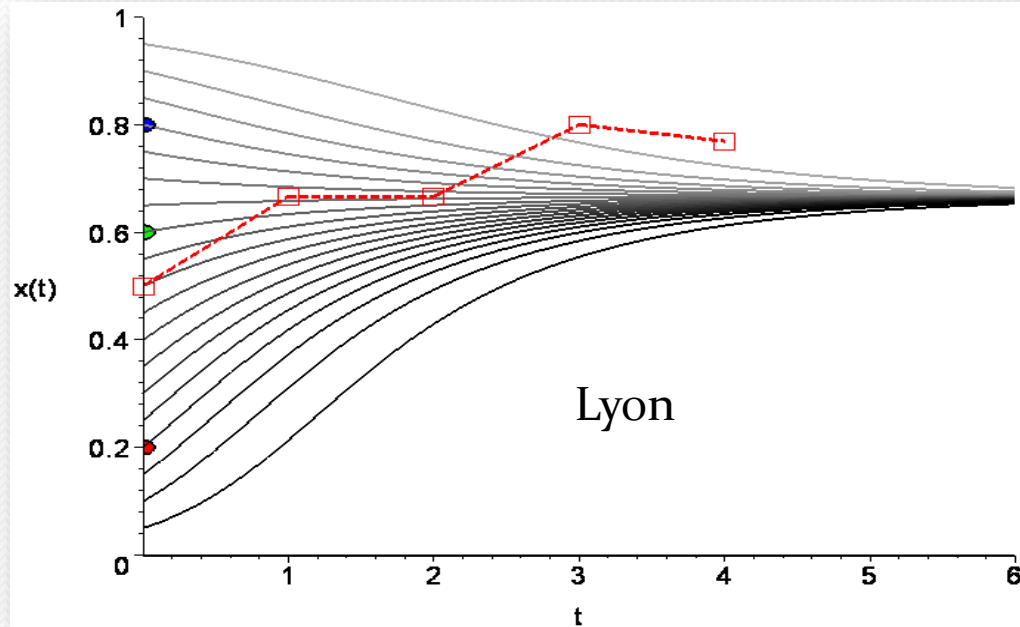
Experimentelle Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 2



Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ((K, KK) und (KK, K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht (der einzigen evolutionär stabilen Strategie des Spiels), was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion $g(x)$ ist ($x=0.67$). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 2.

Theorie ↔ Experiment

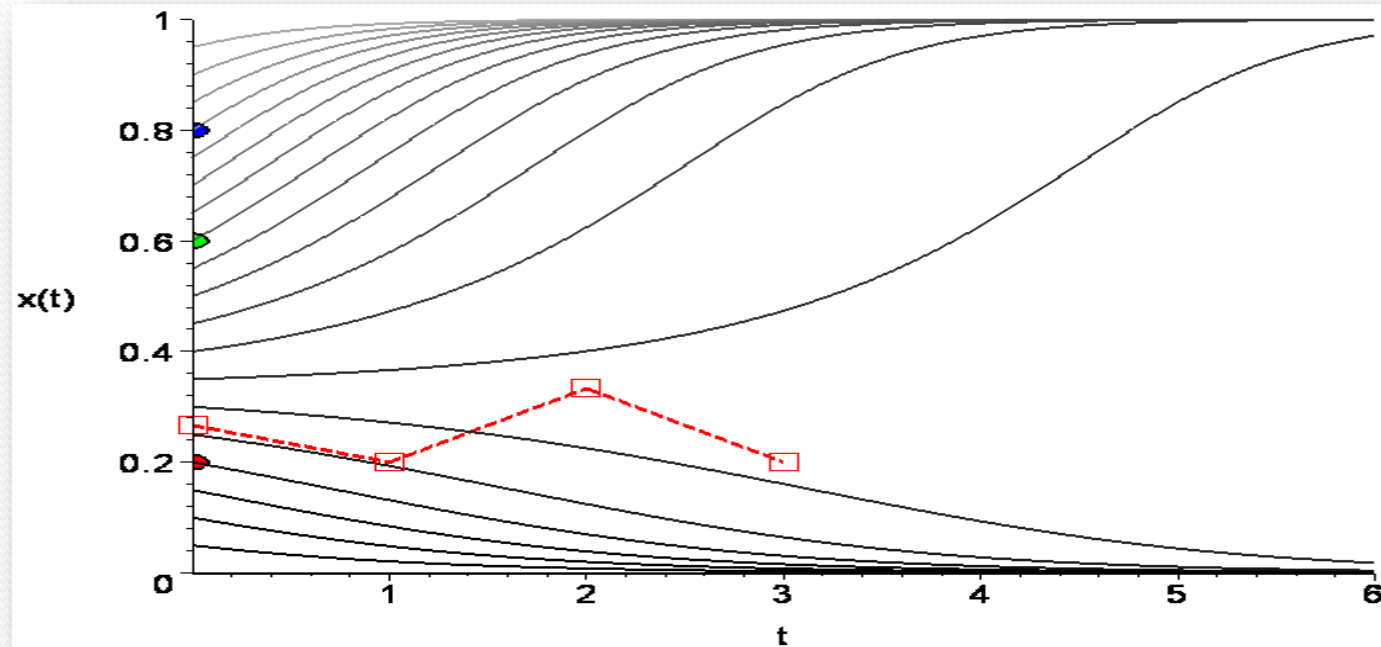
Experimentelle Ergebnisse des Beispiels 2



Das zweite Spiel besitzt keine dominante Strategie, aber zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ((K, KK) und (KK, K)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.67 K , 0.33 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Anti-Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler unabhängig vom Anfangswert immer zu dem gemischten Nash-Gleichgewicht (der einzigen evolutionär stabilen Strategie des Spiels), was identisch mit der mittleren Nullstelle der Funktion $g(x)$ ist ($x=0.67$). Die rote Kurve in der linken obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 2. Die blauen Punkte in der rechten obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des in Frankfurt gespielten Beispiels 2 (zum Vergleich bitte die blauen Punkte um -1 auf der Zeitachse verschieben).

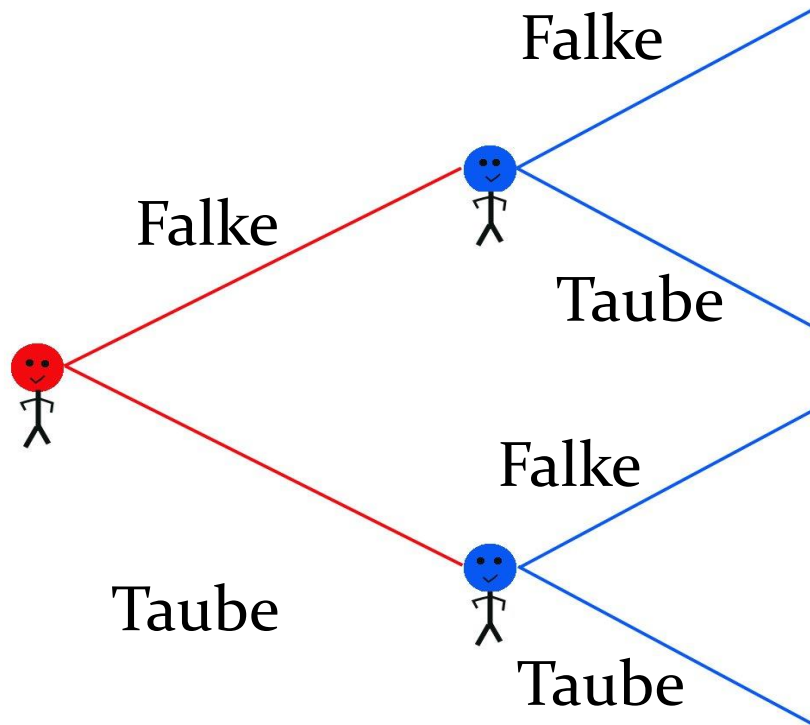
Theorie ↔ Experiment

Experimentelle Ergebnisse des in Lyon gespielten Beispiels 3



Das dritte Spiel besitzt ebenfalls keine dominante Strategie, aber zwei symmetrische Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien ((K,K) und (KK,KK)) und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht (0.33 K , 0.67 KK). Da es sich bei diesem Beispiel um ein symmetrisches Koordinationsspiel handelt, strebt der Populationsanteil der Kugel-Spieler abhängig vom Anfangswert zu einem der beiden reinen Nash-Gleichgewichte ($x=1$ oder $x=0$). Die klassische evolutionäre Spieltheorie sagt demnach voraus, dass es zwei evolutionär stabile Strategien gibt ($x=1$ oder $x=0$). Die rote Kurve in der obigen Abbildung zeigt die experimentellen Ergebnisse des im Vorlesungsteil 4 gespielten Beispiels 3.

Das Falke-Taube Spiel



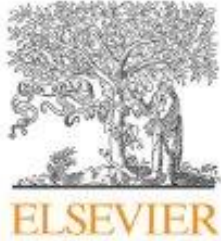
	Falke	Taube
Falke	$\left(\frac{(p_h - d)}{2}, \frac{(p_h - d)}{2} \right)$	$(p_h, 0)$
Taube	$(0, p_h)$	$\left(\frac{p_m}{2}, \frac{p_m}{2} \right)$

Das Falke-Taube-Spiel modelliert ursprünglich den Wettkampf um eine Ressource (z.B. Nistplatz). Das Spiel wird jedoch oft auch auf andere Systeme angewendet, wobei die Taube-Strategie eine friedliche Verhaltensweise symbolisiert und die Falke-Strategie ein aggressives Verhalten. Im folgenden Artikel wird das Falke-Taube-Spiel auf den Immobilien-Investmentmarkt angewendet (Spieler-Population: Investmentbanker).

Parameter setting	Risk of destabilisation	d	p_h	p_m
P1	LOW	6	5	3
P2	MEDIUM	10	5	3
P3	HIGH	20	5	3

TABLE II: Parameters of the three different sets of the underlying payoff matrix used to model the investment market of the Hawk-Dove game.

TABLE I: Payoff matrix for investment bankers A and B within the Hawk-Dove game. The parameters are defined as follows: p_h : high selling premium, d : disutility resulting from fighting and p_m : moderate selling premium.



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa



Doves and hawks in economics revisited: An evolutionary quantum game theory based analysis of financial crises

Matthias Hanauske^{a,*}, Jennifer Kunz^b, Steffen Bernius^a, Wolfgang König^c

^a Institute of Information Systems, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

^b Chair of Controlling & Auditing, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

^c House of Finance, Goethe-University, Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt/Main, Germany

ARTICLE INFO

Article history:

Received 14 April 2009

Received in revised form 22 April 2010

Available online 15 June 2010

Keywords:

Evolutionary game theory

Quantum game theory

Hawk–dove game

Financial crisis

ABSTRACT

The last financial and economic crisis demonstrated the dysfunctional long-term effects of aggressive behaviour in financial markets. Yet, evolutionary game theory predicts that under the condition of strategic dependence a certain degree of aggressive behaviour remains within a given population of agents. However, as a consequence of the financial crisis, it would be desirable to change the “rules of the game” in a way that prevents the occurrence of any aggressive behaviour and thereby also the danger of market crashes. The paper picks up this aspect. Through the extension of the well-known hawk–dove game by a quantum approach, we can show that dependent on entanglement, evolutionary stable strategies also can emerge, which are not predicted by the classical evolutionary game theory and where the total economic population uses a non-aggressive quantum strategy.

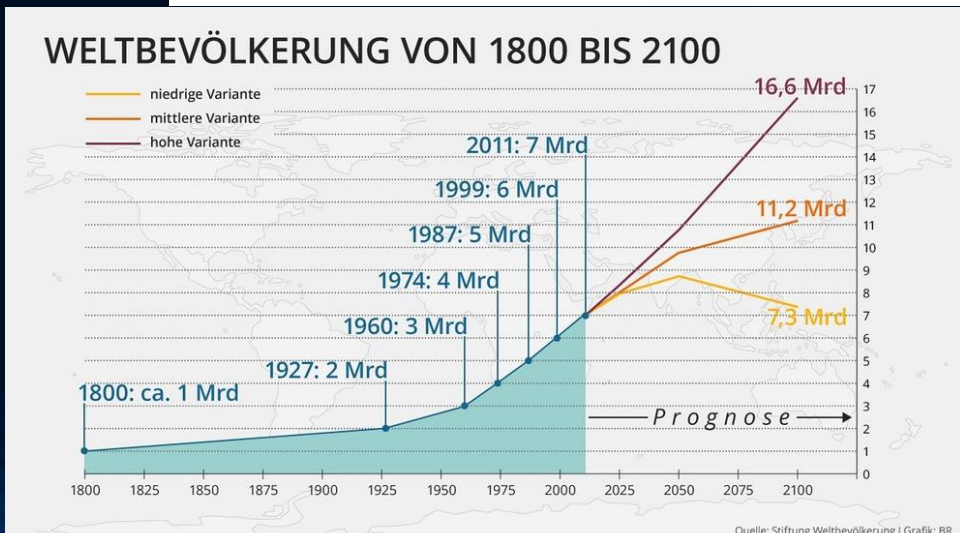
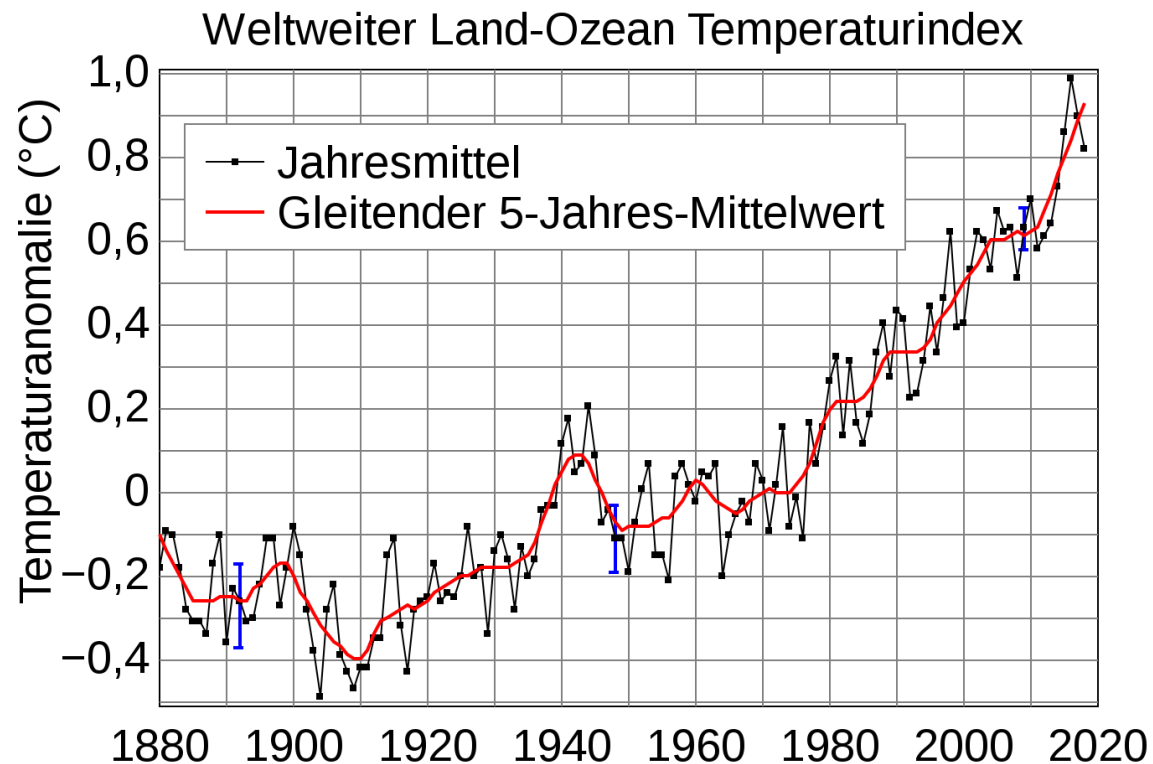
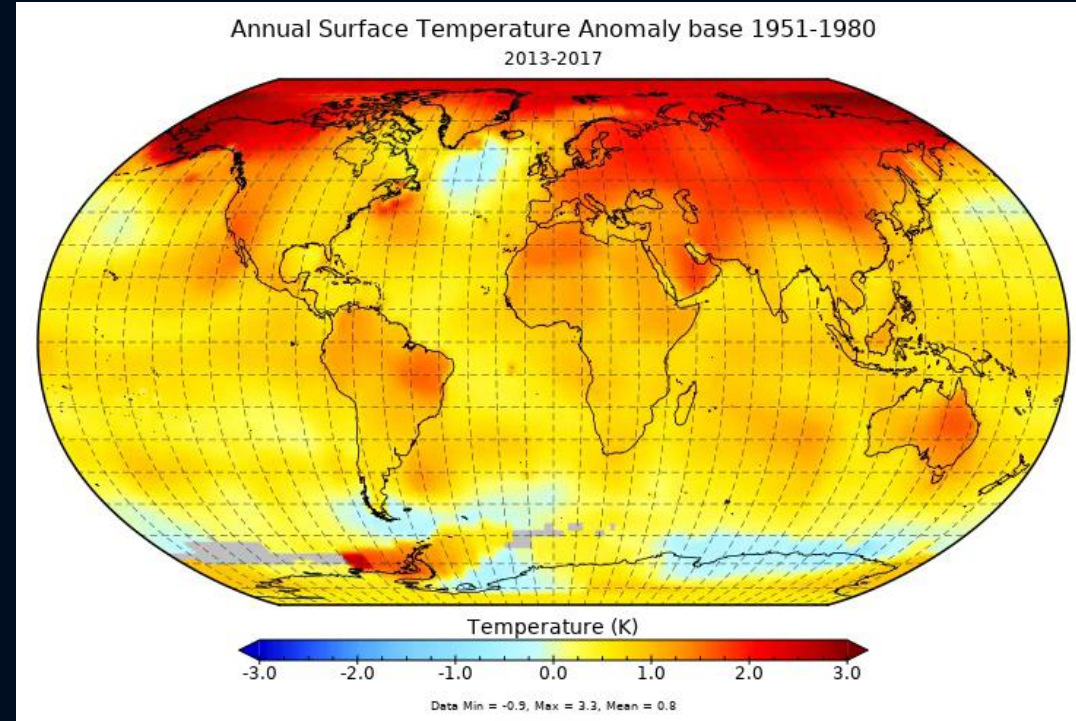
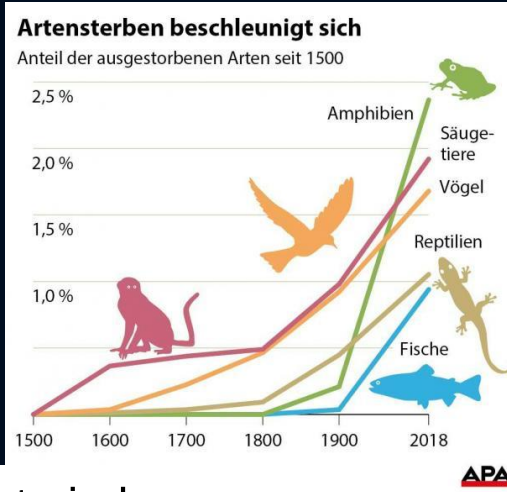
© 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.

Wie entwickelt sich der Populationsvektor $x(t)$ der Investmentbanker im Laufe der Zeit?

Benutzen Sie hierbei die drei unterschiedlichen Parametersets der vorigen Folie.

Evolutionäre Irrwege einer Population

Es gibt Spielkonstellationen in denen eine Population von Akteuren zu einem dilemma-artigen Verhalten tendiert, welches global betrachtet nicht-optimal und unter Umständen sogar, für die eigene und andere Spezies, existenziell bedrohend sein kann.



A game-theoretic approach of the evolutionary paths of carbon dioxide consumers under social/moral pressure

The behaviour of each human, the travel behavior, eating habits and the unrestrained consumption in general has created a dangerous environmental condition and global warming could threaten our species existentially. Humanity is trapped in a dilemma-like situation.

The underlying CO₂-consumers game has been constructed in such a way that each reader can select a certain individual subgame relevant for his/her personal contribution to the climate crisis. Every day, each human is confronted several times with climate relevant decisions; e.g. daily strategic decisions like "Driving with the car to work or taking the public transport", and "Taking the elevator or the stairs" or recurrent annual decisions like "Taking the plane or the train to the next holiday" are examples of such decisions that effect the carbon dioxide emission and as a result the evolution of the climate crisis.

For details see a draft of a new paper:
<http://fias.uni-frankfurt.de/~hاناuske/new/tmp/paper.pdf>

A game-theoretic approach of the evolutionary paths of carbon dioxide consumers under social/moral pressure

	H	L
H	$(B_H - \beta d, B_H - \beta d)$	$(B_H - d, B_L + \alpha d)$
L	$(B_L + \alpha d, B_H - d)$	$(B_L + \gamma d, B_L + \gamma d)$

The disutility parameter d models a potential moral/social pressure which in principle can change over time. The impact of a sudden increase of the value of this disutility can change the game class of the underlying game.

Wie entwickelt sich der Populationsvektor $x(t)$? Welche Spielklassen sind möglich?

For details see a draft of a new paper:
<http://fias.uni-frankfurt.de/~hاناuske/new/tmp/paper.pdf>

Within the evolutionary extension of the CO₂-consumers game, each player daily selects one game partner out of his/her social neighborhood and discusses the two options of the specific subgame and fixes his/her individual choice for the next day. The Table summarizes the payoff structure of the underlying (2×2) game. In contrast to common payoff matrices of games, we have focused on a non-monetary utility formulation. B_H, B_L : quantifies the non-monetary benefit a person gains in the case of choosing the strategy H (L) and as a result emitting a high (low) amount of carbon dioxide.

Das Spiel der Geldpolitik

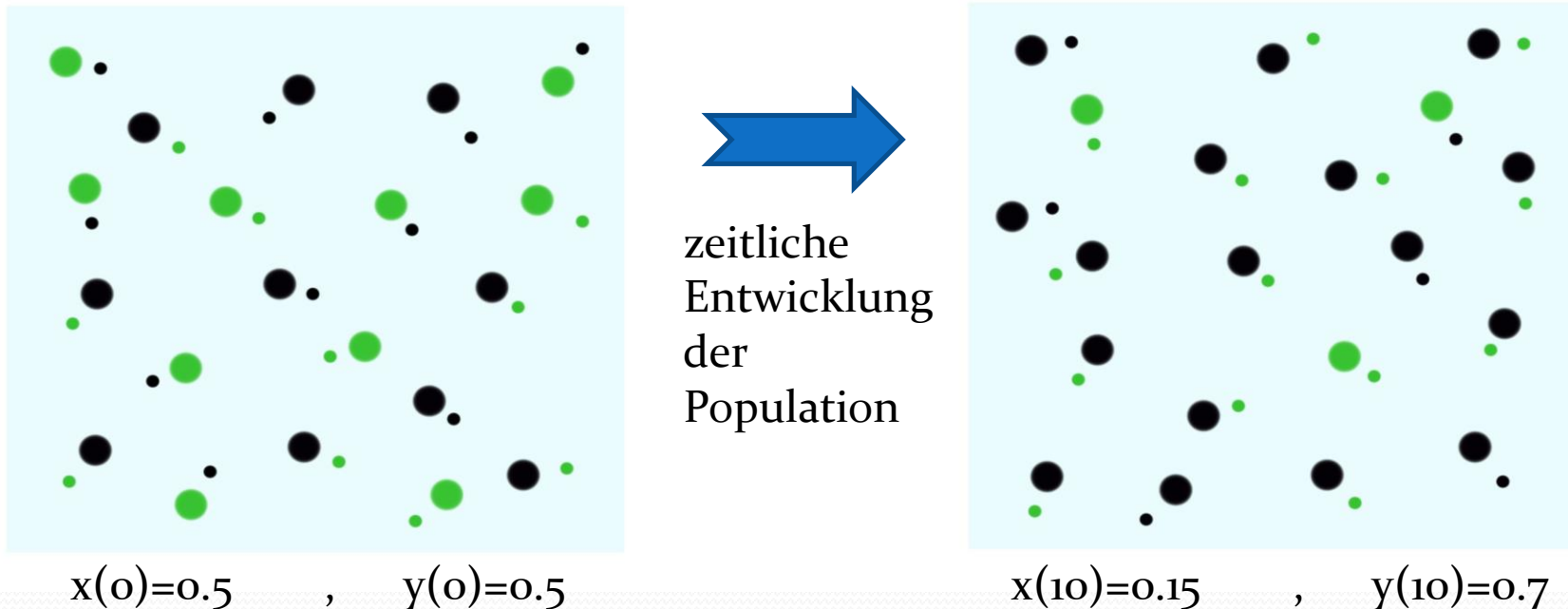
Fiskalbehörde Geldbehörde	Keine neuen Schulden	Weiter Schulden machen
Finanzierung des Staatsdefizits über inflationäre Geldschöpfung	(3, 3)	(2, 4)
Stabile Geldpolitik	(4, 2)	(0, 0)

Eine nationale, oder auch europäische Geldpolitik ist stets in einem fiskalpolitischen Diskurs. Die Geldbehörde (Zentralbank), die z.B. durch eine Verknappung der Geldmenge (kontraktive/restriktive) Geldpolitik bzw. eine Ausdehnung der Geldmenge (expansive Geldpolitik), eine stabile bzw. un stabile Strategie wählen kann, ist bestrebt ihre geldpolitischen Ziele (z.B. Preisniveaustabilität) durchzusetzen. Sowohl die Entscheidungsträger der Geldpolitik als auch die Politiker, welche eine fiskalpolitische Entscheidungen zu treffen haben, befinden sich in einem wiederholten Spiel. Laut Gerhard Illing (Theorie der Geldpolitik, Kapitel 10.2) ist das gesamte geldpolitische Spiel, in erster Näherung, wie in der obigen Spielmatrix zu approximieren. Zusätzlich wirkt das globale Finanznetzwerk, zusammengesetzt (unter anderem) aus einer Vielzahl von Spekulanten, auf die Regierung ein, indem sie durch spekulativen Devisenhandel Währungskurse attackieren. Näheres siehe: Hochschul-Sommerkurses 2011, „Money, Money, Money: Deutschlands Wirtschafts- und Finanzleben“ (https://itp.uni-frankfurt.de/~hanauske/new/HSK_2011/index.html)

Evolutionäre Spieltheorie

Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele) zweier Populationen

Bei unsymmetrischen (2x2)-Spiele besteht die zugrundeliegende Population aus zwei Gruppen (hier große und kleine Kreise). Aufgrund der unterschiedlichen Auszahlungsmatrizen können die Populationsgruppen sich in ihren Strategieentscheidungen (**grün**, schwarz) unterschiedlich entwickeln.



Mögliche Strategien: (**grün**, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.

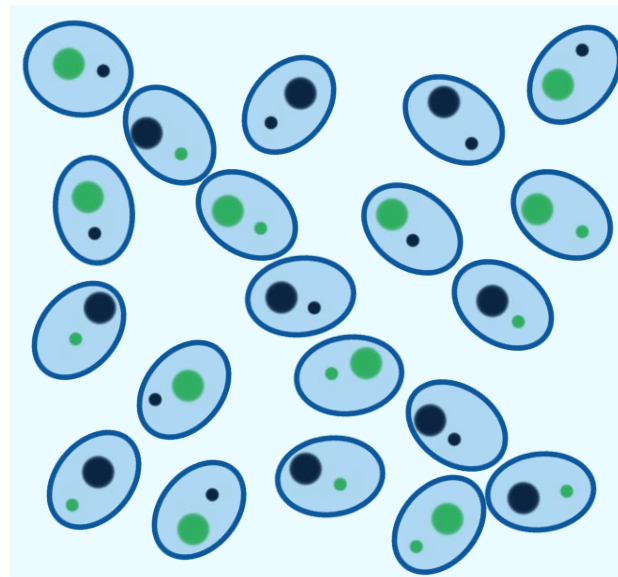
$x(t)$: Anteil der großen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „**grün**“ spielen.

$y(t)$: Anteil der kleinen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „**grün**“ spielen.

Evolutionäre Spieltheorie

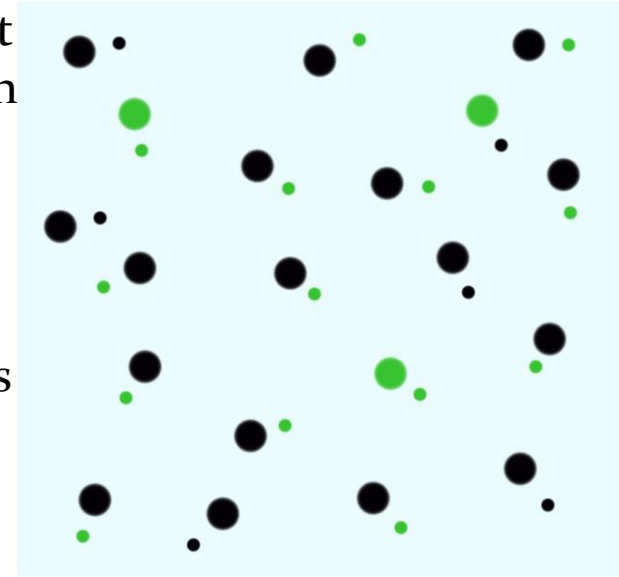
Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten gesamten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler mit unterschiedlichen Gruppenzugehörigkeiten zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner der anderen Gruppe wechseln.



$x(10)=0.5$, $y(10)=0.5$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt $t=0$ das erste Mal das Spiel. Es bilden sich stets Zweier-Gruppen aus großen und kleinen Kreisen.



$x(10)=0.15$, $y(10)=0.7$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die kleinen Spieler zunehmend attraktiver ($y(10)=0.7$), wohingegen sie für die großen Spieler zunehmend weniger attraktiv wird ($x(10)=0.15$).

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i^A(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A x_k^A(t) x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \quad (1) \\
\frac{dx_j^B(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B x_l^A(t) x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \dots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \dots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Wir beschränken uns im folgenden auf den 2-Strategien Fall ($m_A = m_B = 2$), lassen jedoch weiter eine Unsymmetrie der Auszahlungsmatrix zu. Die beiden Komponenten der zweidimensionalen gruppenspezifischen Populationsvektoren lassen sich dann, aufgrund ihrer Normalisierungsbedingung, auf eine Komponente reduzieren ($x_2^A = 1 - x_1^A$ und $x_2^B = 1 - x_1^B$). Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben (siehe z.B. [4], S:116 oder [3], S:69):

$$\frac{dx(t)}{dt} = [(\beta_{11}^A + \beta_{22}^A - \beta_{12}^A - \beta_{21}^A) y(t) + (\beta_{12}^A - \beta_{22}^A)] (x(t) - (x(t))^2) =: g_A(x, y) \quad (2)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = [(\beta_{11}^B + \beta_{22}^B - \beta_{12}^B - \beta_{21}^B) x(t) + (\beta_{12}^B - \beta_{22}^B)] (y(t) - (y(t))^2) =: g_B(x, y)$$

Beispiel 1:

Kampf der Geschlechter als evolutionäres Spiel

Das gekoppelte System von Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot (4 \cdot y(t) - 4 \cdot x(t) \cdot y(t) + 3 \cdot x(t) - 3)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \cdot (4 \cdot x(t) - 4 \cdot x(t) \cdot y(t) + y(t) - 1)$$

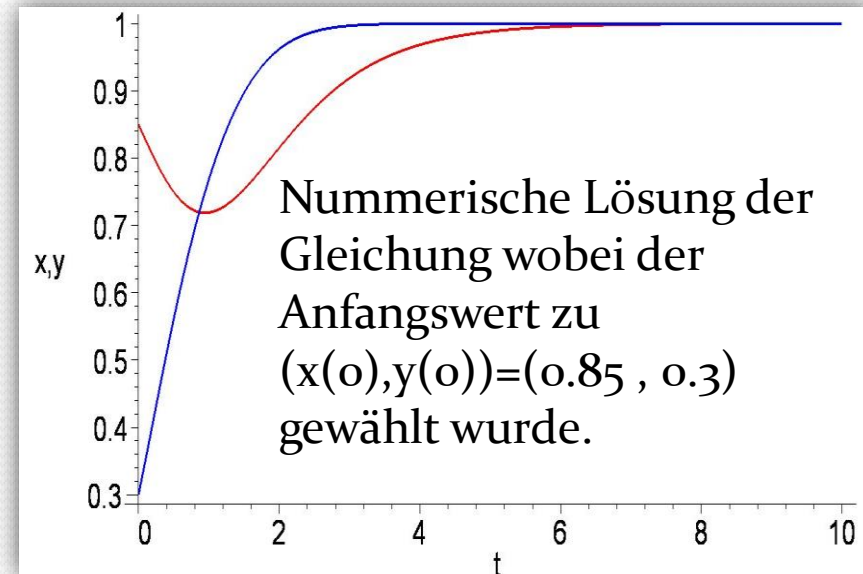
Die beiden Gruppen der Population sind Männer (A, $x(t)$) und Frauen (B, $y(t)$). Da nur zwei Strategien wählbar sind, lassen sich die jeweiligen Populationsanteile durch lediglich eine Größe ausdrücken ($x(t)$ und $y(t)$).

$$x(t) := x_1^A(t) \quad , \quad x_2^A(t) = 1 - x(t)$$

$$y(t) := x_1^B(t) \quad , \quad x_2^B(t) = 1 - y(t)$$

	Kino	Disko
Kino	(1, 3)	(0, 0)
Disko	(0, 0)	(3, 1)

Die Lösung der Gleichung erfolgt wiederum durch Integration bzw. kann mithilfe des Computers numerisch berechnet werden. Es muss in beiden Fällen ein fester Anfangswert $(x(0), y(0))$ gewählt werden.



Bi-Matrix Spiele

Gemischte Nash-Gleichgewichte

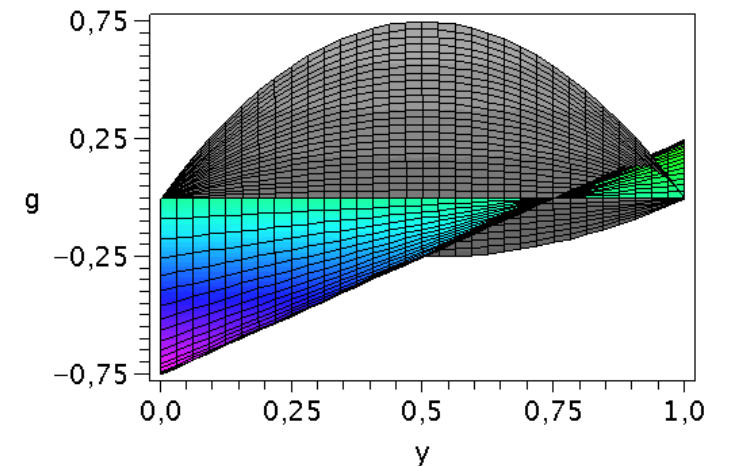
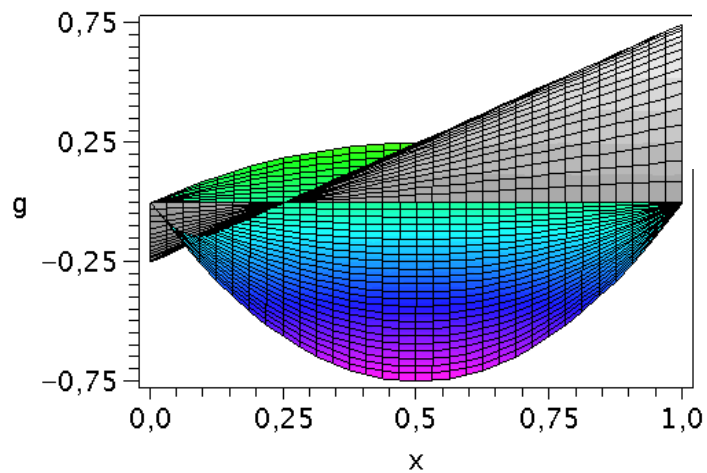
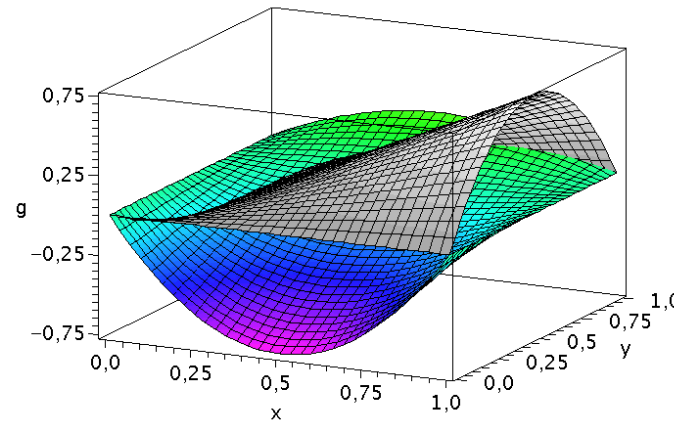
Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^A(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^A} \right|_{\tilde{s}^B = \tilde{s}^{B*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^A \in [0, 1] , \tilde{s}^{B*} \in]0, 1[$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\$}^B(\tilde{s}^A, \tilde{s}^B)}{\partial \tilde{s}^B} \right|_{\tilde{s}^A = \tilde{s}^{A*}} = 0 \quad \forall \tilde{s}^B \in [0, 1] , \tilde{s}^{A*} \in]0, 1[$$

Eigenschaften der Funktionen $g_A(x,y)$ und $g_B(x,y)$

Die das Bimatrix Spiel bestimmenden Funktionen $g_A(x,y)$ (farbige Fläche) und $g_B(x,y)$ (graue Fläche) sind in den unteren Abbildungen veranschaulicht. Beide Teilgruppenspiele gehören der Klasse der Koordinationsspiele an.



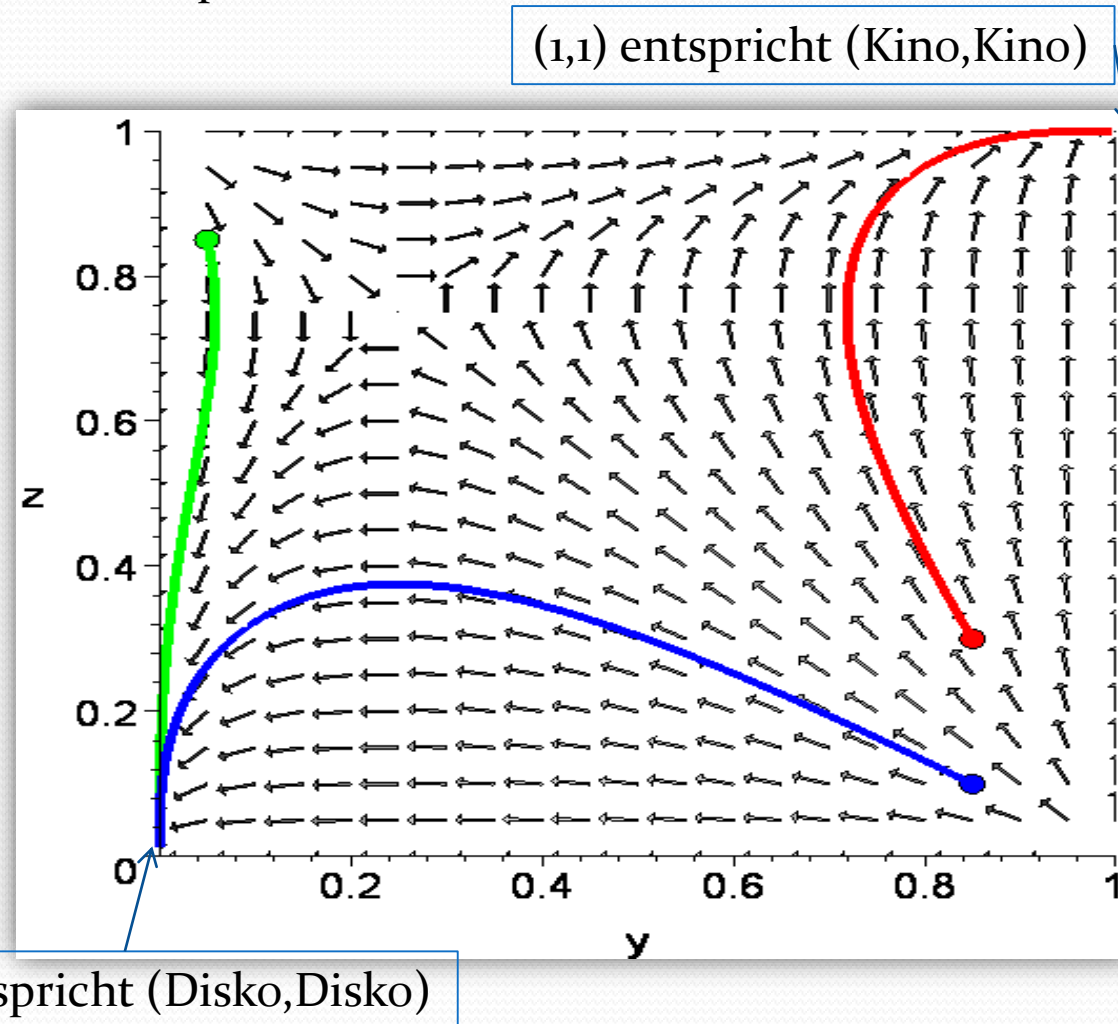
Beispiel 1:

Kampf der Geschlechter als evolutionäres Spiel

	Kino	Disko
Kino	(1, 3)	(0, 0)
Disko	(0, 0)	(3, 1)

Das „Kampf der Geschlechter“- Spiel gehört der Klasse der „Sattelpunktspiele“ (Saddle Class) an. Das Phasenportrait des Spiels besitzt das folgende Aussehen:

Die rechte Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten von drei numerischen Lösungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Die evolutionäre Erweiterung des Spiels besitzt zwei evolutionär stabile Strategien ((0,0) und (1,1)). Die blaue und grüne Populationsentwicklung enden bei (0,0) während die Anfangsbedingung der roten Population bei (1,1) endet.



Beispiel 2:

Klasse der Zentrumsspiele (Center Class)

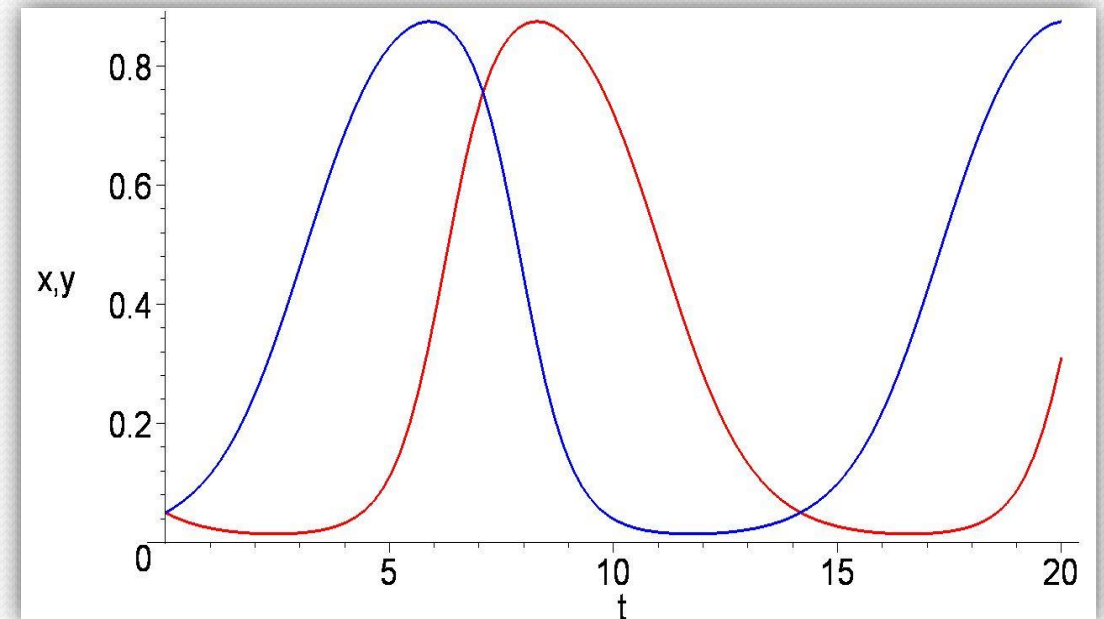
Das gekoppelte System von Differentialgleichung für dieses Beispiel lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot (3 \cdot y(t) - 3 \cdot x(t) \cdot y(t) + x(t) - 1)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \cdot (-3 \cdot x(t) + 3 \cdot x(t) \cdot y(t) - y(t) + 1)$$

Die rechte Abbildung zeigt eine numerische Lösung der obigen Gleichung, wobei der Anfangswert zu $(x(0), y(0)) = (0.05, 0.05)$ gewählt wurde. Im Gegensatz zu allen anderen möglichen Klassen von Bimatrixspielen, treten bei der Klasse der Zentrumsspiele periodische Verläufe der Populationsanteile $x(t)$ und $y(t)$ auf - die Populationsanteile enden nicht in einer evolutionär stabilen Strategie.

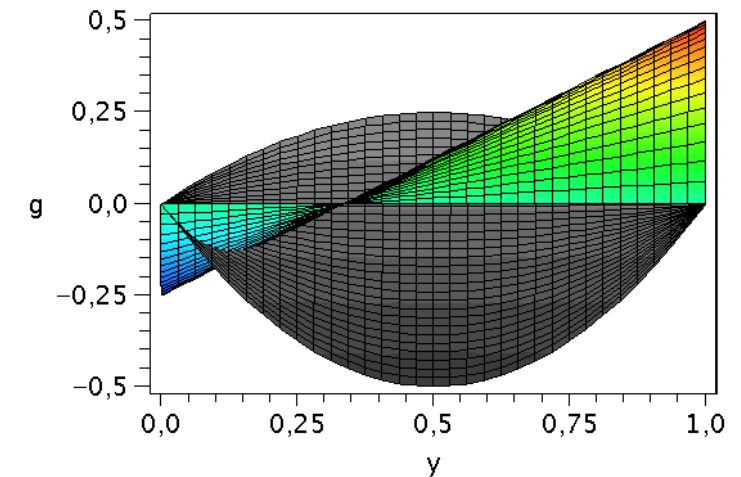
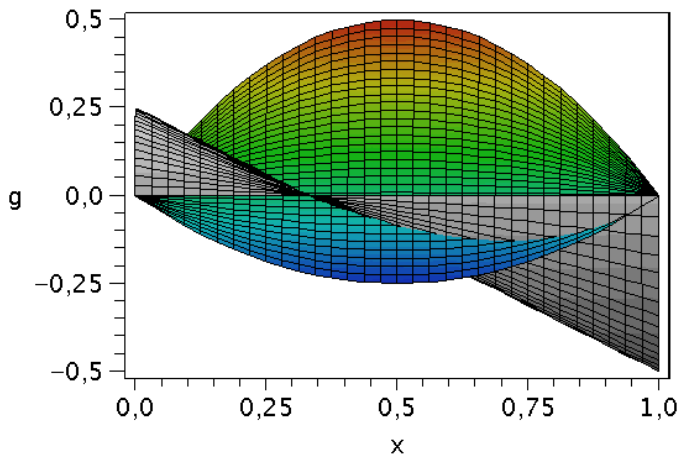
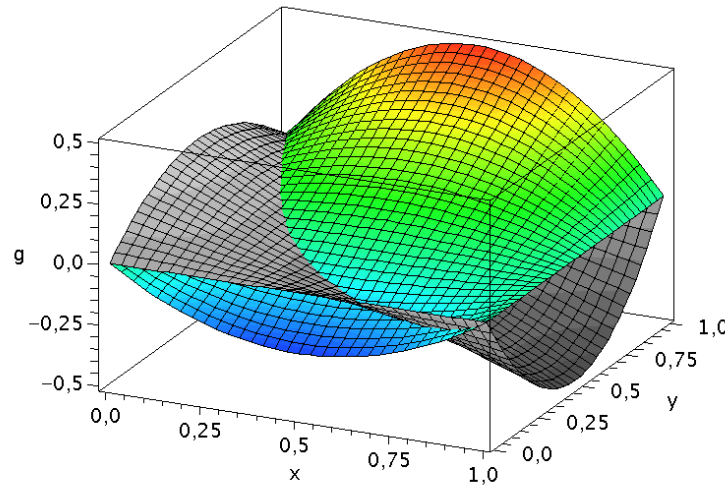
	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	(2, -2)	(0, 0)
Strat. 2	(0, 0)	(1, -1)

Die Lösung der Gleichung erfolgt wiederum durch Integration bzw. kann mithilfe des Computers numerisch berechnet werden. Es wurde der Anfangswert zu $(x(0), y(0)) = (0.05, 0.05)$ gewählt.



Eigenschaften der Funktionen $g_A(x,y)$ und $g_B(x,y)$

Die das Bimatrix Spiel bestimmenden Funktionen $g_A(x,y)$ (farbige Fläche) und $g_B(x,y)$ (graue Fläche) sind in den unteren Abbildungen veranschaulicht. Das Spiel der Gruppe A gehört der Klasse der Koordinationsspiele an, das der Gruppe B der Klasse der Anti-Koordinationsspiele.



Beispiel 2:

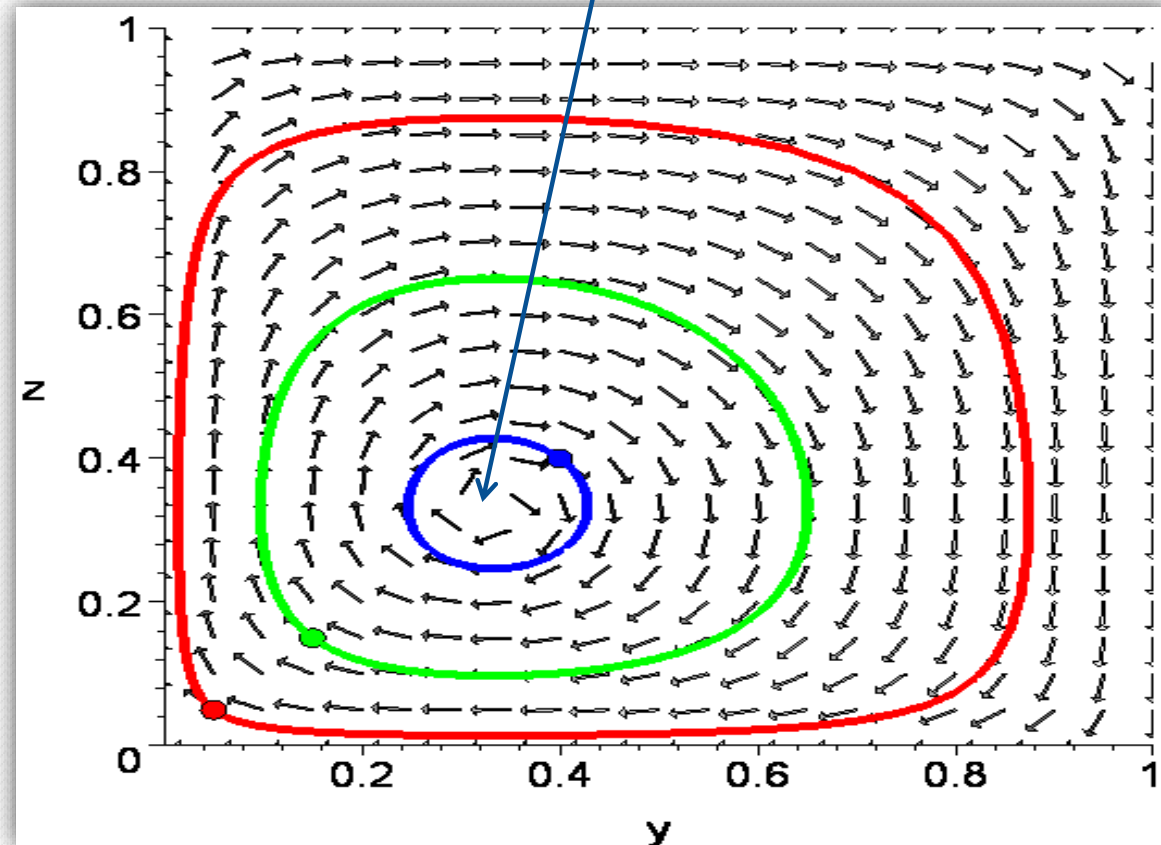
Klasse der Zentrumsspiele (Center Class)

	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	(2, -2)	(0, 0)
Strat. 2	(0, 0)	(1, -1)

Das Phasenportrait des zweiten Beispiels besitzt das folgende Aussehen:

Die rechte Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten von drei numerischen Lösungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Dieses Bimatrixspiel besitzt keine evolutionär stabile Strategie, da die einzelnen Phasenraum-Trajektorien sich keinem Punkt annähern, sondern auf einer geschlossenen, zyklischen Bahn um das gemischte Nash-Gleichgewicht kreisen.

Zentrum: Gemischtes Nash-Gleichgewicht des Spiels



Beispiel 3:

Klasse der Eckenspiele (Corner Class)

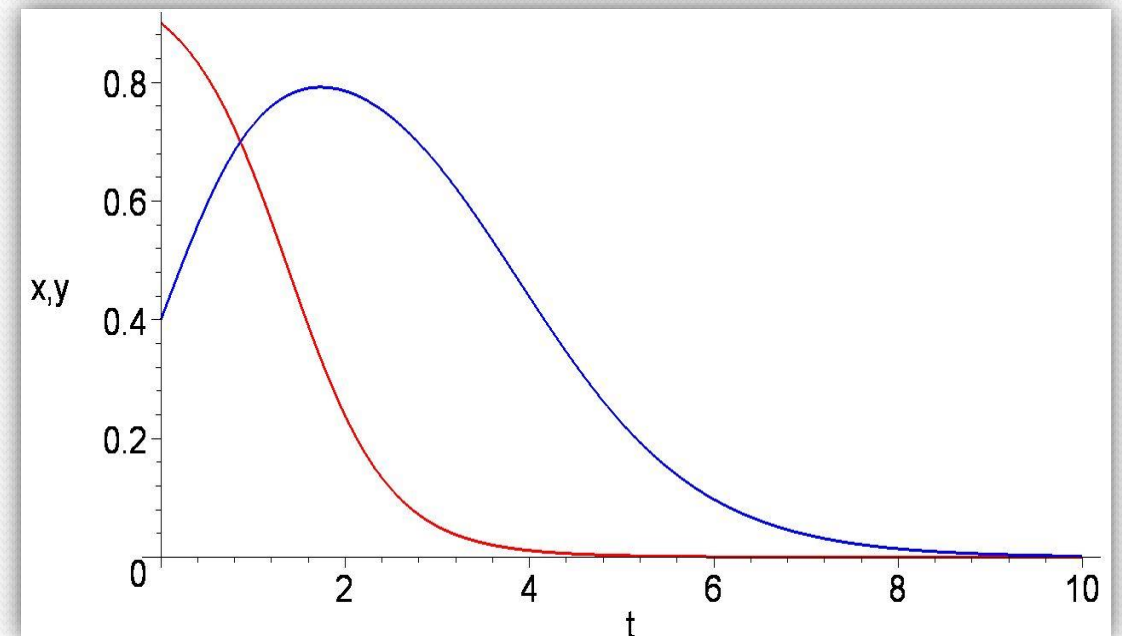
	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	(-2, 2)	(0, 0)
Strat. 2	(0, 0)	(1, 1)

Das gekoppelte System von Differentialgleichung für dieses Beispiel lautet:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot (-y(t) + x(t) \cdot y(t) + x(t) - 1)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \cdot (3 \cdot x(t) - 3 \cdot x(t) \cdot y(t) + y(t) - 1)$$

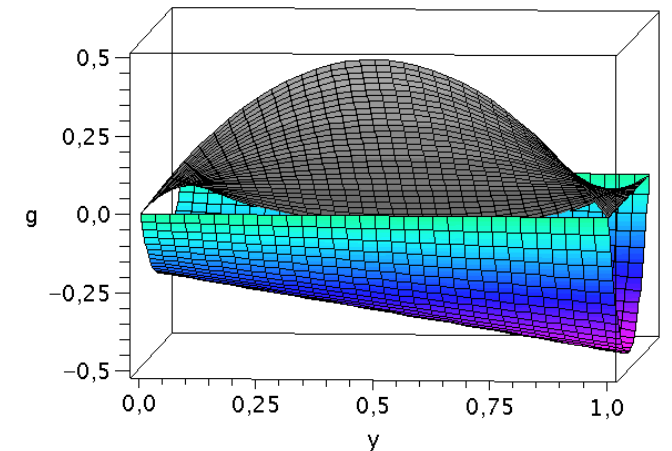
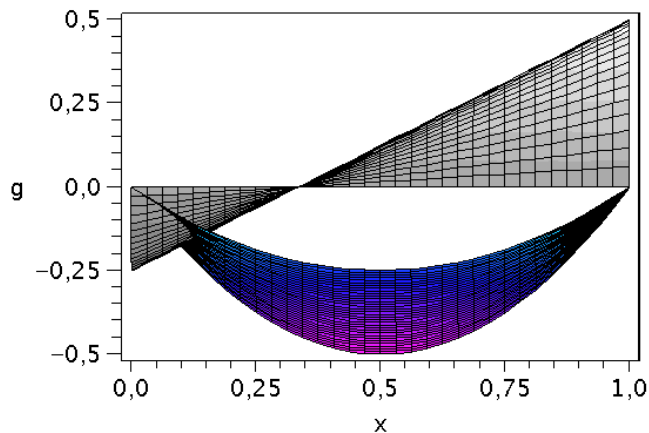
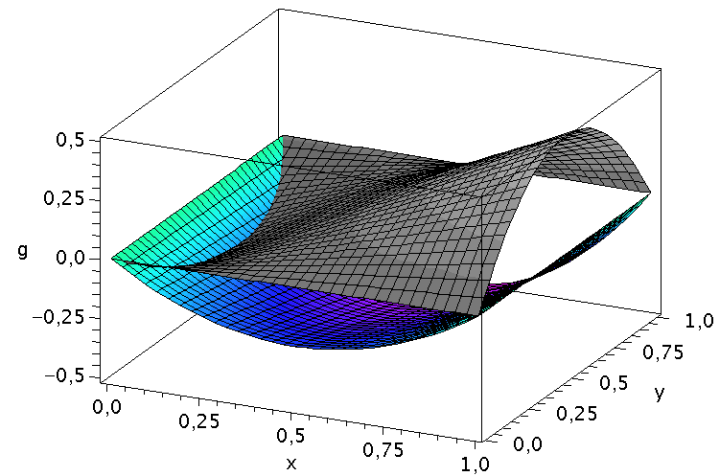
Die Lösung der Gleichung erfolgt wiederum durch Integration bzw. kann mithilfe des Computers numerisch berechnet werden. Es wurde der Anfangswert zu $(x(0), y(0)) = (0.9, 0.4)$ gewählt.

Die rechte Abbildung zeigt eine numerische Lösung der obigen Gleichung, wobei der Anfangswert zu $(x(0), y(0)) = (0.9, 0.4)$ gewählt wurde. Bei der Klasse der „Eckspiele“ gibt es eine evolutionär stabile Strategie, die unabhängig von der gewählten Anfangsbedingung stets von der Population angestrebt wird.



Eigenschaften der Funktionen $g_A(x,y)$ und $g_B(x,y)$

Die das Bimatrix Spiel bestimmenden Funktionen $g_A(x,y)$ (farbige Fläche) und $g_B(x,y)$ (graue Fläche) sind in den unteren Abbildungen veranschaulicht. Das Spiel der Gruppe A gehört der Klasse der dominanten Spiele an, das der Gruppe B der Klasse der Koordinationsspiele.



Beispiel 3:

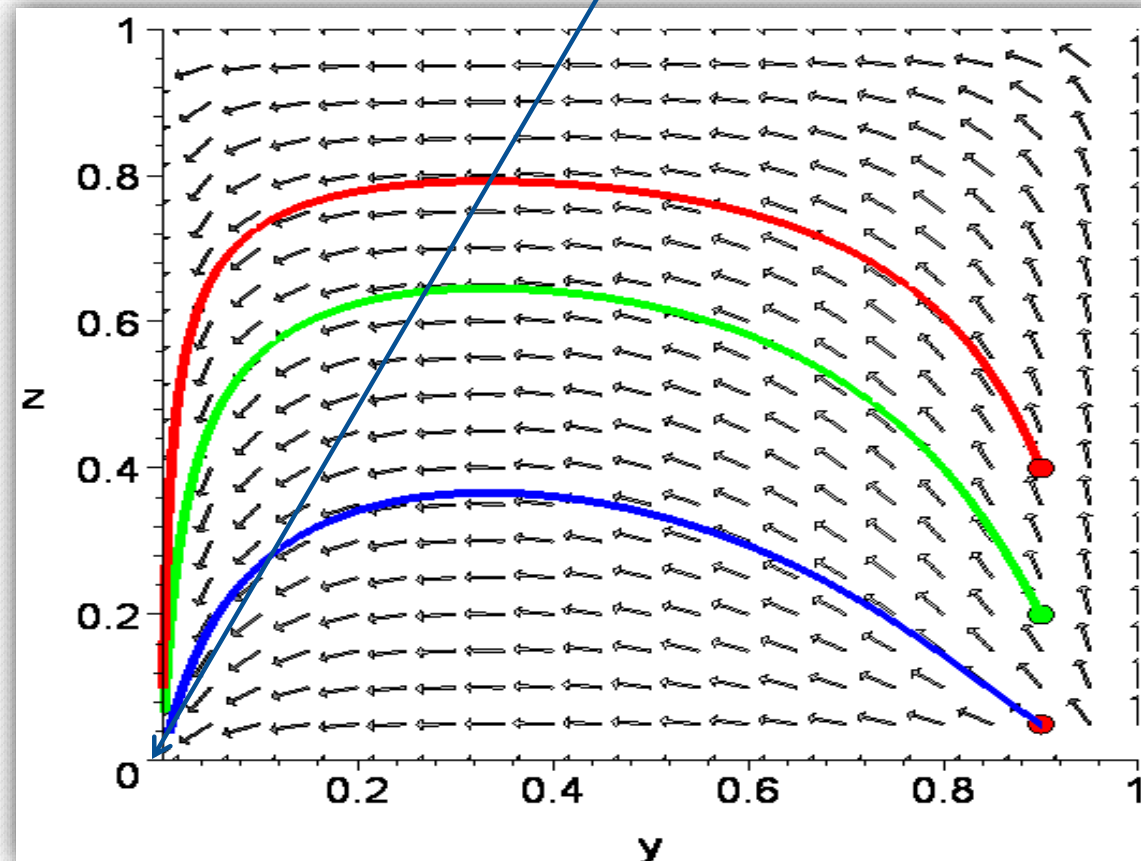
Klasse der Eckspiele (Corner Class)

Das Phasenportrait des dritten Beispiels besitzt das folgende Aussehen:

	Strat. 1	Strat. 2
Strat. 1	$(-2, 2)$	$(0, 0)$
Strat. 2	$(0, 0)$	$(1, 1)$

Die rechte Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten von drei numerischen Lösungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Dieses Bimatrixspiel besitzt eine evolutionär stabile Strategie, da es nur ein gemeinsames symmetrisches Nash-Gleichgewicht gibt $((x,y)=(0,0))$. Der rote Spieler besitzt sogar bei $(0,0)$ eine dominante Strategie.

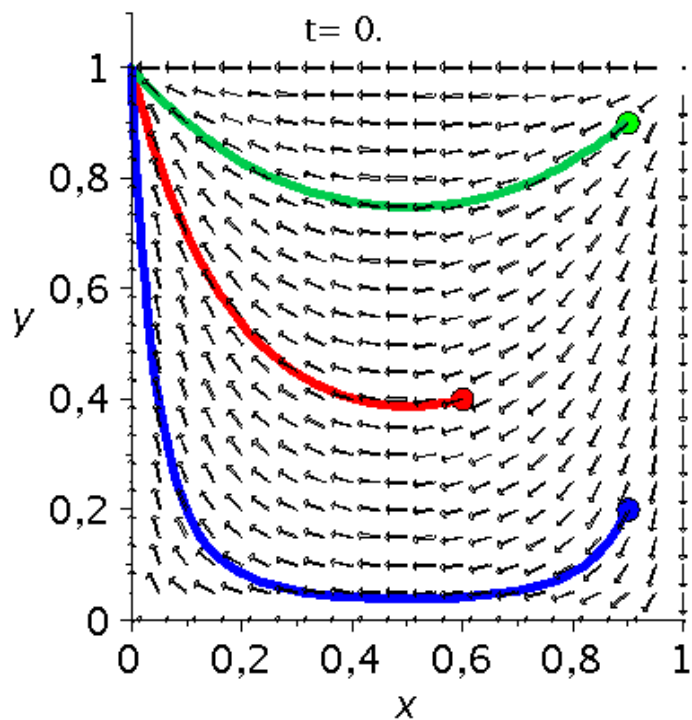
Einziges gemeinsames Nash-Gleichgewicht des Spiels



Klassifizierung von Bi-Matrix Spielen

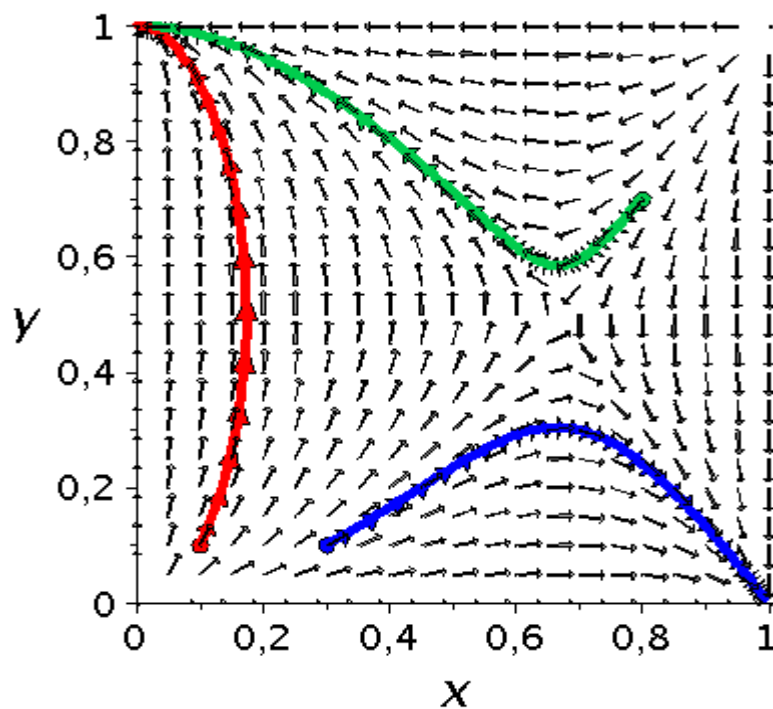
Eckspiele

Die Spielklasse der Gruppe A
oder der Gruppe B ist ein
Dominantes Spiel



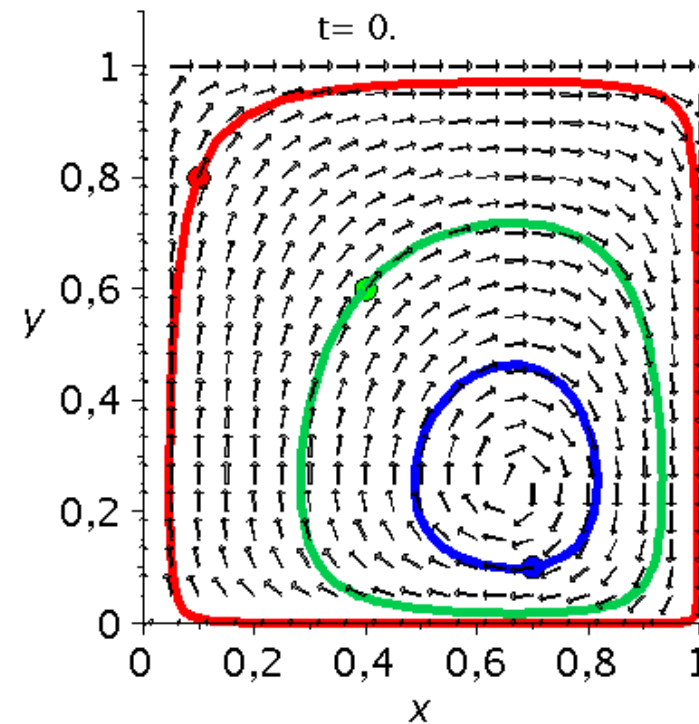
Sattelspiele

Spiel A: Koordinationsspiel
Spiel B: Koordinationsspiel
oder
Spiel A: Anti-Koordinationsspiel
Spiel B: Anti-Koordinationsspiel



Zentrumsspiele

Spiel A: Koordinationsspiel
Spiel B: Anti-Koordinationsspiel
oder
Spiel A: Anti-Koordinationsspiel
Spiel B: Koordinationsspiel



Das Spiel der Geldpolitik

Fiskalbehörde Geldbehörde	Keine neuen Schulden	Weiter Schulden machen
Finanzierung des Staatsdefizits über inflationäre Geldschöpfung	(3, 3)	(2, 4)
Stabile Geldpolitik	(4, 2)	(0, 0)

Obwohl hier eine symmetrische Spielmatrix vorliegt, ist das zugrundeliegende Spiel als Bi-Matrix Spiel zu beschreiben. In welche Klasse von Bi-Matrix Spielen ist das Spiel einzuordnen? Beschreiben Sie die möglichen zeitlichen Entwicklungen.

Benutzen Sie hierbei das folgende Maple oder Python Programm:

- 1) Bi-Matrix Spiele (Maple): <https://itp.uni-frankfurt.de/~hاناuske/VPSOC/T1/maple/I-2-4/BiMatrix1.html>
- 2) Bi-Matrix Spiele (Python): <https://itp.uni-frankfurt.de/~hاناuske/VPSOC/T2/python/bimatrix1.py>

Bi-Matrix Spiele mit Python V1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Definition der Funktionen g_A und g_B
def gA(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*y + (b-d))*(x-x*x)
    return g
def gB(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*x + (b-d))*(y-y*y)
    return g

# Loesen der DGL
def solve_dgl(numpoints,tend,x0,y0,Aa,Ab,Ac,Ad,Ba,Bb,Bc,Bd):
    sol=np.empty([numpoints,3])
    t=np.linspace(0,tend,numpoints)
    dt=t[1]-t[0]
    sol[0].flat[0] = t[0]
    sol[0].flat[1] = x0
    sol[0].flat[2] = y0
    i = 1
    while i < len(sol):
        sol[i].flat[0] = t[i]
        dx=gA(sol[i-1,1],sol[i-1,2],Aa,Ab,Ac,Ad)*dt
        dy=gB(sol[i-1,1],sol[i-1,2],Ba,Bb,Bc,Bd)*dt
        sol[i].flat[1] = sol[i-1,1] + dx
        sol[i].flat[2] = sol[i-1,2] + dy
        i = i + 1
    return sol

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
params = {
    'text.usetex'      : True,
    'axes.titlesize'   : 22,
    'axes.labelsize'   : 20,
    'xtick.labelsize'  : 20 ,
    'ytick.labelsize'  : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)
```

```
#Festlegung der Auszahlungsmatrix des unsymmetrischen (2x2)-Spiels, Anfangspopulation, Endzeit
Aa=10
Ab=4
Ac=9
Ad=5
Ba=10
Bb=4
Bc=7
Bd=5
tend=12
x0=0.6
y0=0.1

# Weitere Festlegungen
numpoints=1000

# Loesung der DGL fuer eine Anfangspopulation (x0,y0)
Loes=solve_dgl(numpoints,tend,x0,y0,Aa,Ab,Ac,Ad,Ba,Bb,Bc,Bd)

# Plotten des Bildes
plt.plot(Loes[:,1],Loes[:,2],c="black", linewidth=1.5, linestyle='-')
plt.plot(Loes[0,1],Loes[0,2], marker='o', color='grey', markersize=8)

# Achsenbeschriftungen usw.
plt.xlim(0,1)
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel(r"$\rm y$")
plt.xlabel(r"$\rm x$")

#Ausgabe des Wertes des Populationsvektors zur Endzeit im Terminal
print "Zur Zeit t=", Loes[numpoints-1,0]
print "Der Wert von x ist: x=", Loes[numpoints-1,1]
print "Der Wert von y ist: y=", Loes[numpoints-1,2]

#Speichern der Bilder als .jpg- und .pdf-Datei
saveFig="./bimatrix.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=100, bbox_inches="tight", pad_inches=0.05, format="jpg")
plt.show()
```


Bi-Matrix Spiele mit Python V2 (Feldliniendiagramm)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib

# Definition der Funktionen g_A und g_B
def gA(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*y + (b-d))*(x-x*x)
    return g
def gB(x,y,a,b,c,d):
    g=((a+d-c-b)*x + (b-d))*(y-y*y)
    return g

# Groessenfestlegung der Labels usw. im Bild
params = {
    'text.usetex'      : True,
    'axes.titlesize'  : 22,
    'axes.labelsize'  : 20,
    'xtick.labelsize' : 20 ,
    'ytick.labelsize' : 20
}
matplotlib.rcParams.update(params)

#Festlegung der Auszahlungsmatrix des
Aa=10
Ab=4
Ac=9
Ad=5
Ba=10
Bb=4
Bc=7
Bd=5
tend=12
x0=0.6
y0=0.1
```

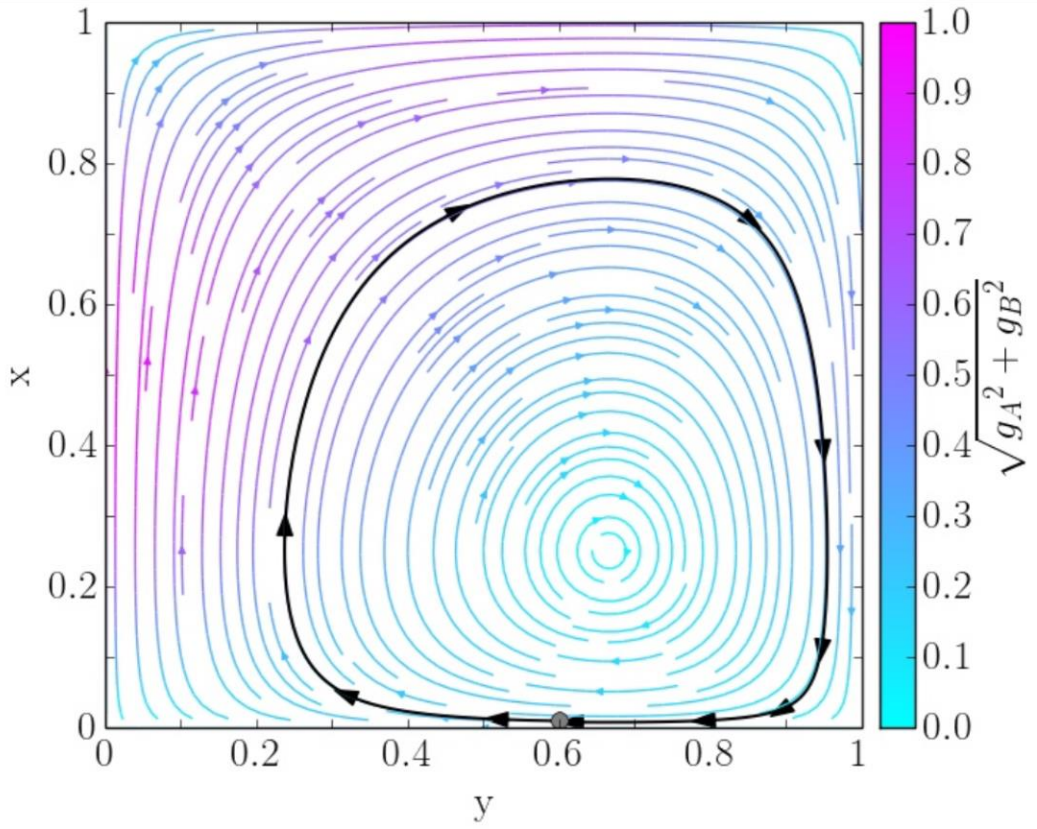
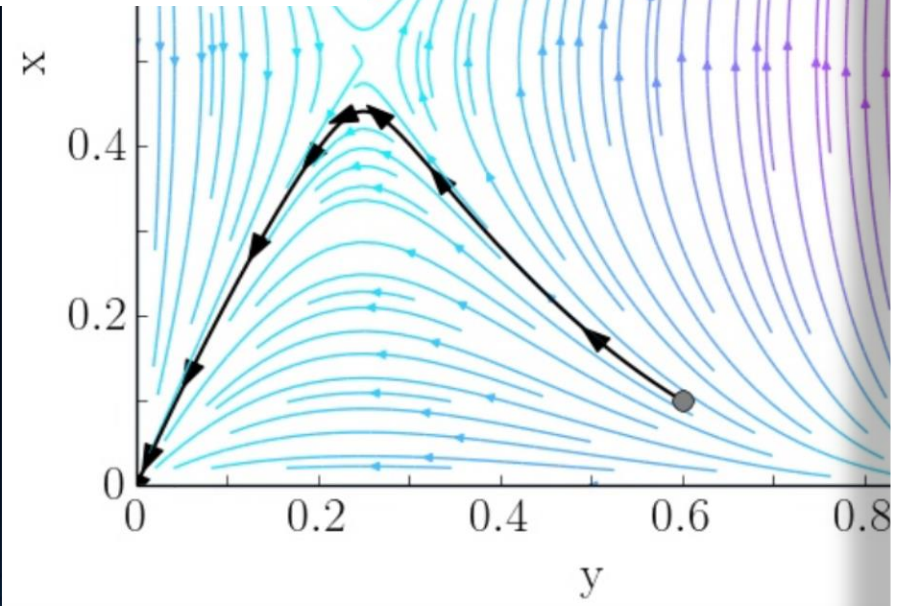
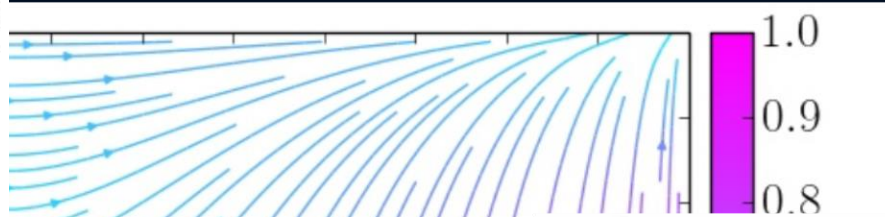
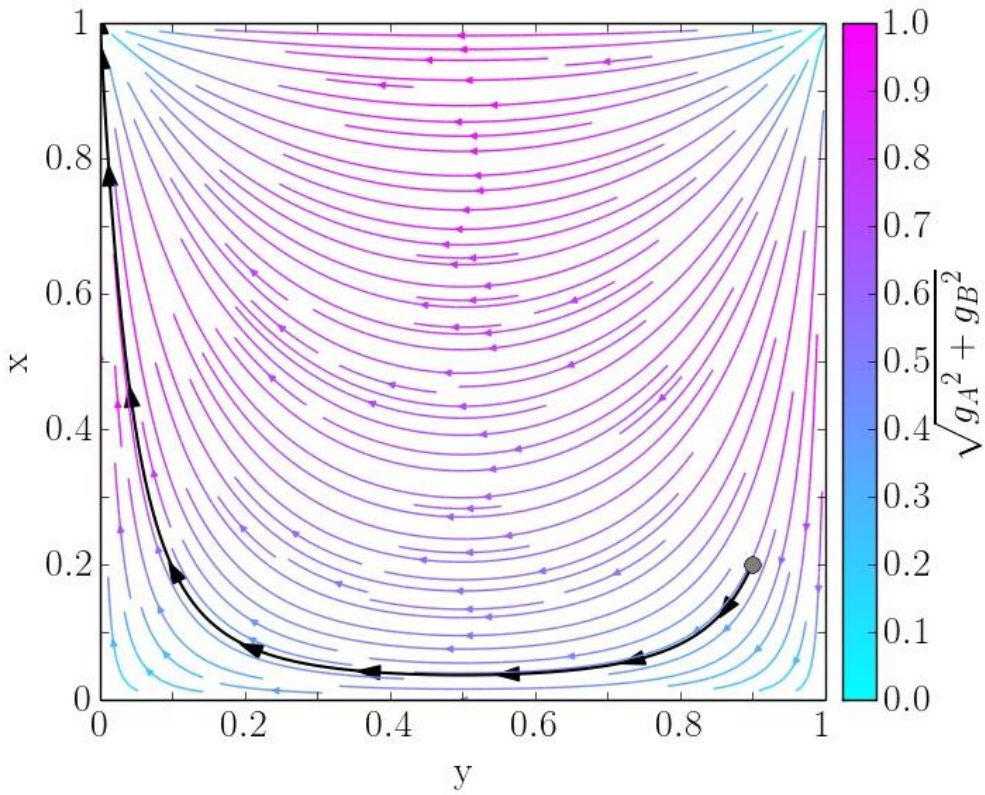
```
# Fuer die Darstellung des Feldliniendiagramms streamplot
SY,SX=np.mgrid[0:1:100j,0:1:100j]
SgA=gA(SX,SY,Aa,Ab,Ac,Ad)
SgB=gB(SX,SY,Ba,Bb,Bc,Bd)
# Die Farbe wird die Geschwindigkeit der Aenderung des Populationsvektors anzeigen
speed=np.sqrt(SgA*SgA + SgB*SgB)
colourspeed = speed/speed.max()

# Plotten des Bildes
strm = plt.streamplot(SX,SY,SgA,SgB,density=[2, 2], linewidth=1,color=colourspeed, cmap=plt.cm.cool)
# Erzeugung der nebenstehenden Farblegende colorbar
cbar=plt.colorbar(strm.lines,pad=0.02)
cbar.set_label(r'\sqrt{{g_A}^2 + {g_B}^2}',size=20)

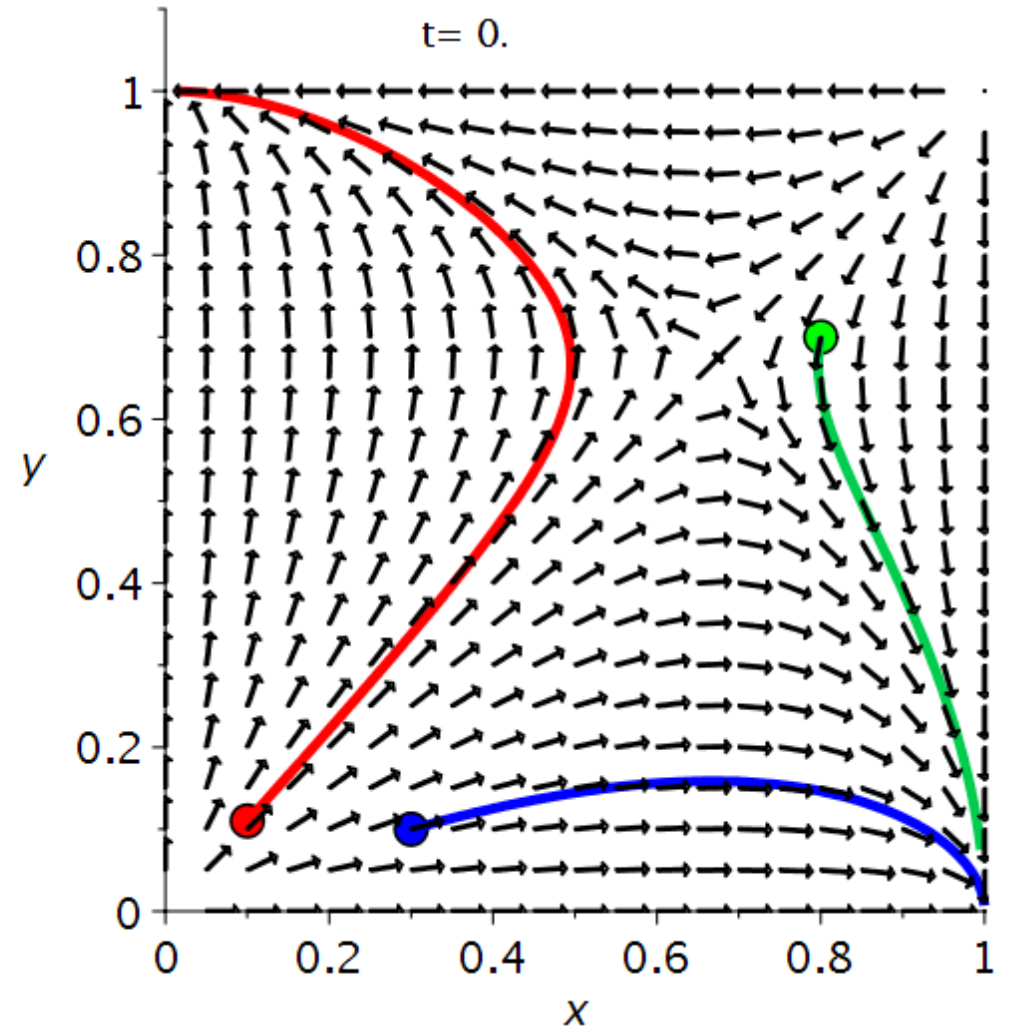
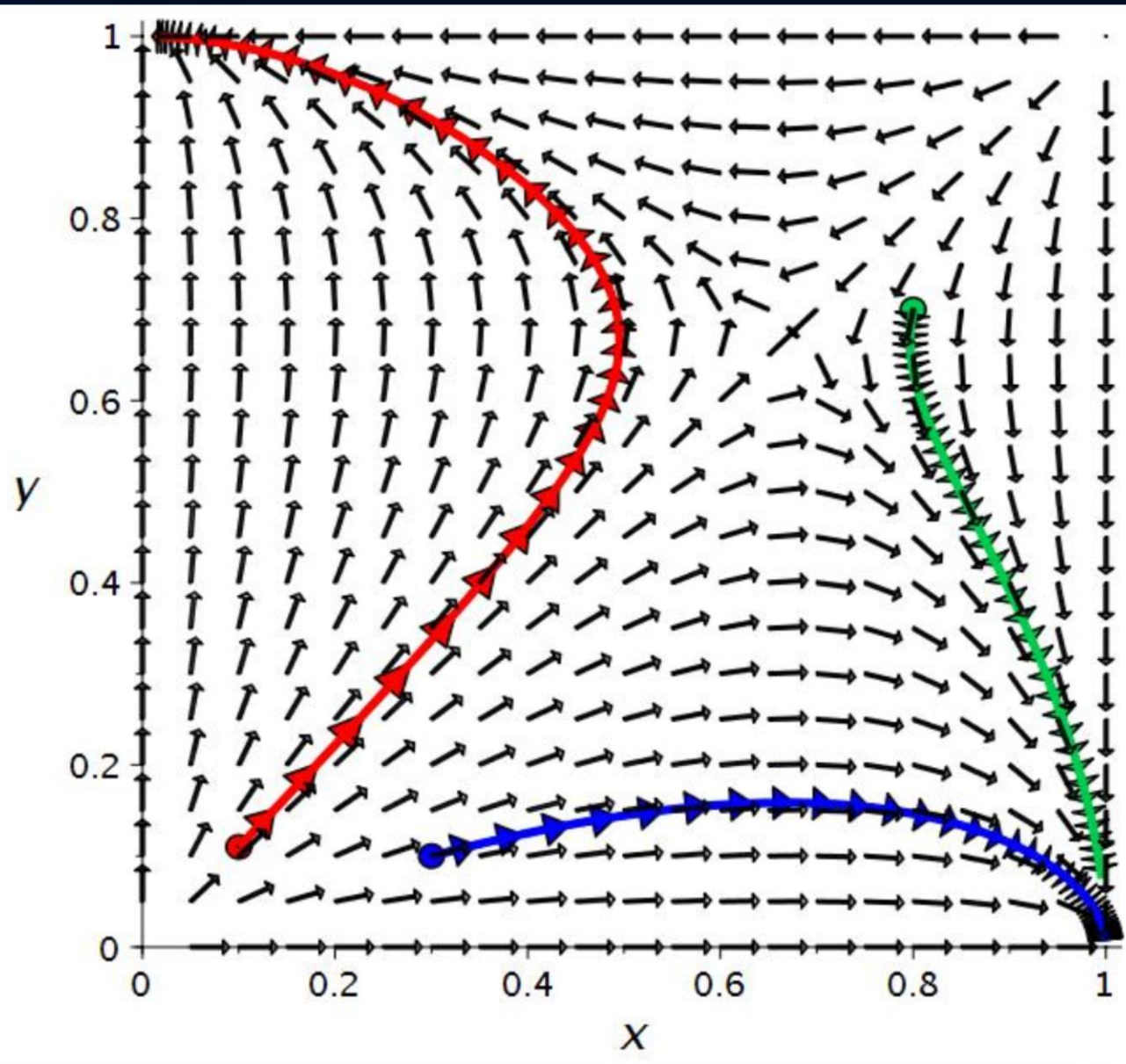
# Achsenbeschriftungen usw.
plt.xlim(0,1)
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel(r"\rm y$")
plt.xlabel(r"\rm x$")

#Speichern der Bilder als .jpg- und .pdf-Datei
saveFig="./bimatrix.jpg"
plt.savefig(saveFig, dpi=100, bbox_inches="tight", pad_inches=0.05, format="jpg")
plt.show()
```

Bi-Matrix Spiele mit Python Version bimatrix1.py



Das Spiel der Geldpolitik



Physik der sozio-ökonomischer Systeme mit dem Computer von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)

E-Learning

Zusatzmaterial auf der Online-Lernplattform Lon Capa

Zusätzlich zu den Informationen aus dieser Internetseite wurde ein separater Kurs auf der Online-Lernplattform Lon Capa erstellt. Er beinhaltet neben den hier dargestellten Informationen zusätzliche Erläuterungen, diverse interaktive Übungsaufgaben, Feedbackmöglichkeiten und Probeklausuren. Falls Sie schon einen Lon Capa Account besitzen können Sie sich einfach mit diesem unter dem unten angegebenen Link einloggen. Falls Sie Student der Universität Frankfurt sind, können Sie sich mit Ihrem HRZ-Account einloggen. Anderenfalls kontaktieren Sie bitte per E-Mail und ich werde für Sie einen Account für die Lernplattform erstellen.

[Hier gehts zu Lon Capa](#)

Aufgaben auf Lon-Cappa

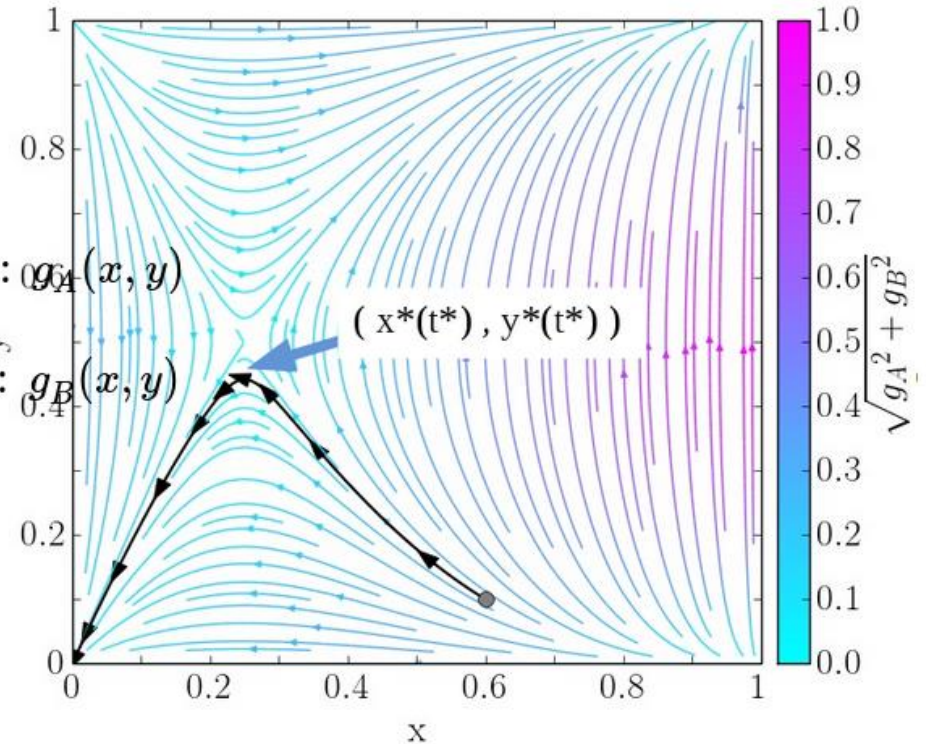
Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\left(\beta_{11}^A + \beta_{22}^A - \beta_{12}^A - \beta_{21}^A \right) y(t) + \left(\beta_{12}^A - \beta_{22}^A \right) \right] \left(x(t) - (x(t))^2 \right) =: g_A(x, y)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\left(\beta_{11}^B + \beta_{22}^B - \beta_{12}^B - \beta_{21}^B \right) x(t) + \left(\beta_{12}^B - \beta_{22}^B \right) \right] \left(y(t) - (y(t))^2 \right) =: g_B(x, y)$$

Das durch die folgende Auszahlungstabelle definierte Bimatrix Spiel gehört der Klasse der Sattelpunktsspiele an.

A/B	s_1^B	s_2^B
s_1^A	(10 , 10)	(4 , 7)
s_2^A	(9 , 4)	(5 , 5)



$t^* =$, $y^* =$ (bitte geben Sie den numerischen Wert auf mindestens 4 Nachkommastellen an; z.B. 0.4135)

Antwort einreichen Versuche 0/5

Der Populationsvektor zur Zeit $t=0$ sei $(x(0)=0.6, y(0)=0.0565)$. Der Anteil der Spieler in der Gruppe B die die Strategie s_1^B spielen nimmt zunächst zu, erreicht dann ein Maximum und nimmt dannach wieder ab (siehe nebenstehende Abbildung). Berechnen Sie den Zeitpunkt t^* an dem der maximale Wert y^* erreicht wird.