

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
02.12.2022*

*MATTHIAS HANAUSKE*

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES  
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK  
D-60438 FRANKFURT AM MAIN  
GERMANY*

## 7. Vorlesung

In diesem Semester (WS 2022/23)  
findet die Vorlesung und die Übungstermine  
in Präsenz (und auch Online) statt.

# Plan für die heutige Vorlesung

- Kurze Wiederholung der Inhalte der 6. Vorlesung
- Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke
  - Die Klasse der exponentiellen Netzwerke
  - Die Klasse der skalenfreien Netzwerke
    - Preferential Attachment
    - Das Barabasi-Albert Modell
  - Multipartite Netzwerke
  - Anwendungsfelder der komplexen Netzwerke
    - Kommunikationsnetzwerke und das Internet
    - Energie- und Stromnetzwerke
    - Das Autoren- Zitationsnetzwerk der wissenschaftlichen Information

# Inhalte Vorlesung 6

- Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke
  - Warum evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken?
  - Mathematische Beschreibung von komplexen Netzwerken
  - Definition wichtiger Netzwerk-charakterisierender Größen
  - Definition unterschiedlicher Netzwerk-Typen und Netzwerk-Klassen
  - Komplexe Netzwerke in der Realität
    - Die Klasse der zufälligen Netzwerke (random networks)
    - Die Klasse der „Kleine Welt“ Netzwerke (small world networks)
  - Komplexe Netzwerke analysieren mit Python und NetworkX

# Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke

Internetseite der Vorlesung

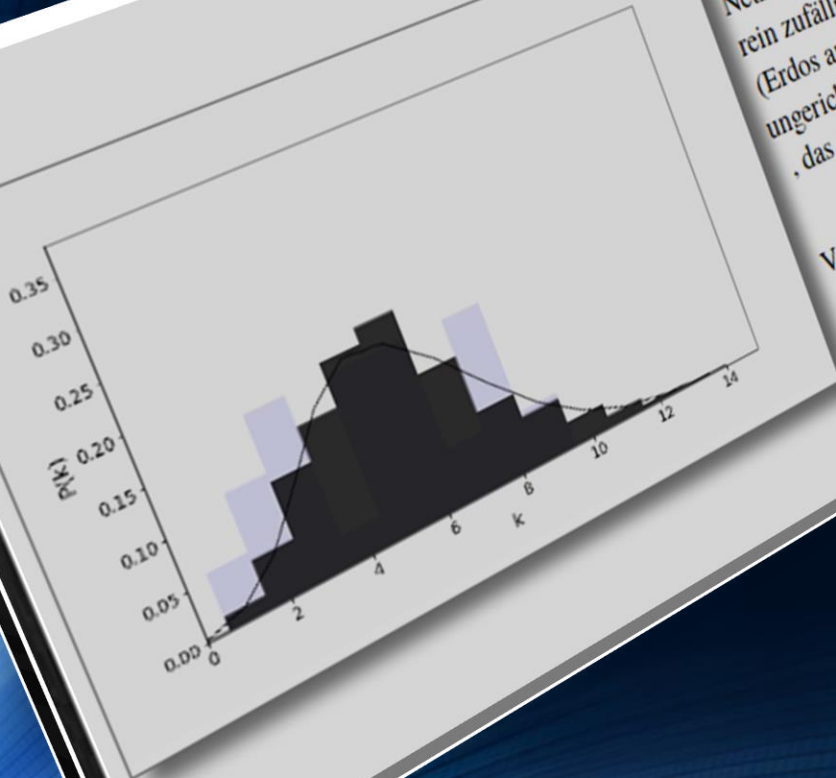
## Zufällige Netzwerke (random networks)

Im Folgenden betrachten wir die Zufälligen Netzwerke. Die einzelnen Knoten werden von den Kanten rein zufällig Muster aus ungerichteten Kanten, das ein Knoten

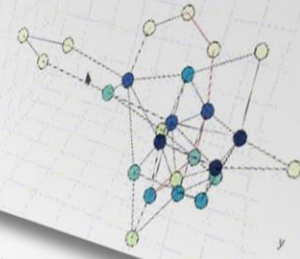
$p =$

Verteilung

$$P(k) = N^{-1} \sum_{i=1}^N k_i$$



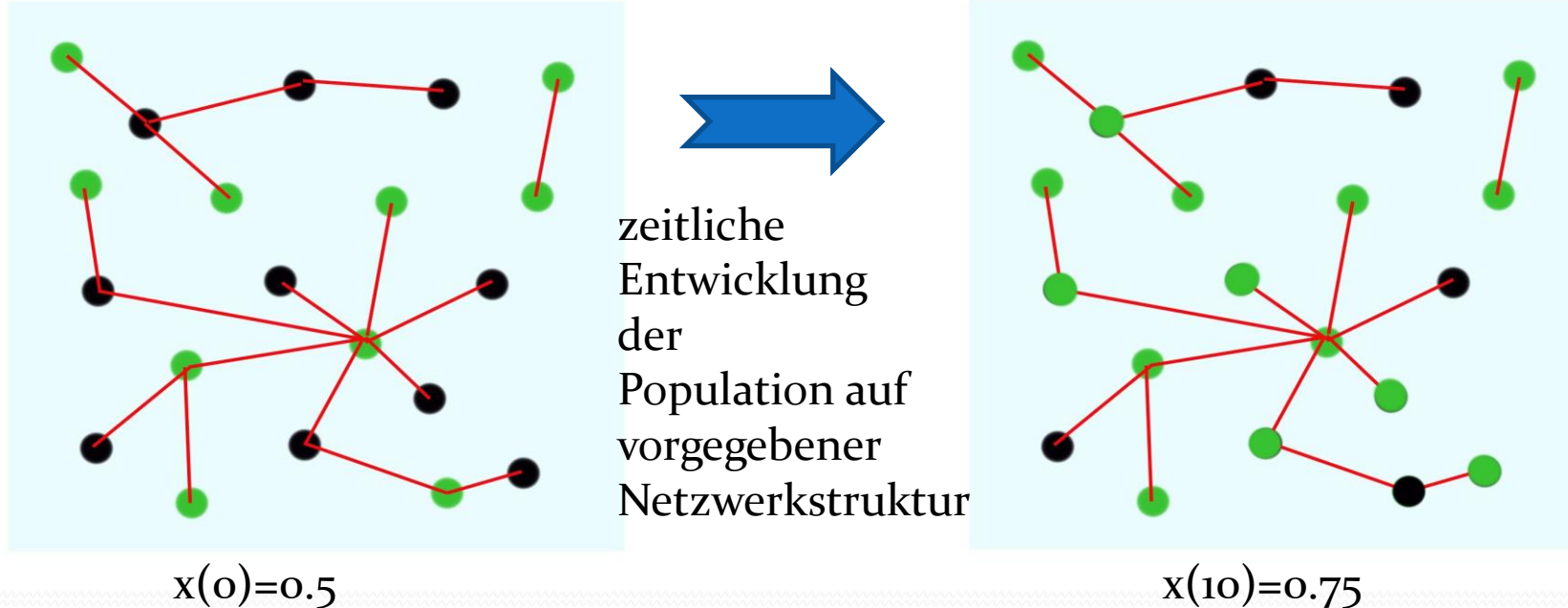
## Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke



Ein Netzwerk wird formal mittels graphentheoretischer Größen beschrieben. Wir nehmen im Folgenden zunächst ein ungerichtetes, ungewichtetes Netzwerk bestehend aus einer Knotenart an, wobei  $N$  die Anzahl der Knoten und  $L$  die gesamte Anzahl der Links (Kanten) des Netzwerks ist. Jeder einzelne Knoten  $i$  ( $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ ) besitzt eine gewisse Anzahl von Verbindungskanten zu anderen Knoten und die Anzahl dieser Kanten bezeichnet man als den Knotengrad  $k_i$  des Knotens. Der durchschnittliche Knotengrad  $\langle k \rangle$  eines ungerichteten Netzwerks ist  $\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$  und die maximale Anzahl möglicher Kanten ( $L_{max}$  (ein sogenannter vollständiger Graph) ist  $L_{max} = \frac{N(N-1)}{2}$ ). Eine der wichtigsten Netzwerk-charakterisierenden Größen ist die Verteilungsfunktion der Knotengrade  $P(k) = N(k)/N$ , wobei  $N(k)$  die Anzahl der Knoten mit Knotengrad  $k$  beschreibt. Weitere wichtige graphentheoretische Größen werden in dem Jupyter Notebook: Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke (siehe auch Einführung in die Theorie der komplexen Netzwerke und Albert-Laszlo Barabasi, Network science, Chapter 2 Graph Theory).

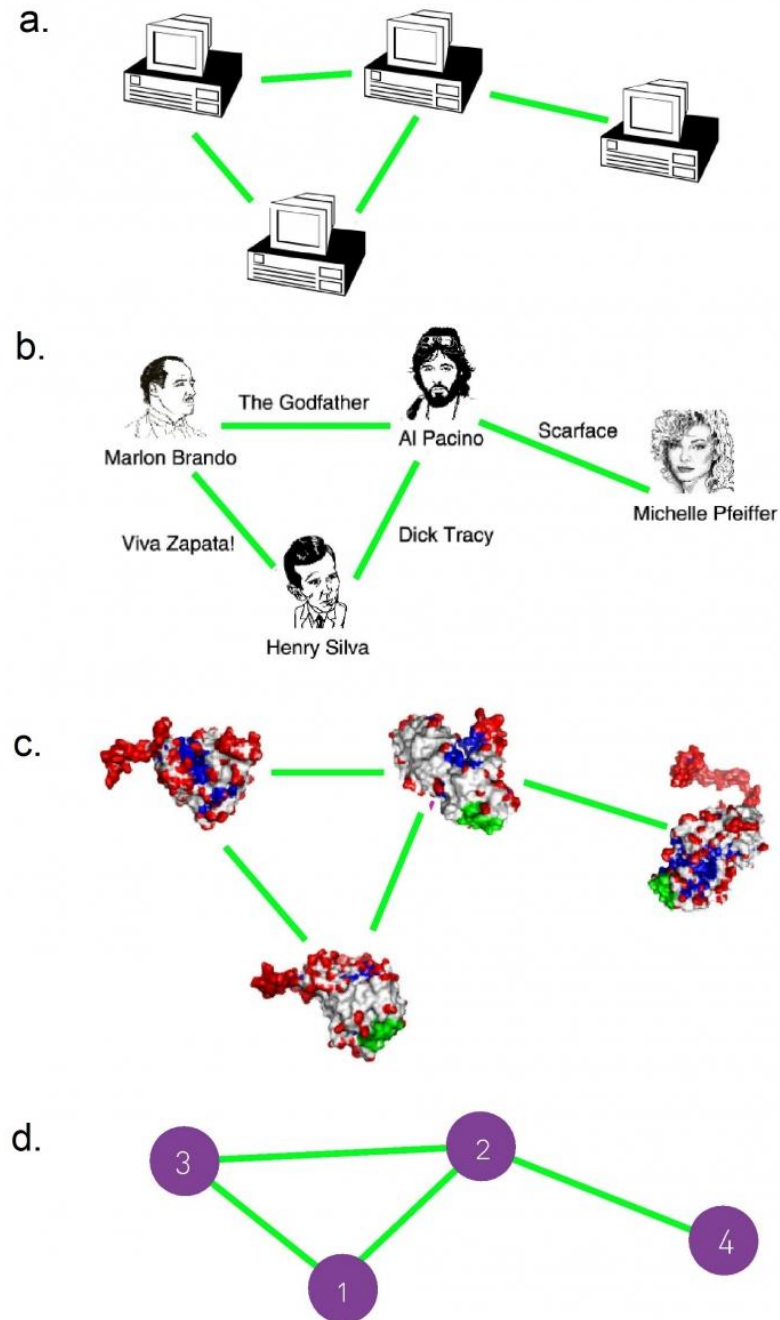
# Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.



Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter  $t$  stellt die „Zeit“ dar.  
 $x(t)$  : Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt  $t$  die Strategie „grün“ spielen.  
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

# Komplexe Netzwerke Knoten und Kanten



## Different Networks, Same Graph

The figure shows a small subset of (a) the Internet, where routers (specialized computers) are connected to each other; (b) the Hollywood actor network, where two actors are connected if they played in the same movie; (c) a protein-protein interaction network, where two proteins are connected if there is experimental evidence that they can bind to each other in the cell. While the nature of the nodes and the links differs, these networks have the same graph representation, consisting of  $N = 4$  nodes and  $L = 4$  links, shown in (d).

Abbildung entnommen von:

Network Science by Albert-László Barabási

<http://networksciencebook.com/>

Viele der im Teil 2 behandelten Themen sind in diesem Buch ausführlich behandelt.

# Theorie der komplexen Netzwerke (III)

(Beispiele unterschiedlicher komplexer Netzwerke)

- a) Nicht gerichtetes und ungewichtetes Netzwerk einer einzigen Knotenart.
- b) Nicht gerichtetes und ungewichtetes Netzwerk dreier verschiedener Knotenarten, wobei zusätzlich drei verschiedene Kantenarten existieren.
- c) Nicht gerichtetes aber gewichtetes Netzwerk. Sowohl die Knoten als auch die Kanten des Netzwerks besitzen zahlenmäßige Gewichtungen.
- d) Gerichtetes aber nicht gewichtetes Netzwerk. Es existiert nur eine Knoten- und gerichtete Kantenart.

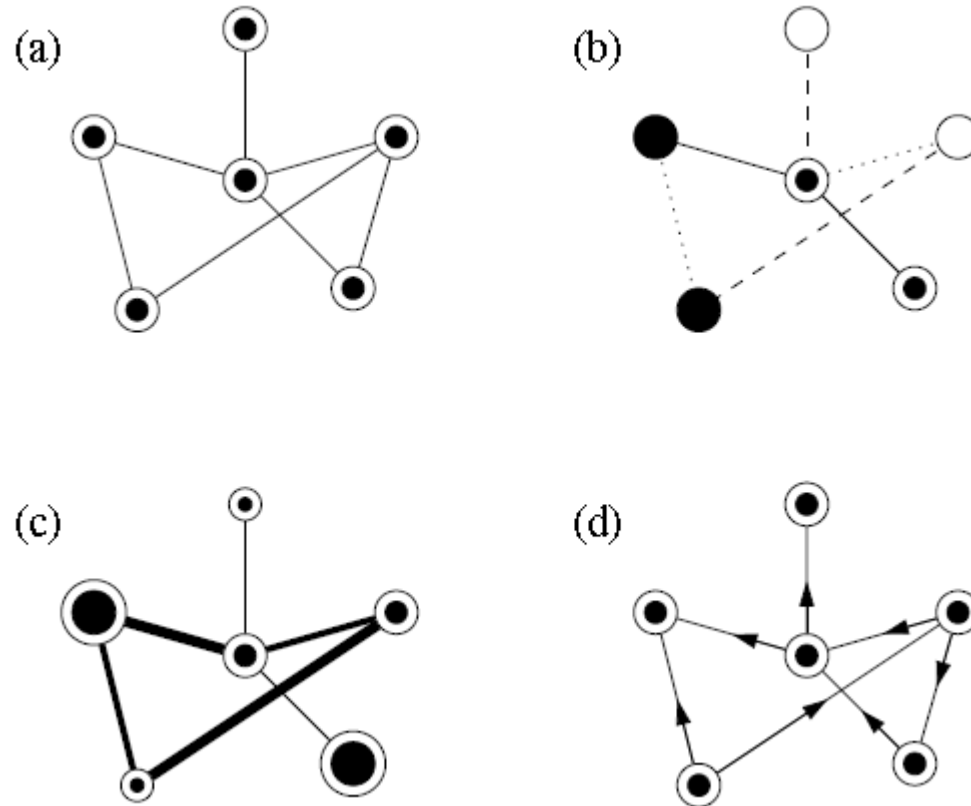
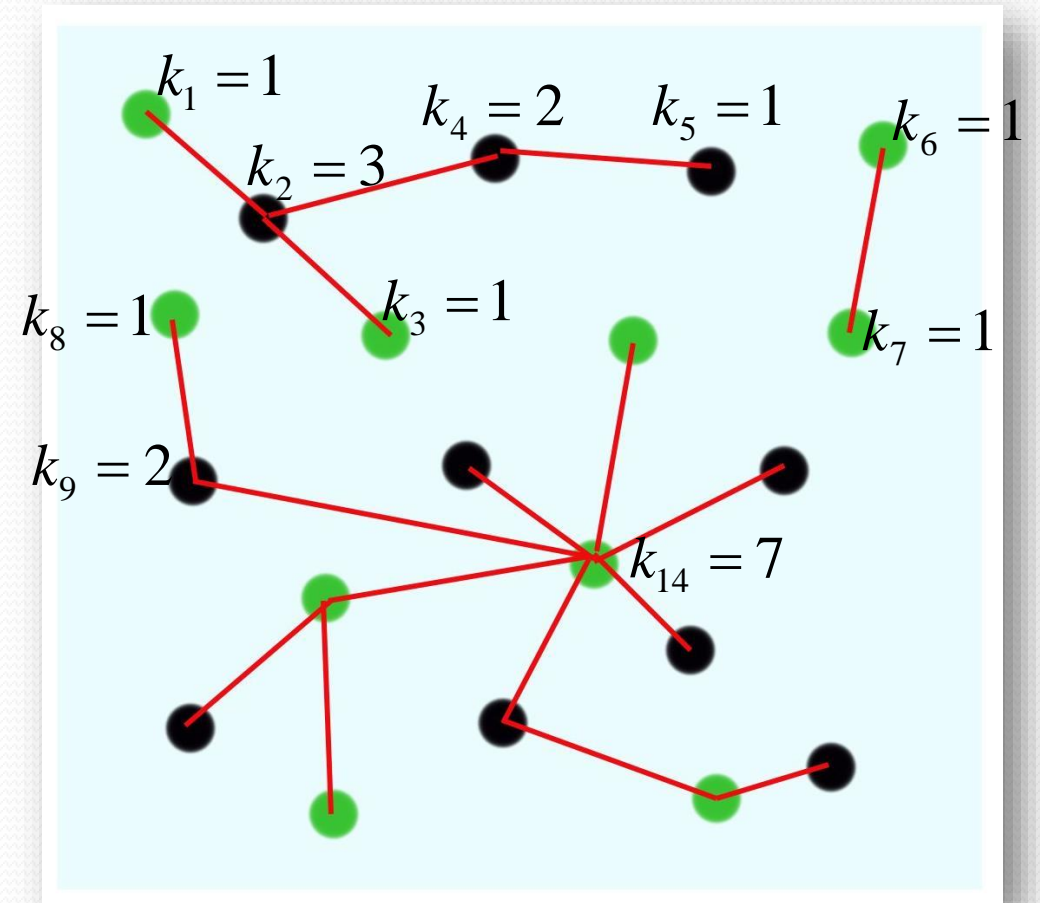
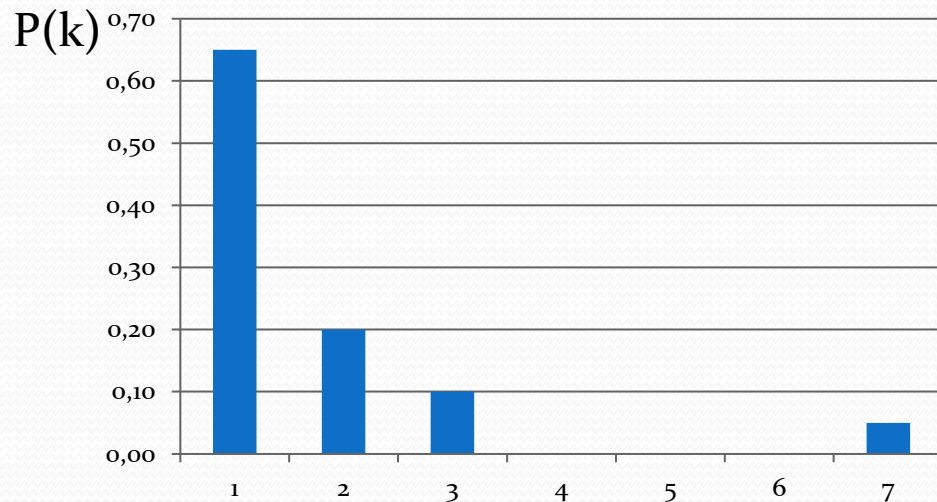


Abbildung: Unterschiedliche Netzwerktypen  
Die Abbildung ist dem folgenden Artikel entnommen:  
M. E. J. Newman,  
„The structure and function of complex networks”

# Theorie der komplexen Netzwerke (V)

(Die Verteilungsfunktion der Knotengrade)

Die Verteilungsfunktion der Knotengrade  $P(k)$  (bzw.  $N(k)$ ) ist eine wichtige das Netzwerk charakterisierende Größe. Sie gibt an, wie groß der Anteil an Netzwerkknoten mit Knotengrad  $k$  ist. Bei realen (endlichen) Netzwerken ist diese Funktion keine kontinuierliche, sondern eine diskrete Funktion. In dem rechten Beispiel besitzt die Verteilungsfunktion das folgende Aussehen:



k



# Netzwerk-Klassen

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen:

**i. Zufällige Netzwerke**

Die einzelnen Kanten bei *zufälligen Netzwerke* werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt.

**ii. „Kleine Welt“-Netzwerke (small-world networks)**

- i. „Kleine Welt“-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus.

**iii. Exponentielle Netzwerke**

**iv. Skalenfreie Netzwerke**

## Contact

[Mailing list](#)

[Issue tracker](#)

[Source](#)

## Releases

### Stable (notes)

2.8.8 — November 2022

[download](#) | [doc](#) | [pdf](#)

### Latest (notes)

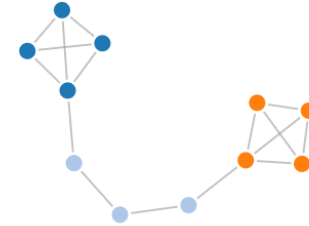
3.0 development

[github](#) | [doc](#) | [pdf](#)

### [Archive](#)



NetworkX is a Python package for the creation, manipulation, and study of the structure, dynamics, and functions of complex networks.



## Software for complex networks

- Data structures for graphs, digraphs, and multigraphs
- Many standard graph algorithms
- Network structure and analysis measures
- Generators for classic graphs, random graphs, and synthetic networks
- Nodes can be "anything" (e.g., text, images, XML records)
- Edges can hold arbitrary data (e.g., weights, time-series)
- Open source [3-clause BSD license](#)
- Well tested with over 90% code coverage
- Additional benefits from Python include fast prototyping, easy to teach, and multi-platform

# Jupyter Notebook: Network1.ipynb

## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

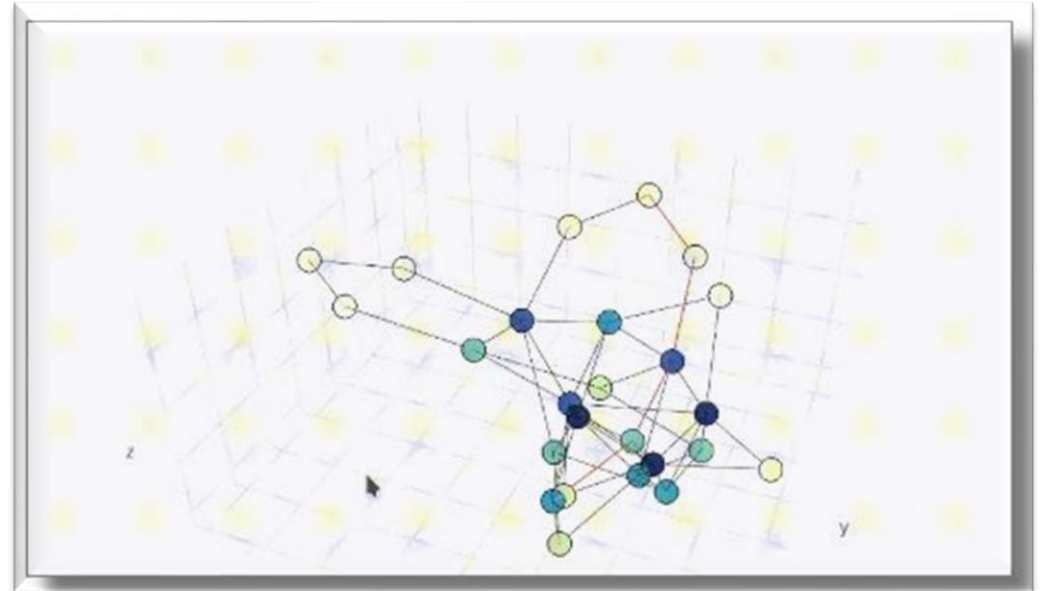
Frankfurt am Main 02.11.2020

Zweiter Vorlesungsteil:

Einführung In die Theorie der komplexen Netzwerke

### Einführung

Eine bedeutende Einschränkung der deterministischen, evolutionären Spieltheorie ist deren zugrundeliegende Netzwerkstruktur (Netzwerktopologie). Die jeweiligen Spieler der betrachteten Population suchen in jeder Spielperiode einen neuen Spielpartner, wobei sie hierbei zufällig vorgehen (zufälliges Netzwerk) und vom Prinzip her mit jedem Spieler innerhalb der Population potentiell das zugrundeliegende Spiel spielen können (vollständig verbundenes



## Random Networks: a Brief History

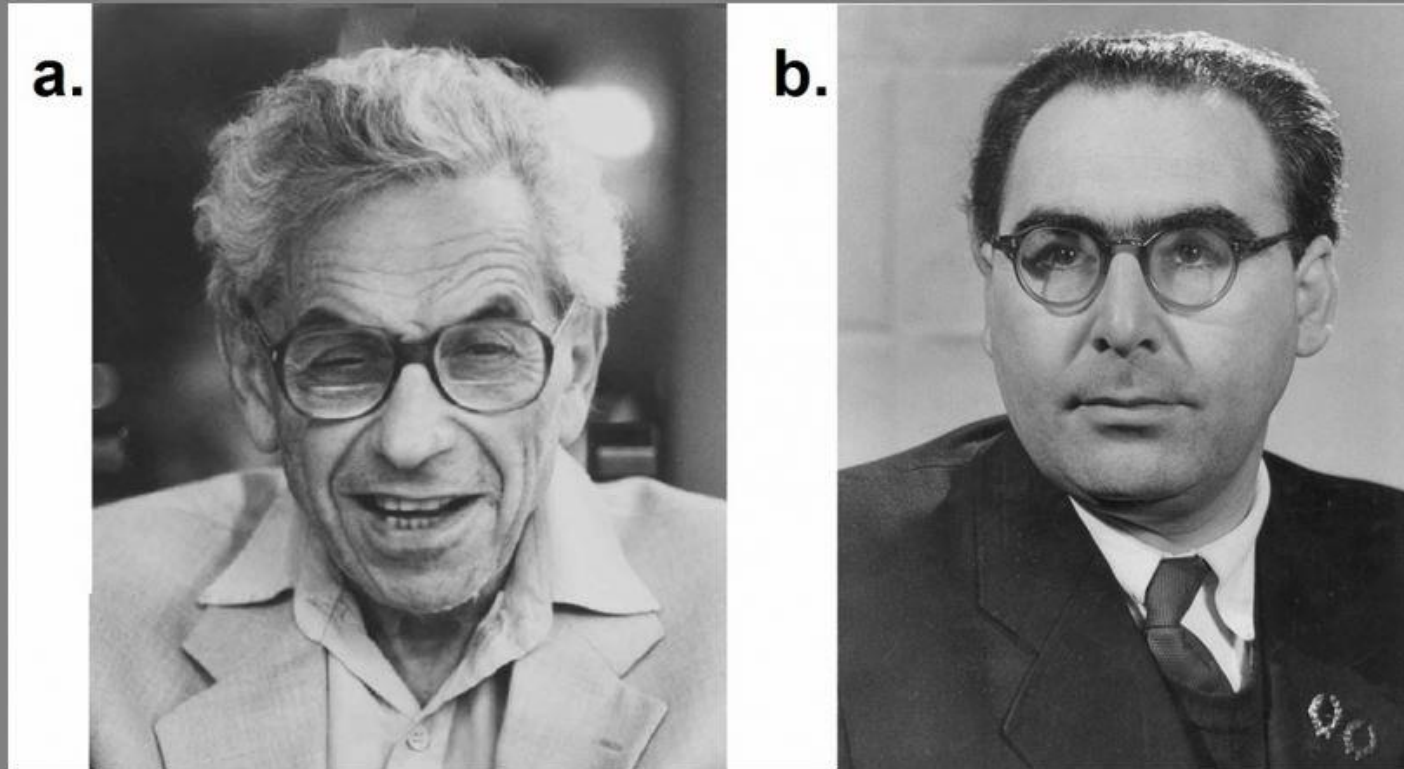


Image 3.2

**(a) Pál Erdős (1913-1996)**

Hungarian mathematician known for both his exceptional scientific output and eccentricity. Indeed, Erdős published more papers than any other mathematician in the history of mathematics. He co-authored papers with over five hundred mathematicians, inspiring the concept of *Erdős number*. His legendary personality and profound professional impact has inspired two biographies [12, 13] and a documentary [14] ([Video 3.1](#)).

**(b) Alfréd Rényi (1921-1970)**

Hungarian mathematician with fundamental contributions to combinatorics, graph theory, and number theory. His impact goes beyond mathematics: The Rényi entropy is widely used in chaos theory and the random network theory he co-developed is at the heart of network science. He is remembered through the hotbed of Hungarian mathematics, the Alfréd Rényi Institute of Mathematics in Budapest.

# Zufällige Netzwerke

Verteilungsfunktion  
der Knotengrade

$$P(k)$$

bzw.  $N(k) := N * P(k)$

## VI. CLASSICAL RANDOM GRAPHS, THE ERDÖS-RÉNYI MODEL

The simplest and most studied network with undirected edges was introduced by Erdős and Rényi (ER model) [77,78]. In this network:

- (i) the total number of vertices,  $N$ , is fixed;
- (ii) the probability that two arbitrary vertices are connected equals  $p$ .

One sees that, on average, the network contains  $pN(N-1)/2$  edges. The degree distribution is binomial,

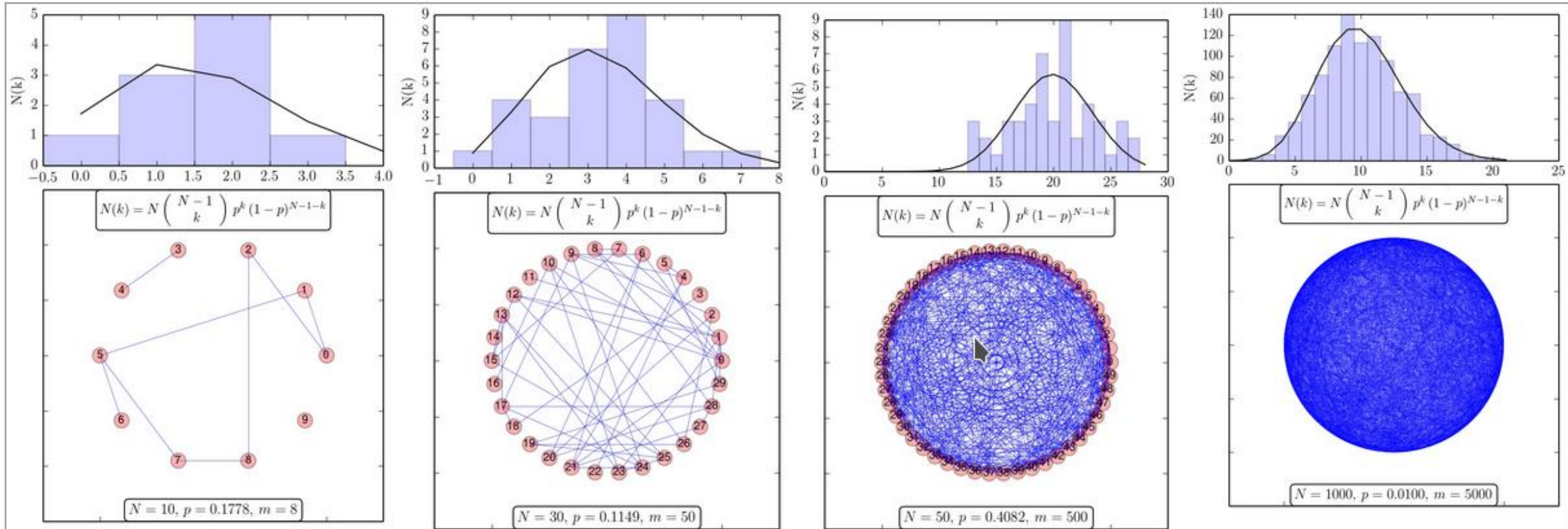
$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}, \quad (4)$$

so the average degree is  $\bar{k} = p(N-1)$ . For large  $N$ , the distribution, Eq. (4) takes the Poisson form,

$$P(k) = e^{-\bar{k}} \bar{k}^k / k!. \quad (5)$$

# Python Programm *RandomNetwork.py*

## II.2.1 Zufällige Netzwerke (Random Networks)



Ergebnisse des Python Skriptes RandomNetwork.py: Zufallsgraph und die zugehörige Verteilungsfunktion der Knotengrade (schwarze Kurve: analytische Verteilung).

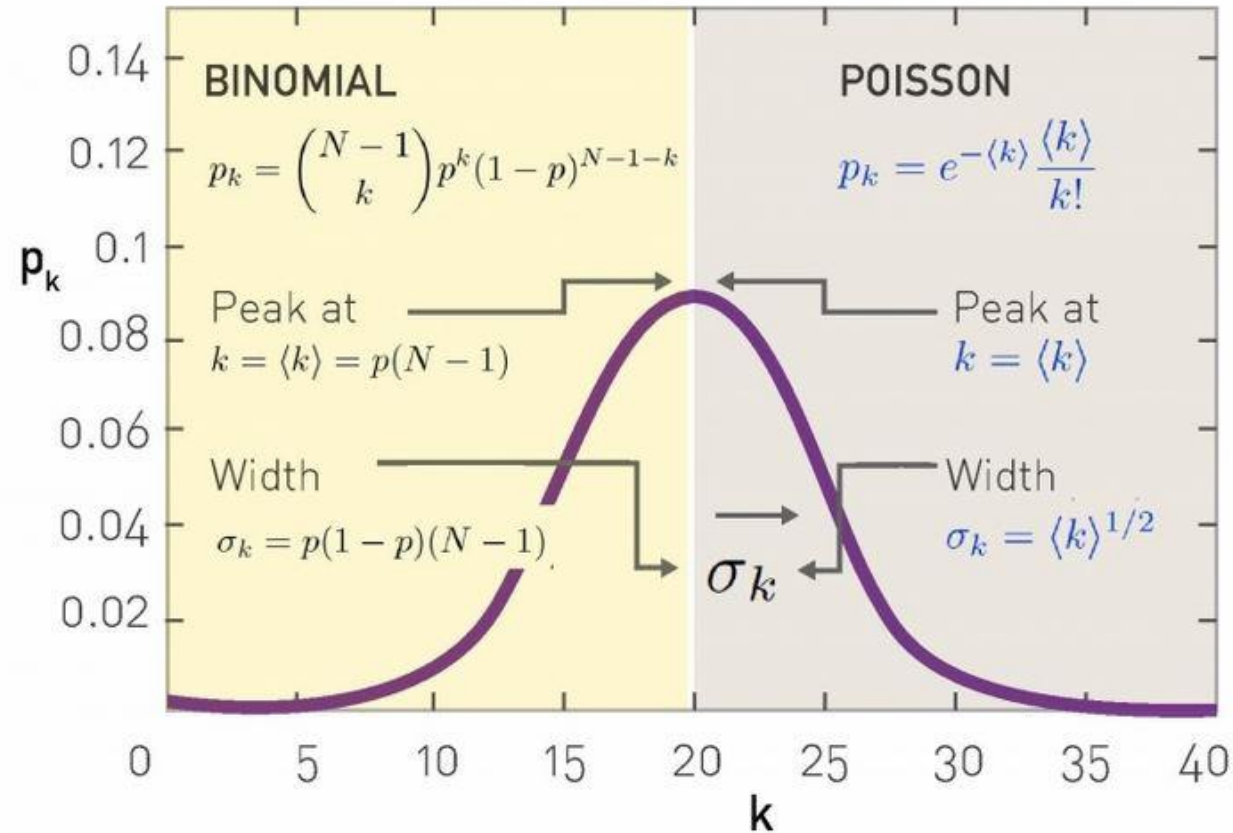


Image 3.4

### Binomial vs. Poisson Degree Distribution

The exact form of the degree distribution of a random network is the binomial distribution (left half). For  $N \gg \langle k \rangle$  the binomial is well approximated by a Poisson distribution (right half). As both formulas describe the same distribution, they have the identical properties, but they are expressed in terms of different parameters: The binomial distribution depends on  $p$  and  $N$ , while the Poisson distribution has only one parameter,  $\langle k \rangle$ . It is this simplicity that makes the Poisson form preferred in calculations.

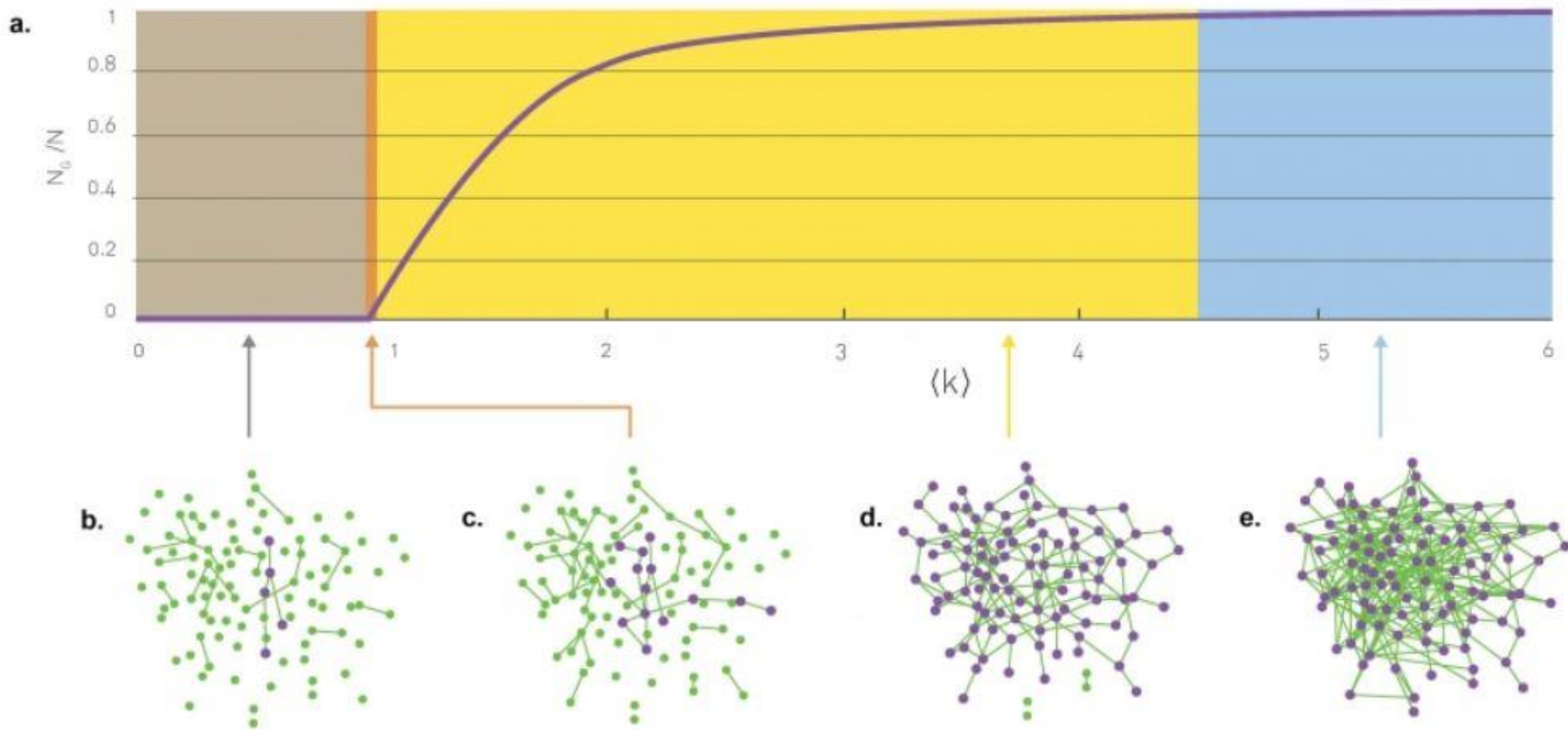


Image 3.7

### Evolution of a Random Network

- The relative size of the giant component in function of the average degree  $\langle k \rangle$  in the Erdős-Rényi model. The figure illustrates the phase transition at  $\langle k \rangle = 1$ , responsible for the emergence of a giant component with nonzero  $N_G$
- A sample network and its properties in the four regimes that characterize a random network.



# Jupyter Notebook: RandomNetworks.ipynb

## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

### (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 02.11.2020

Zweiter Vorlesungsteil:

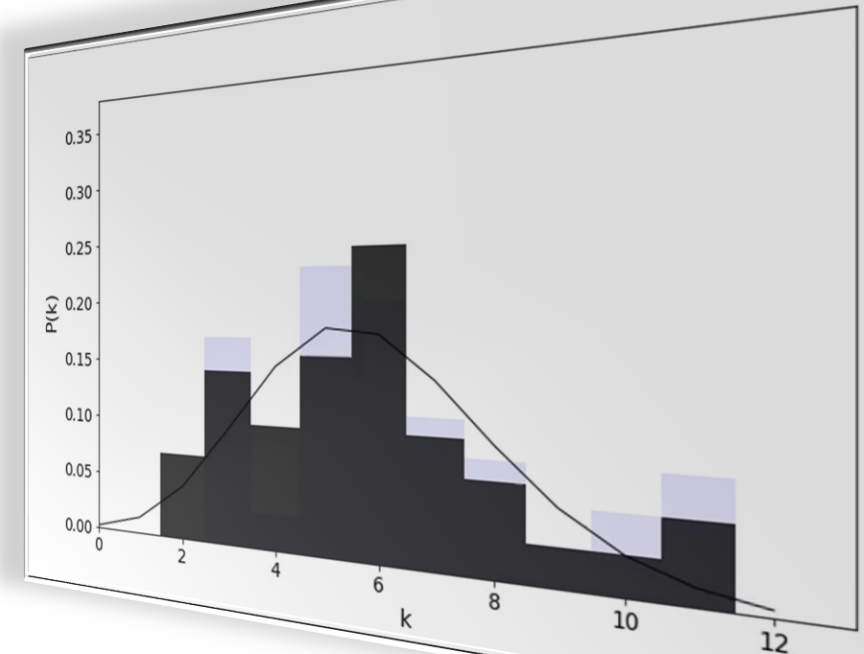
Zufällige komplexe Netzwerke (random networks)

### Einführung

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen: Zufällige Netzwerke (Random Networks: Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerke werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt), Kleine Welt-Netzwerke (Small World Networks, Kleine Welt-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus), Exponentielle Netzwerke (Exponential Networks) und Skalenfreie Netzwerke (Scale-Free Networks).

Bei einigen Modellnetzwerken können analytische Ergebnisse gewonnen werden. Im folgenden betrachten wir die Klasse der zufällige Netzwerke. Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerken werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt. Im Erdos-Renyi Modell (Erdos and Renyi, 1959) werden  $N$  Knoten zufällig mit  $L$  ungerichteten Kanten verbunden. Die Wahrscheinlichkeit  $p$ , das ein Knoten mit dem anderen verbunden ist demnach  $p = \frac{2L}{N(N-1)}$ . Die Verteilungsfunktion der Knotengrade  $P(k)$  ist binomialverteilt:

$$P(k) = N(k)/N = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$



# Network Science

by Albert-László Barabási

Personal Introduction

1. Introduction

2. Graph Theory

3. Random Networks

4. The Scale-Free Property

5. The Barabási-Albert Model

6. Evolving Networks

7. Degree Correlations

8. Network Robustness

9. Communities

10. Spreading Phenomena

Preface

<http://networksciencebook.com/>

Start Reading

English

Русский

Magyar

فارسی

日本語

### Section 3.2

#### The Random Network Model

Wie erzeugt man mittels eines mathematischen Algorithmus ein zufälliges Netzwerk (siehe Box 3.1)

### Section 3.4

#### Degree Distribution

Wie sieht die Verteilungsfunktion der Knotengrade in zufällige Netzwerken aus (siehe Image 3.4 Binomial vs. Poisson Degree Distribution)

### Section 3.5

#### Real Networks are Not Poisson

Vergleich: Real existierende Netzwerke  $\leftrightarrow$  Zufällige Netzwerke (siehe Image 3.6 Degree Distribution of Real Networks)

### Section 3.6

#### The Evolution of a Random Network

Relativen Größe des Hubs (grösster verbundener Knotencluster) hängt von dem durchschnittlichen Knotengrad des Netzwerkes ab.  
Definition von unterschiedlichen Regimen in zufälligen Netzwerken (subcritical, supercritical, fully connected) (siehe Image 3.7 Evolution of a Random Network)

### Section 3.7

#### Real Networks are Supercritical

Sind real existierende Netzwerke subcritical, supercritical oder fully connected? (siehe Table 3.1 Are Real Networks Connected? und Image 3.9 Most Real Networks are Supercritical)

### Section 3.8

#### Small Worlds

Definition der kleinen Welt Eigenschaft in komplexen Netzwerken "In the language of network science the small world phenomenon implies that the distance between two randomly chosen nodes in a network is short." Mittlerer Abstand zwischen zwei Knoten im Netzwerk  $\langle d \rangle$  bestimmt die Eigenschaft von kleinen Welt Netzwerken (siehe Image 3.10 Six Degree of Separation and Image 3.11 Why are Small Worlds Surprising? und Table 3.2 Six Degrees of Separation)

### Section 3.9

#### Clustering Coefficient

Der Clusterkoeffizient in real existierenden und zufälligen Netzwerken (siehe Image 3.13 Clustering in Real Networks und Box 3.9 Watts-Strogatz Model)

## Small Worlds

The *small world phenomenon*, also known as *six degrees of separation*, has long fascinated the general public. It states that if you choose any two individuals anywhere on Earth, you will find a path of at most six acquaintances between them ([Image 3.10](#)). The fact that individuals who live in the same city are only a few handshakes from each other is by no means surprising. The small world concept states, however, that even individuals who are on the opposite side of the globe can be connected to us via a few acquaintances.

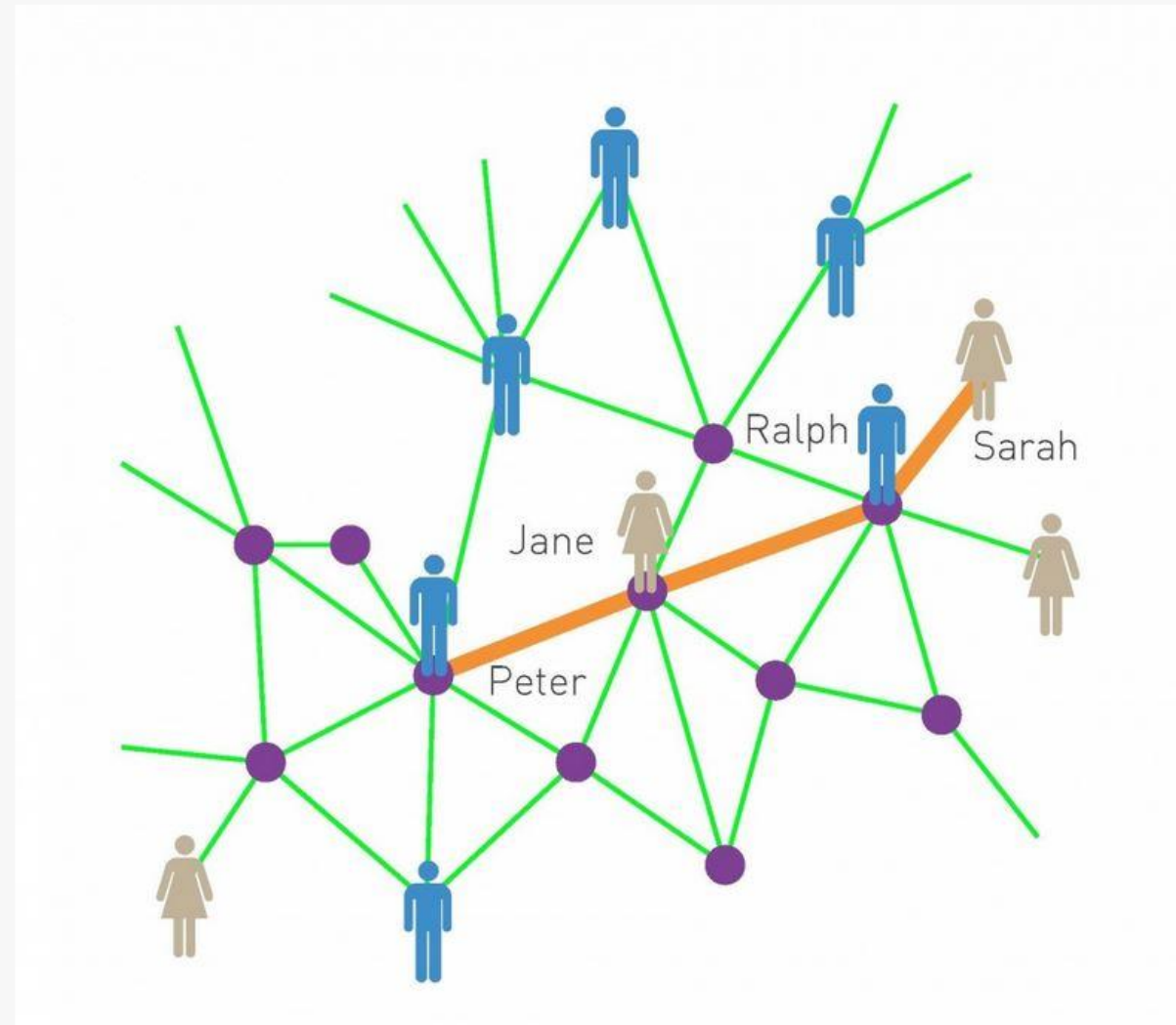
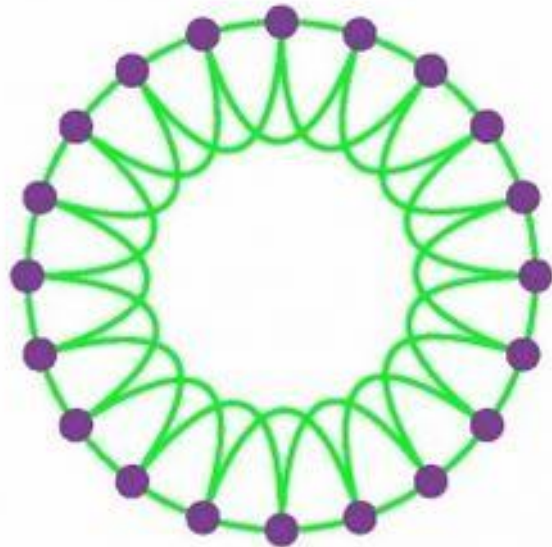


Image 3.10

Six Degree of Separation

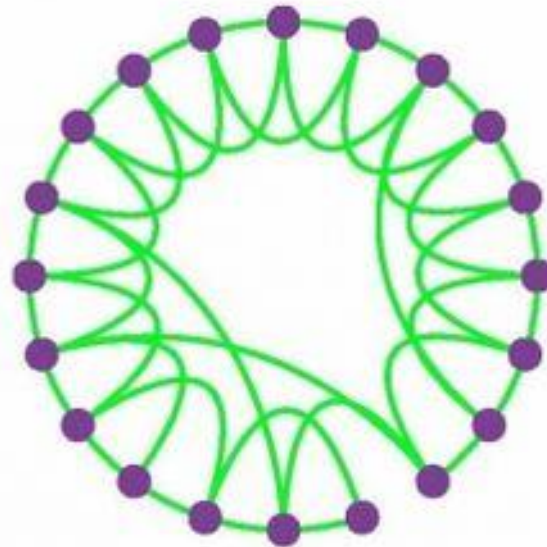
**a.**

REGULAR



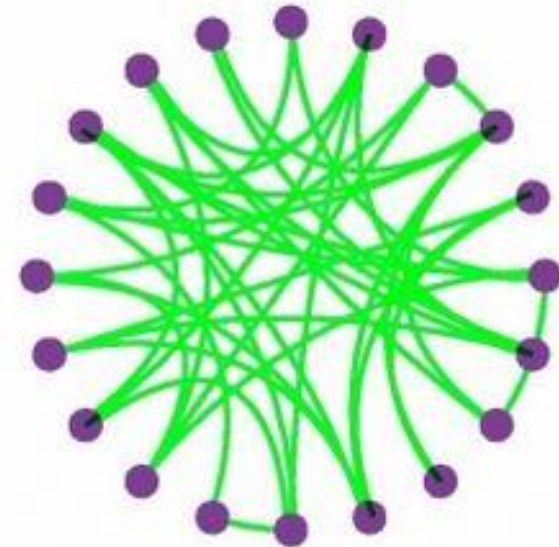
**b.**

SMALL-WORLD



**c.**

RANDOM



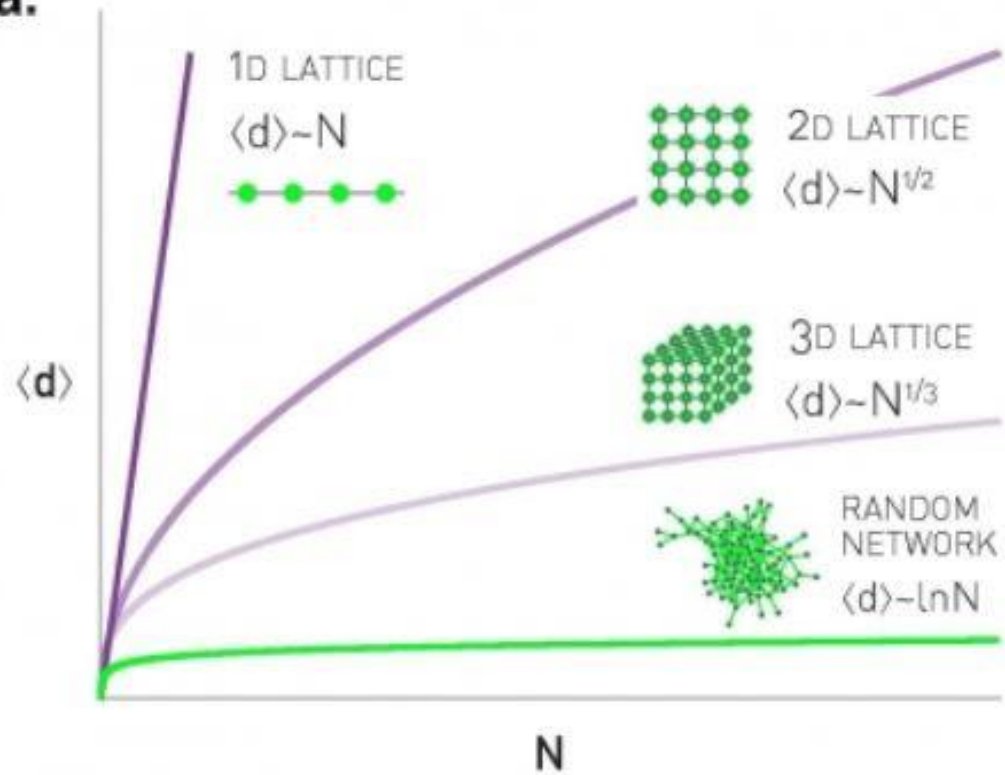
$p = 0$



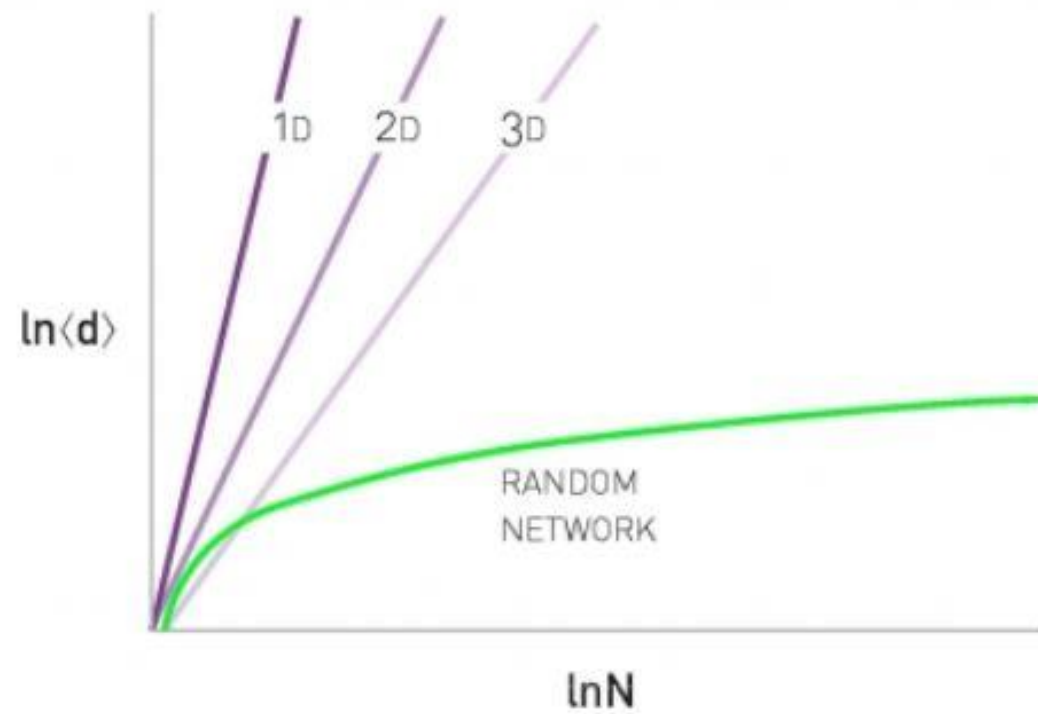
$p = 1$

Increasing randomness

a.



b.



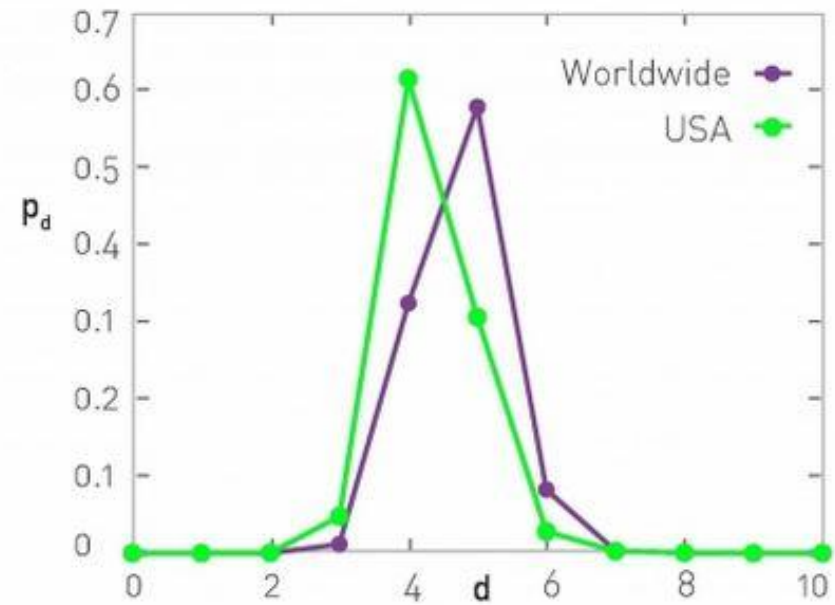
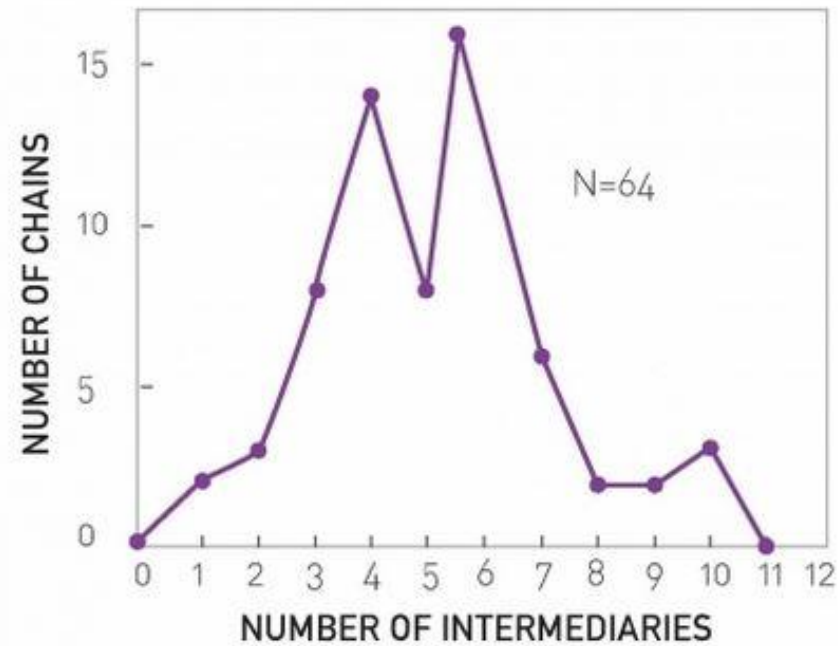


Image 3.12

### Six Degrees? From Milgram to Facebook

- In Milgram's experiment 64 of the 296 letters made it to the recipient. The figure shows the length distribution of the completed chains, indicating that some letters required only one intermediary, while others required as many as ten. The mean of the distribution was 5.2, indicating that on average six 'handshakes' were required to get a letter to its recipient. The playwright John Guare renamed this 'six degrees of separation' two decades later. After [25].
- The distance distribution,  $p_d$ , for all pairs of Facebook users worldwide and within the US only. Using Facebook's  $N$  and  $L$  (3.19) predicts the average degree to be approximately 3.90, not far from the reported four degrees. After [18].

## 19 Degrees of Separation

How many clicks do we need to reach a randomly chosen document on the Web? The difficulty in addressing this question is rooted in the fact that we lack a complete map of the WWW—we only have access to small samples of the full map. We can start, however, by measuring the WWW's average path length in samples of increasing sizes, a procedure called *finite size scaling*. The measurements indicate that the average path length of the WWW increases with the size of the network as [21]

$$\langle d \rangle \approx 0.35 + 0.89 \ln N$$

In 1999 the WWW was estimated to have about 800 million documents [22], in which case the above equation predicts  $\langle d \rangle \approx 18.69$ . In other words in 1999 two randomly chosen documents were on average 19 clicks from each other, a result that became known as *19 degrees of separation*. Subsequent measurements on a sample of 200 million documents found  $\langle d \rangle \approx 16$  [23], in good agreement with the  $\langle d \rangle \approx 17$  prediction. Currently the WWW is estimated to have about trillion nodes ( $N \sim 10^{12}$ ), in which case the formula predicts  $\langle d \rangle \approx 25$ . Hence  $\langle d \rangle$  is not fixed but as the network grows, so does the distance between two documents.

The average path length of 25 is much larger than the proverbial six degrees (BOX 3.7). The difference is easy to understand: The WWW has smaller average degree and larger size than the social network. According to (3.19) both of these differences increase the Web's diameter.



Network	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle d \rangle$	$d_{max}$	$\ln N / \ln \langle k \rangle$
Internet	192,244	609,066	6.34	6.98	26	6.58
WWW	325,729	1,497,134	4.60	11.27	93	8.31
Power Grid	4,941	6,594	2.67	18.99	46	8.66
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	11.72	39	11.42
Email	57,194	103,731	1.81	5.88	18	18.4
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	5.35	15	4.81
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	3.91	14	3.04
Citation Network	449,673	4,707,958	10.43	11.21	42	5.55
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	2.98	8	4.04
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	5.61	14	7.14

Table 3.2

### Six Degrees of Separation

The average distance  $\langle d \rangle$  and the maximum distance  $d_{max}$  for the ten reference networks. The last column provides  $\langle d \rangle$  predicted by (3.19), indicating that it offers a reasonable approximation to the measured  $\langle d \rangle$ . Yet, the agreement is not perfect - we will see in the next chapter that for many real networks (3.19) needs to be adjusted. For directed networks the average degree and the path lengths are measured along the direction of the links.

# Jupyter Notebook: SmallWorldNetworks.ipynb

## Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer

### (Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 02.11.2020

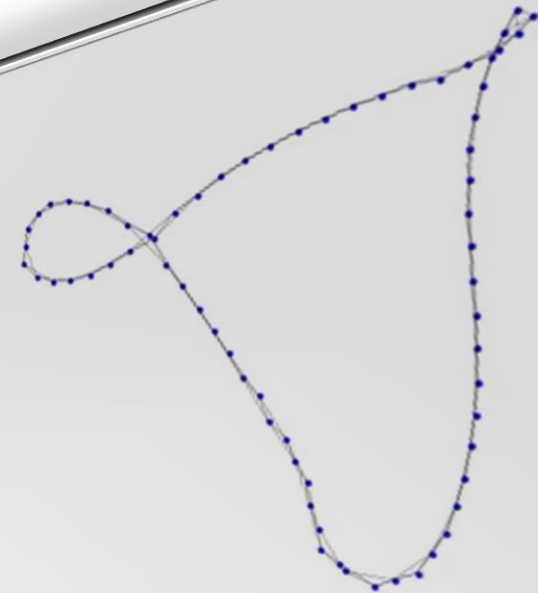
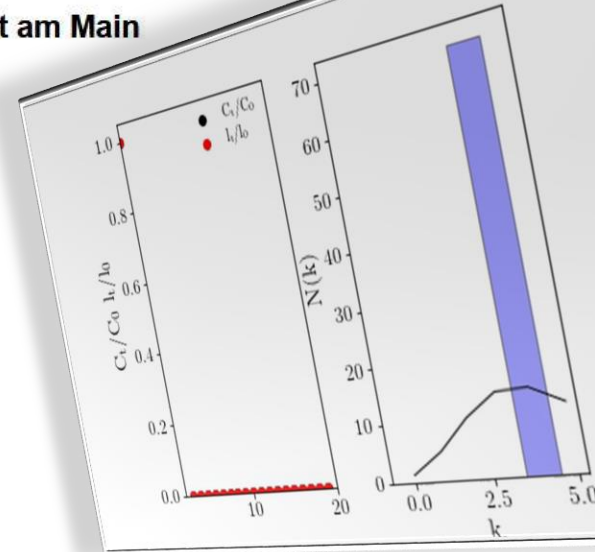
#### Zweiter Vorlesungsteil:

Kleine Welt Netzwerke (small world networks)

#### Einführung

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen: Zufällige Netzwerke (Random Networks: Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerke werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt), Kleine Welt-Netzwerke (Small World Networks, Kleine Welt-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus), Exponentielle Netzwerke (Exponential Networks) und Skalenfreie Netzwerke (Scale-Free Networks). Bei einigen Modellnetzwerken können analytische Ergebnisse gewonnen werden. Im folgenden betrachten wir die Klasse der kleinen Welt Netzwerke.

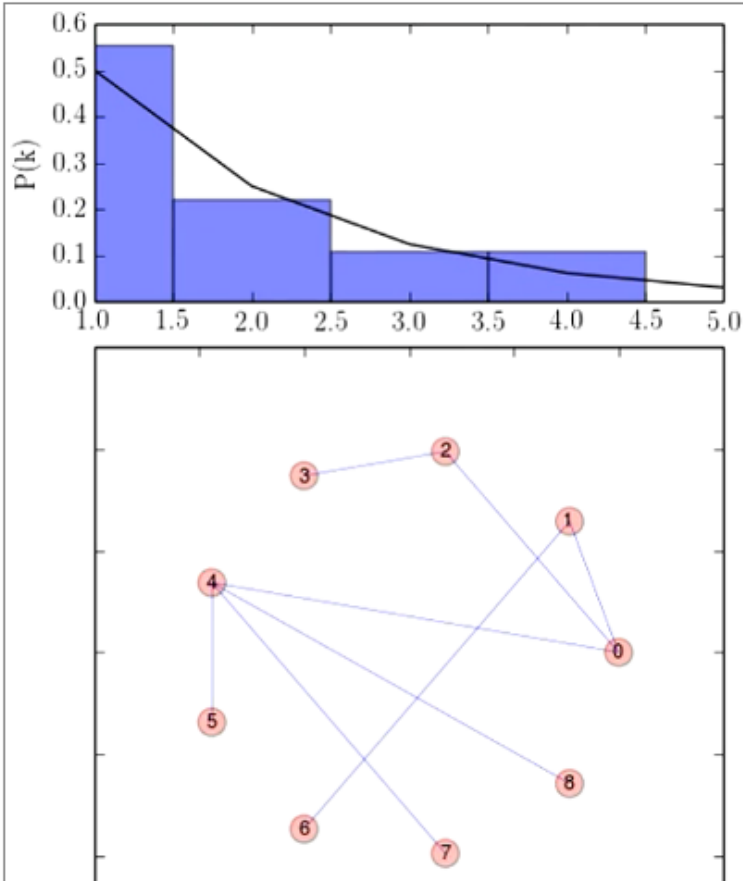
"Kleine Welt"-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus. Ein einfaches Modell welches den Übergang von einem Netzwerk mit regulärer Struktur (Gitter-ähnlicher Struktur) über ein "kleines Welt"-Netzwerk hin zu einem zufälligen Netzwerk veranschaulicht, wurde von Watts und Strogatz im Jahre 1998 vorgestellt. Im einfachsten Fall startet man hierbei mit einem eindimensionalen Gitter-Netzwerk mit  $N$  Knoten, wobei jeder Knoten mit seinen  $K$ -nächsten Nachbarn (im folgenden Beispiel speziell  $K=2$ ) verbunden ist. Nun löscht man mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  jede der existierenden Verbindungen (Kanten) und stellt eine neue Kante im Netzwerk in zufälliger Weise her. Für  $p=0$  bleibt die ursprüngliche Gitterstruktur erhalten und für  $p=1$  erzeugt man ein vollständig verbundenes Netzwerk. Watts und Strogatz konnten in ihrem Modell zeigen, dass man schon für kleine  $p$  ( $0 < p \ll 1$ ) ein "kleines Welt"-Netzwerk erzeugt, das durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten gekennzeichnet ist. Im folgenden



## Vorlesung 7

In dieser Vorlesung werden die Eigenschaften von *exponentiellen* und *skalenfreien* Netzwerken thematisiert und die zugrundeliegenden Prinzipien ihrer Entstehung besprochen.

### Exponentielle Netzwerke



Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht die iterative Erzeugung eines exponentiellen Netzwerkes mittels eines zeitlichen Anwachsens der Netzwerkknoten. Zur Zeit  $t=0$  besteht das Netzwerk aus lediglich zwei Knoten (Knoten 0 und Knoten 1), welche durch eine ungerichtete Kante miteinander verbunden sind. Diesem Netzwerk fügt man nun in jedem Zeitabschnitt  $\Delta t = 1$  einen weiteren Knoten hinzu und verbindet diesen in zufälliger Weise mit einem der Knoten des bestehenden Netzwerkes. Das erste Bild der Animation veranschaulicht das Netzwerk zur Zeit  $t=1$ , wobei sich durch Zufall der neue Knoten (Knoten 2) mit dem Knoten 0 verlinkt hat. Im Laufe der Zeit entwickelt sich ein *exponentielles Netzwerk* dessen Struktur im unteren Bild der nebenstehenden Animation im NetworkX-'shell layout' dargestellt ist. Die Verteilungsfunktion der Knotengrade (blaue Balken im oberen Bild der Animation) nähert sich für große Zeiten dem folgenden exponentiellen Verlauf an:  $P(k) = 2^{-k}$  (siehe schwarze Kurve im oberen Bild). Obwohl sich die in das Netzwerk hinzugefügten Knoten in rein zufälliger Weise mit dem Rest des Netzwerkes verlinken, entsteht eine Verteilungsfunktion der Knotengrade, die sehr unterschiedlich zu dem

## Vorlesung 7

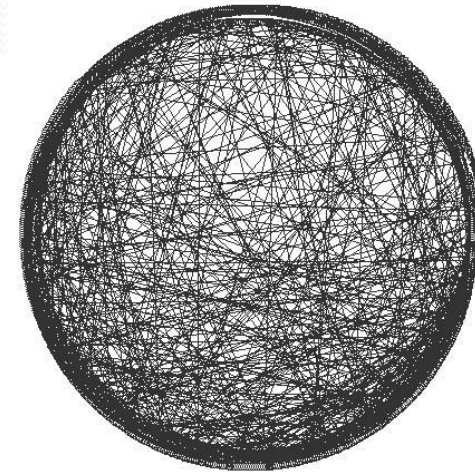
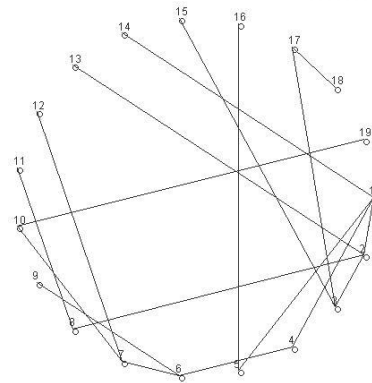
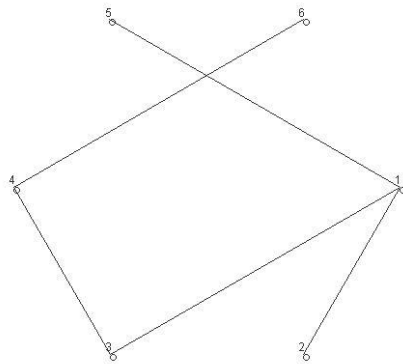
In der vorigen Vorlesung hatten wir die beiden Netzwerk-Klassen der zufälligen und 'kleine Welt' Netzwerke kennengelernt. In dieser Vorlesung befassen wir uns mit den Eigenschaften von *exponentiellen* und *skalenfreien* Netzwerken. In exponentiellen und skalenfreien Netzwerken besitzen sehr viele Knoten wenig Kanten und einige wenige Knoten sehr viele Kanten. Im Gegensatz zu zufälligen Netzwerken ist die Verteilungsfunktion der Knotengrade ( $P(k)$ ) somit nicht binomialverteilt, sondern folgt einem anderen mathematischen Verhalten.

*Exponentielle Netzwerke* entstehen auf natürliche Weise mittels eines zeitlichen Anwachsens der Netzwerkknoten. Betrachtet man z.B. ein Netzwerk, das zunächst nur aus einer geringen Anzahl von Knoten und Kanten besteht und fügt diesem Netzwerk nach und nach weitere Netzwerk Knoten hinzu, wobei man jeden neuen Knoten in zufälliger Weise mit einem der Knoten des bestehenden Netzwerkes verlinkt, so erhält man ein exponentielles Netzwerk (siehe Animation im linken Panel dieser Vorlesung). Die Verteilungsfunktion der Knotengrade bei exponentiellen Netzwerken folgt näherungsweise dem folgenden mathematischen Gesetz:  $P(k) = 2^{-k}$ .

Die Klasse der *skalenfreien Netzwerke* ist die wohl wichtigste aller Netzwerk-Klassen da diese topologische Eigenschaft in vielen real existierenden Netzwerken realisiert ist (siehe Table 4.1: Albert-Laszlo Barabasi, Network Science). Die Verteilungsfunktion der Knotengrade von skalenfreien Netzwerken wird mathematisch durch eine 'power-law distribution' beschrieben ( $P(k) \sim k^{-\gamma}$ ), wobei viele real existierende komplexe Netzwerke einen Exponenten  $\gamma$  im folgenden Wertebereich besitzen  $2 < \gamma < 3$ . Die Bezeichnung *skalenfrei* gründet hierbei auf der

# Exponentielle und Skalenfreie Netzwerke

- Bei exponentiellen und Skalenfreien Netzwerken besitzen viele Knoten wenig Kanten und einige wenige Knoten sehr viele Kanten.
- Im folgenden wollen wir die Konstruktion eines solchen Netzwerks mittels einer Computersimulation betrachten:



# Jupyter Notebook: ExpScaleFreeNetworks.ipynb

Konstruktion eines  
exponentiellen Netzwerkes

Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem  
Computer  
(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)

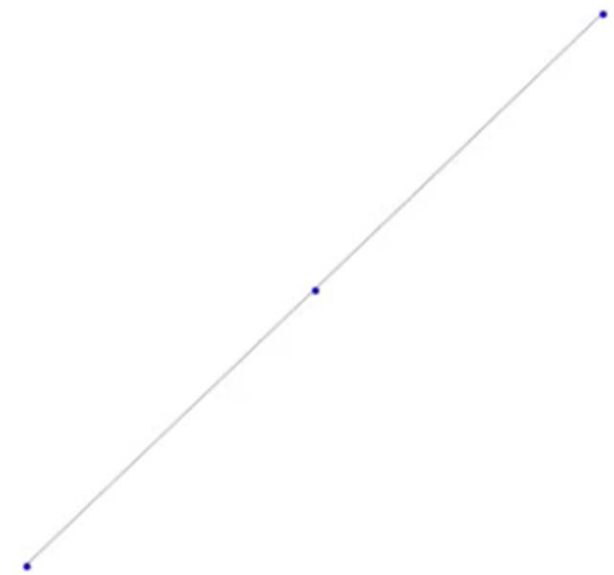
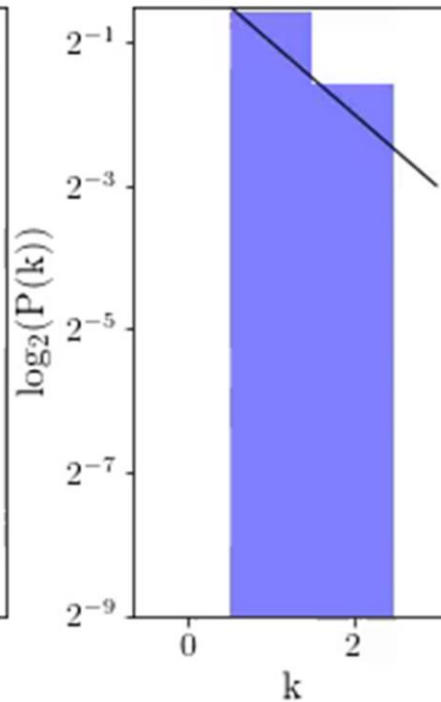
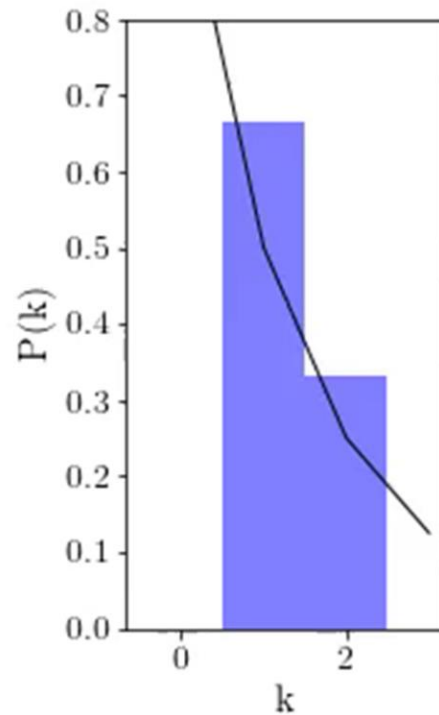
W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

Vorlesung gehalten an  
(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.r.  
Frankfurt am Main

Zweiter Vorlesung

Exponentielle und



# Konstruktion eines Skalenfreien Netzwerks

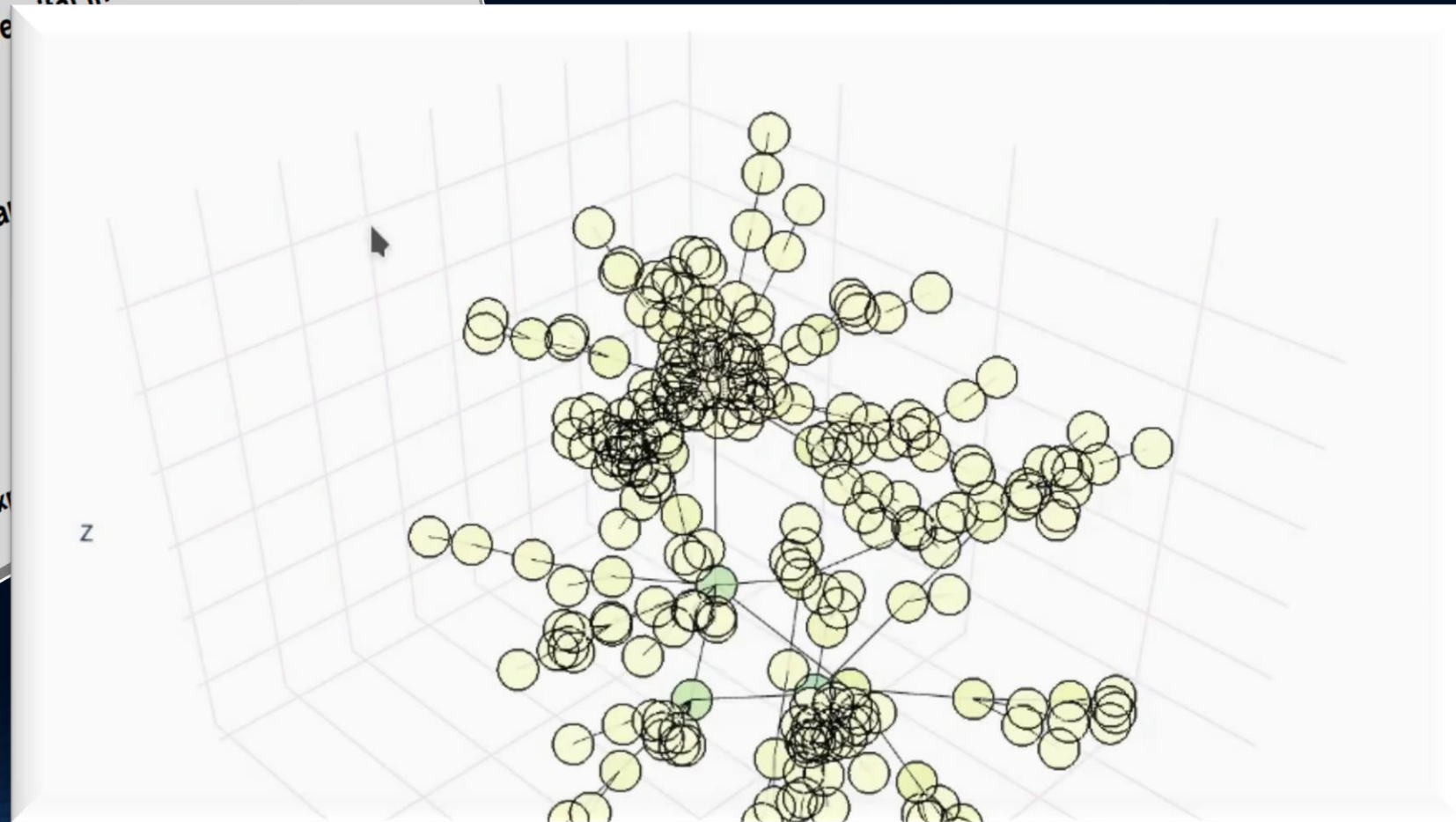
Das im folgenden konstruierte skalenfreie Netzwerk besitzt zwei wesentliche Eigenschaften:

- Zeitliches Anwachsen der Knoten
- Die Kantenwahl eines neu in das Netzwerk hinzukommenden Knotens erfolgt nach dem Prinzip des „Preferential Attachment“ (Die Knoten die schon viele Kanten haben bekommen mit einer höheren Wahrscheinlichkeit eine neue Kante, als die Knoten die bisher keinen, oder wenige Kanten aufweisen können)

**Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer**  
**(Physics of Socio-Economic Systems with the Computer)**  
Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main  
(Wintersemester 2020/21)  
von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hana  
Frankfurt am Main 02.11.2020  
Zweiter Vorlesungsteil:  
Exponentielle und skalenfreie Netzwerke (exp

Jupyter Notebook:  
ExpScaleFreeNetworks.ipynb

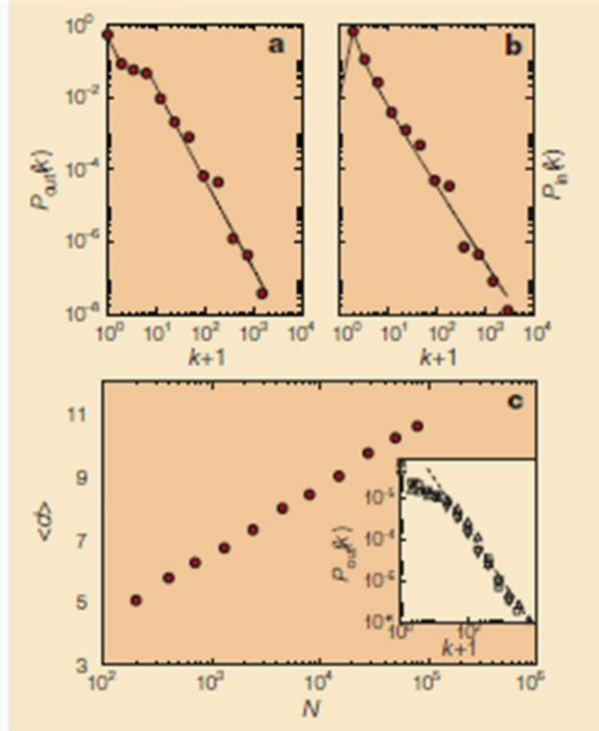
Bild eines  
skalenfreien Netzwerkes



## Diameter of the World-Wide Web

Despite its increasing role in communication, the World-Wide Web remains uncontrolled: any individual or institution can create a website with any number of documents and links. This unregulated growth leads to a huge and complex web, which becomes a large directed graph whose vertices are documents and whose edges are links (URLs) that point from one document to another. The topology of this graph determines the web's connectivity and consequently how effectively we can locate information on it. But its enormous size (estimated to be at least  $8 \times 10^8$  documents<sup>1</sup>) and the continual changing of documents and links make it impossible to catalogue all the vertices and edges.

The extent of the challenge in obtaining a complete topological map of the web is illustrated by the limitations of the commercial search engines: Northern Light, the search engine with the largest coverage, is estimated to index only 38% of the web<sup>1</sup>. Although much work has been done to map and characterize the Internet's infrastructure<sup>2</sup>, little is known about what really matters in the search for information — the topology of the web. Here we take a step towards filling this gap: we have used local connectivity measurements to construct a topological model of the World-Wide Web,



**Figure 1** Distribution of links on the World-Wide Web. **a**, Outgoing links (URLs found on an HTML document); **b**, incoming links (URLs pointing to a certain HTML document). Data were obtained from the complete map of the nd.edu domain, which contains 325,729 documents and 1,469,680 links. Dotted lines represent analytical fits used as input distributions in constructing the topological model of the web; the tail of the distributions follows  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , with  $\gamma_{out} = 2.45$  and  $\gamma_{in} = 2.1$ . **c**, Average of the shortest path between two documents as a function of system size, as predicted by the model. To check the validity of our predictions, we determined  $d$  for documents in the domain nd.edu. The measured  $\langle d_{nd.edu} \rangle = 11.2$  agrees well with the prediction  $\langle d_{5 \times 10^5} \rangle = 11.6$  obtained from our model. To show that the power-law tail of  $P(k)$  is a universal feature of the web, the inset shows  $P_{out}(k)$  obtained by starting from whitehouse.gov (squares), yahoo.com (triangles) and snu.ac.kr (inverted triangles). The slope of the dashed line is  $\gamma_{out} = 2.45$ , as obtained from nd.edu in **a**.

A particularly important quantity in a search process is the shortest path between two documents,  $d$ , defined as the smallest number of URL links that must be followed to navigate from one document to the other. We find that the average of  $d$  over all pairs of vertices is  $\langle d \rangle = 0.35 + 2.06 \log(N)$  (Fig. 1c), indicating that the web forms a small-world network<sup>5,7</sup>, which characterizes social or biological systems. For  $N = 8 \times 10^8$ ,  $\langle d_{web} \rangle = 18.59$ ; that is, two randomly chosen documents on the web are on average 19 clicks away from each other.

**Réka Albert, Hawoong Jeong,  
Albert-László Barabási**

*Department of Physics, University of Notre Dame,  
Notre Dame, Indiana 46556, USA*  
e-mail: alb@nd.edu



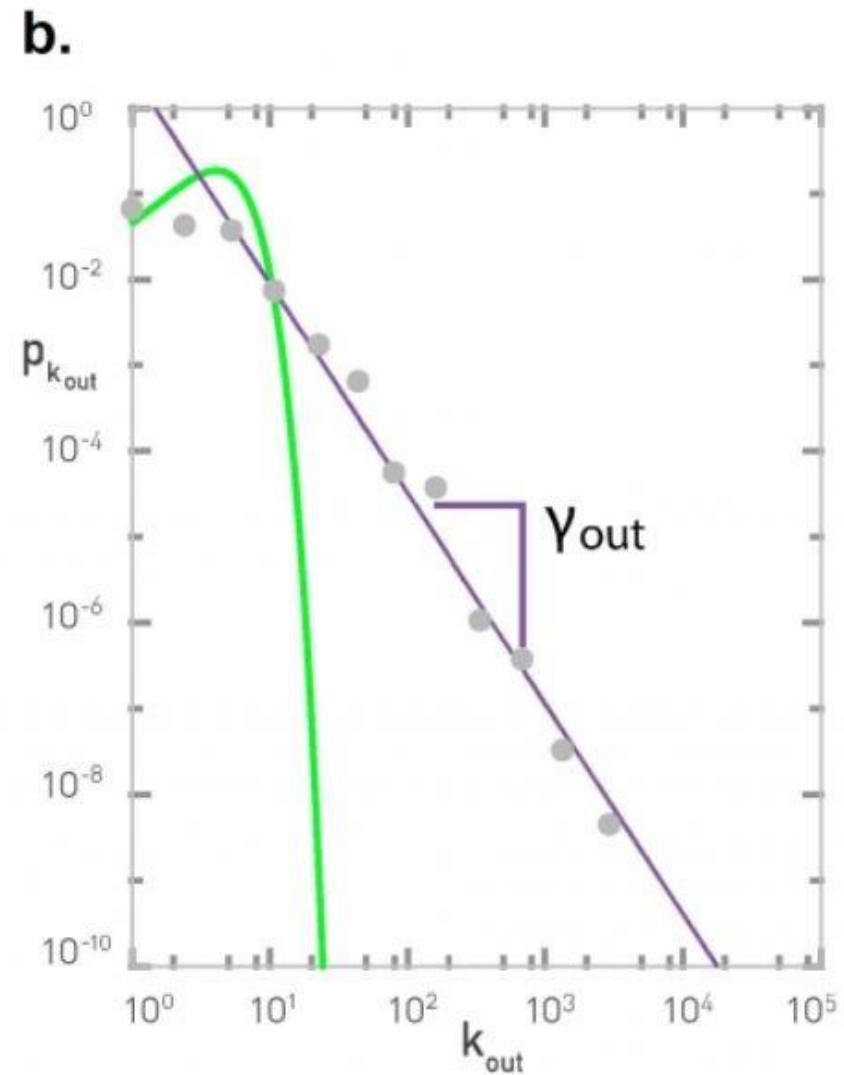
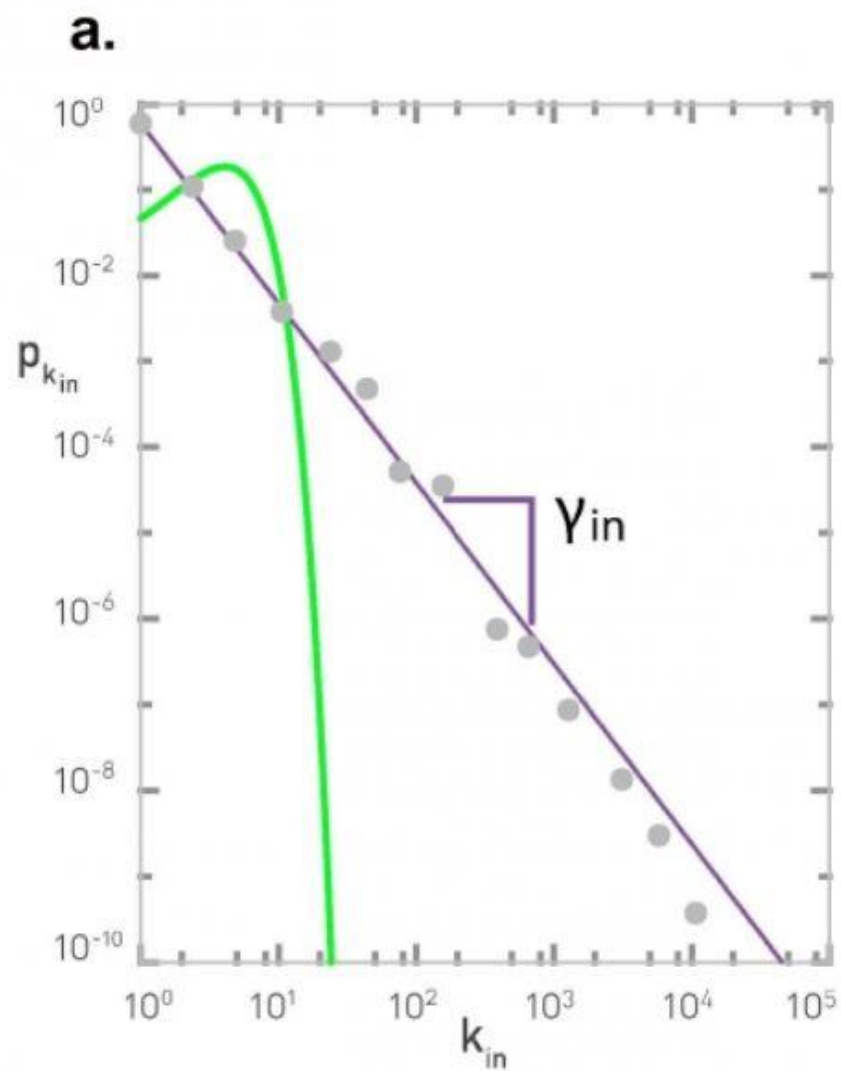


Image 4.2

### The Degree Distribution of the WWW

The incoming (a) and outgoing (b) degree distribution of the WWW sample mapped in the 1999 study of Albert *et al.* [1].

The degree distribution is shown on double logarithmic axis (log-log plot), in which a power law follows a straight line.

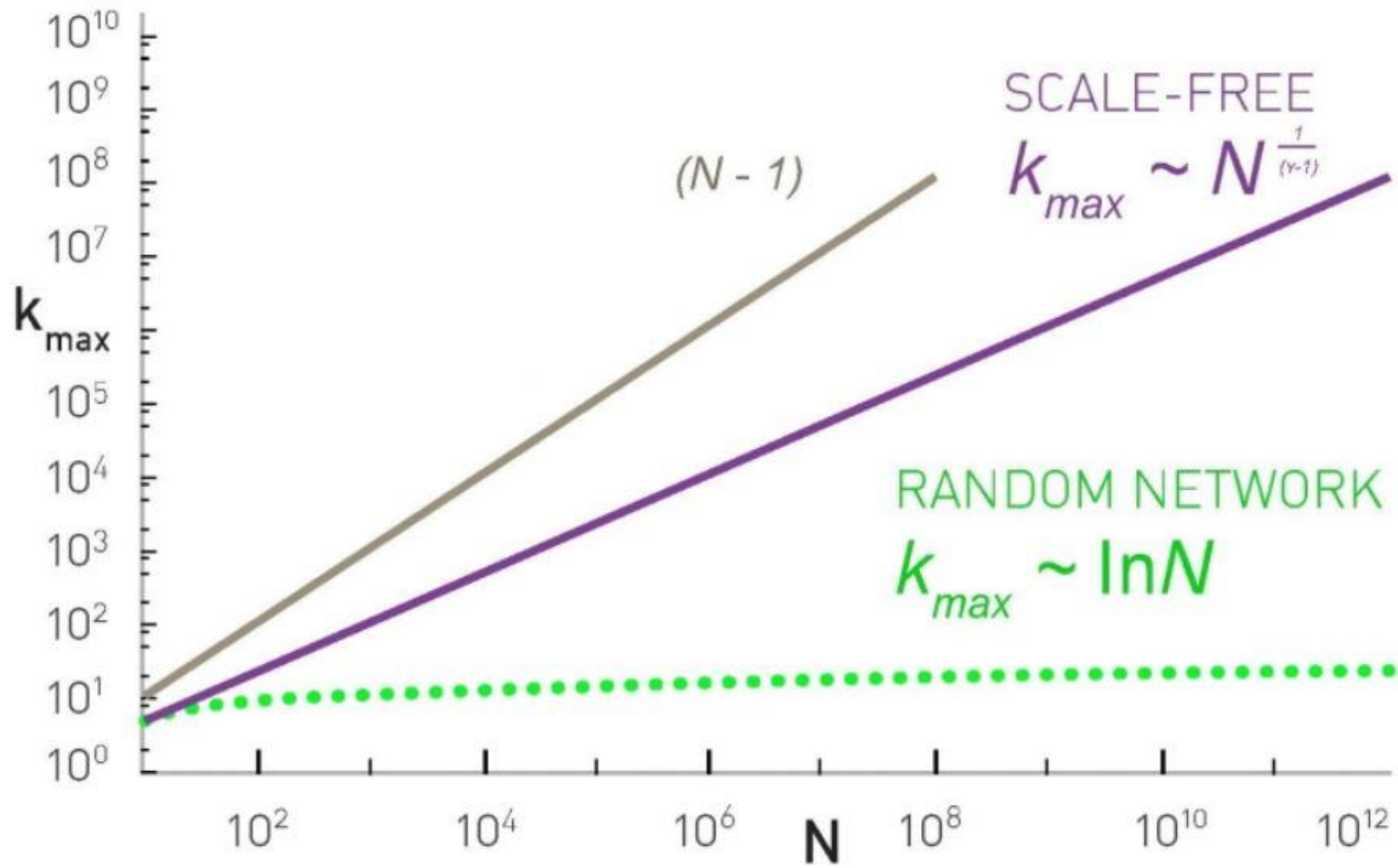


Image 4.5

**Hubs are Large in Scale-free Networks**

Image 4.2

Die Verteilungsfunktion der Knotengrade des Internets (WWW, links zwischen Internetseiten, gerichtetes Netzwerk) wird mathematisch durch eine „power-law distribution“ beschrieben.

Image 4.4 und 4.5

In skalenfreien Netzwerken entstehen sehr große Hubs (Hauptunterschied zu zufälligen Netzwerken)

Section 4.4:

Was bedeutet „skalenfrei“?

Tabelle 4.1, Image 4.7 und 4.8:

Skalenfreie Netzwerke mit  $\gamma < 3$  besitzen keine sinnvolle interne Knotengradskala. Greift man zufällig einen Knoten aus dem Netzwerk, so kann man seinen Knotengrad nicht vorher einschränken; er kann sehr klein oder sehr sehr groß sein. Die Standardabweichung der Knotengrade divergiert sogar für  $N \rightarrow \infty$ .

Universality Section 4.5, Box 4.2:

Man beobachtet die skalenfreie Eigenschaft in vielen unterschiedlichen real existierenden komplexen Netzwerken

Section 4.6:

Ultra small world Eigenschaft in realen Netzwerken (abhängig vom Exponenten  $\gamma$ )

Box 4.5:

Auswirkung und unterschiedliche Regime in Abhängigkeit vom Exponenten  $\gamma$ .

Box 4.6:

Warum gibt es keine realen Netzwerke mit  $\gamma < 2$ ?

Box 4.9:

Zusammenfassung der mathematischen Eigenschaften von skalenfreie Netzwerken

Das Barabasi-Albert Model der skalenfreien Netzwerke (Section 5)

<http://networksciencebook.com/chapter/5>

Im BA-Model werden die folgenden Prinzipien bei der Konstruktion des skalenfreien Netzwerkes benutzt:

- a) Zeitliches Anwachsen der Knoten und Kanten
- b) Preferential Attachement (Section 5.2, Image 5.2)

Section 5.1:

Konstruktion eines skalenfreien Netzwerkes mit dem Barabasi-Albert Model

Section 5.6:

Vergleich: Exponentielle Netzwerke  $\leftrightarrow$  skalenfreie Netzwerke

Box 5.4:

Zusammenfassung der mathematischen Eigenschaften von skalenfreie Netzwerken

# Formation von „Communities“

<http://networksciencebook.com/chapter/9>

## Defining Communities

Our sense of communities rests on a second hypothesis (Image 9.4):

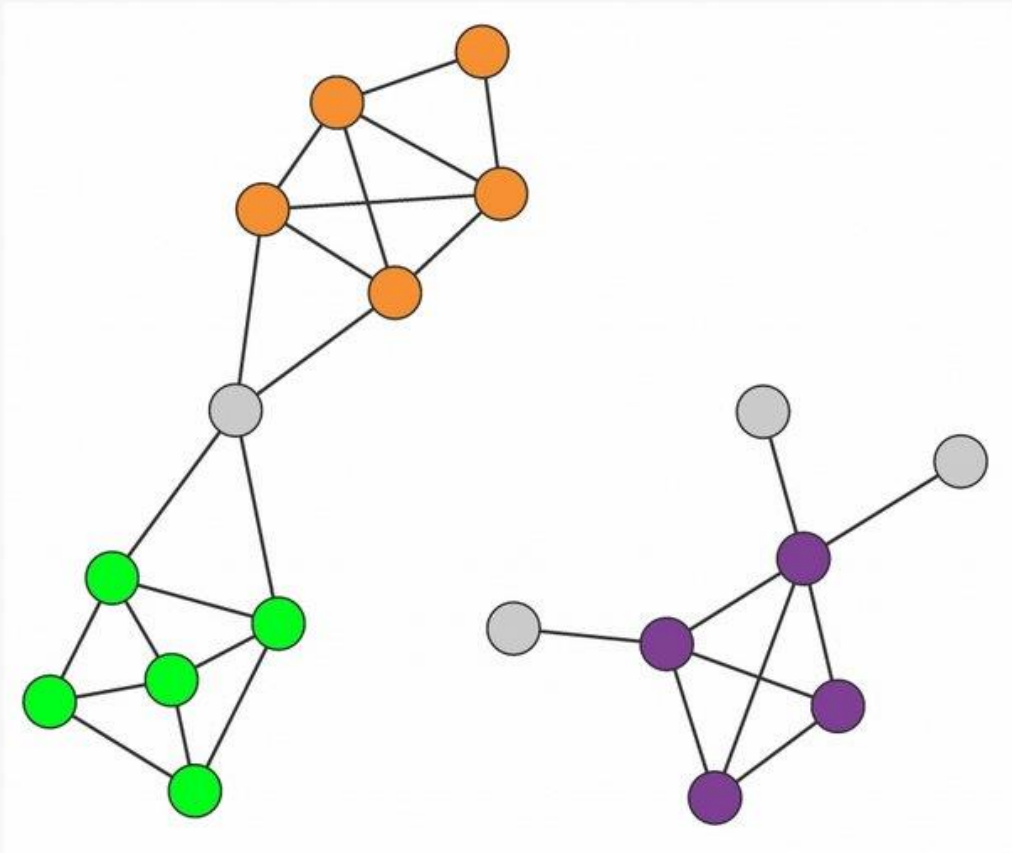


Image 9.4

### Connectedness and Density Hypothesis

Communities are locally dense connected subgraphs in a network. This expectation relies on two distinct hypotheses:

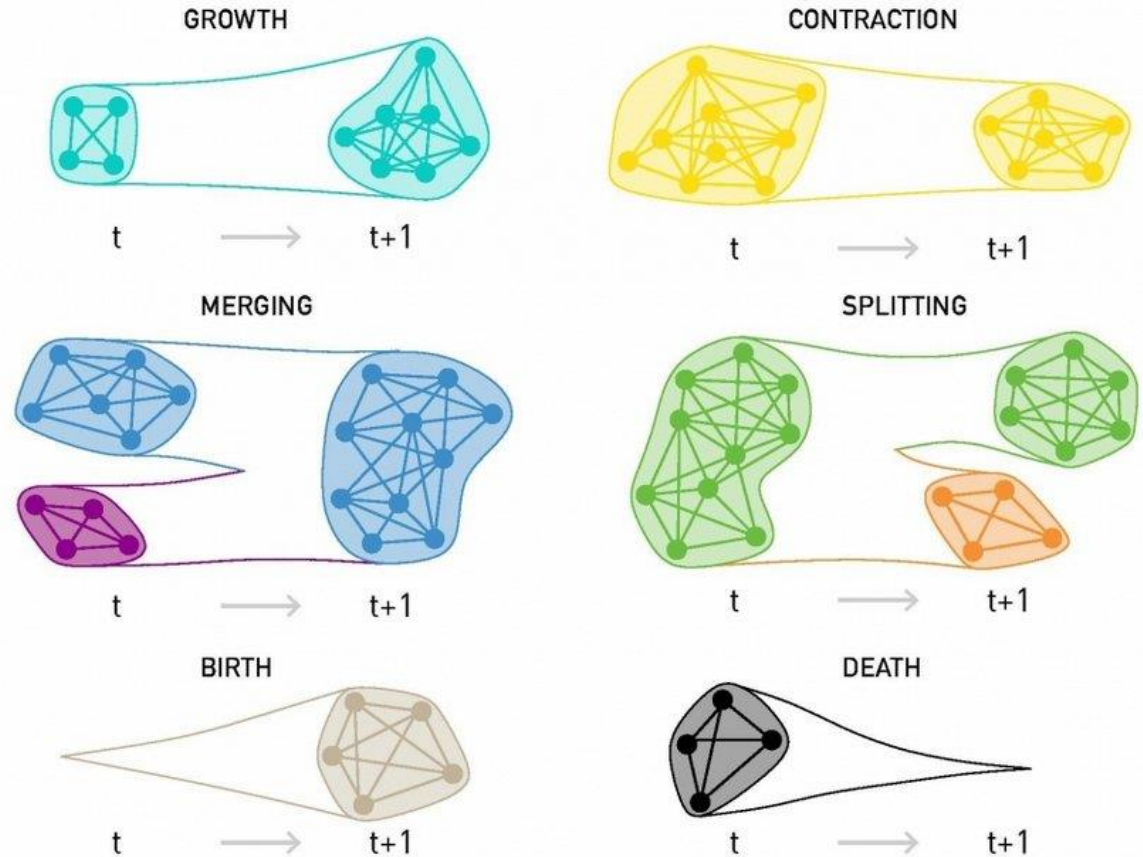


Image 9.31

### Evolving Communities

When networks evolve in time, so does the underlying community structure. All changes in community structure are the result of six elementary events in the life of a community, illustrated in the figure: a community can grow or contract; communities can merge or may split; new communities are born while others may disappear. After [50].

# Anwendungsfelder

## *komplexe Netzwerke*

Netzwerke finden sich in den unterschiedlichsten sozialen, physikalischen und biologischen Systemen

- **Biologische Netzwerke**
  - Protein- und Gennetzwerke
- **Soziale Netzwerke**
  - Beziehungs- und Freundschaftsnetzwerke
  - Netzwerke von Geschäftsbeziehungen und Firmenbeteiligungen
  - Internetbasierte, soziale Web2.0 Netzwerke
- **Technologische Netzwerke**
  - Transportnetzwerke (Flug-, Zugrouten)
  - Internetverbindungen zwischen Computerservern
- **Informationsnetzwerke**
  - Wissensnetzwerke, Verlinkungen von Internetseiten
  - Zitationsnetzwerke von wissenschaftlichen Artikeln
  - Linguistische Netzwerke

# Netzwerke in der Biologie

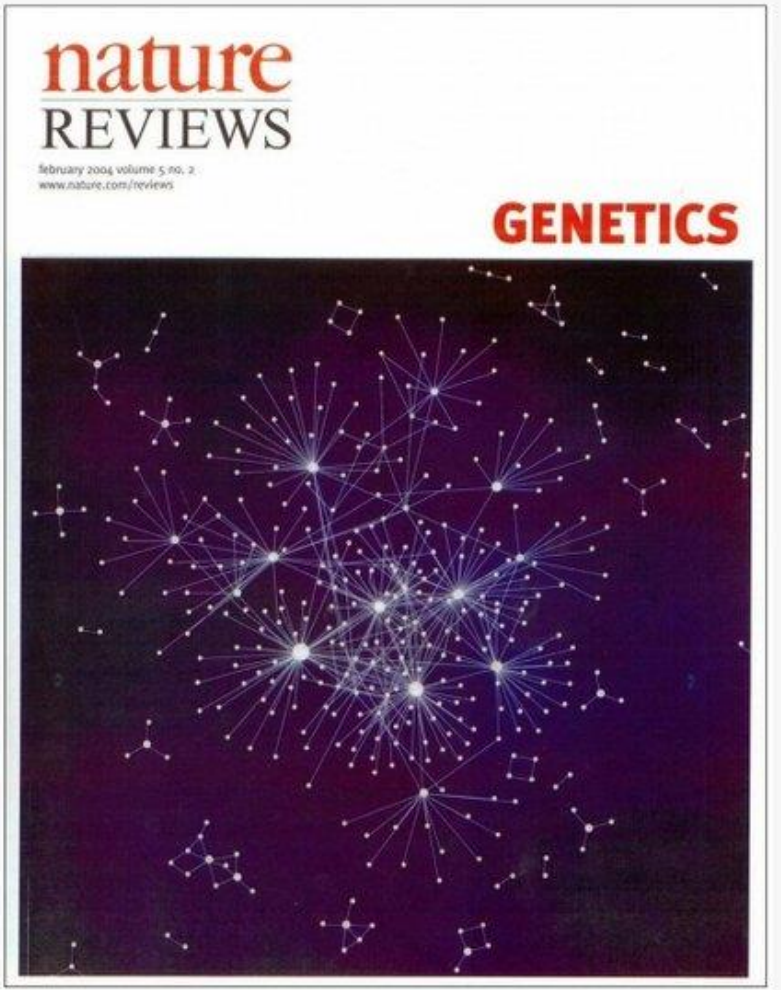
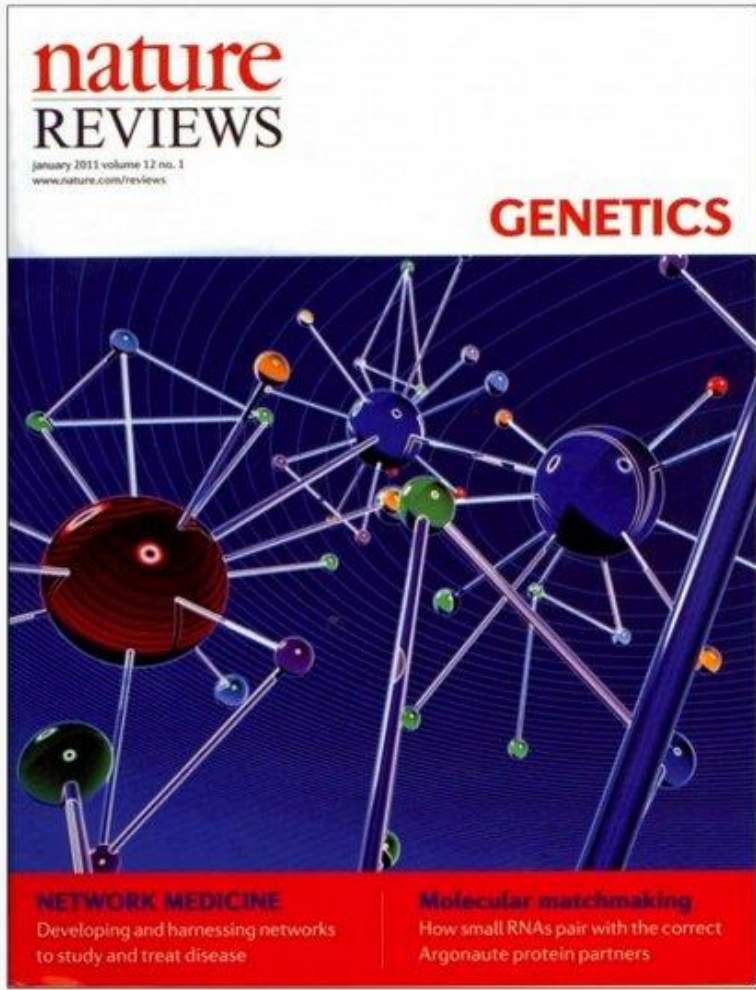
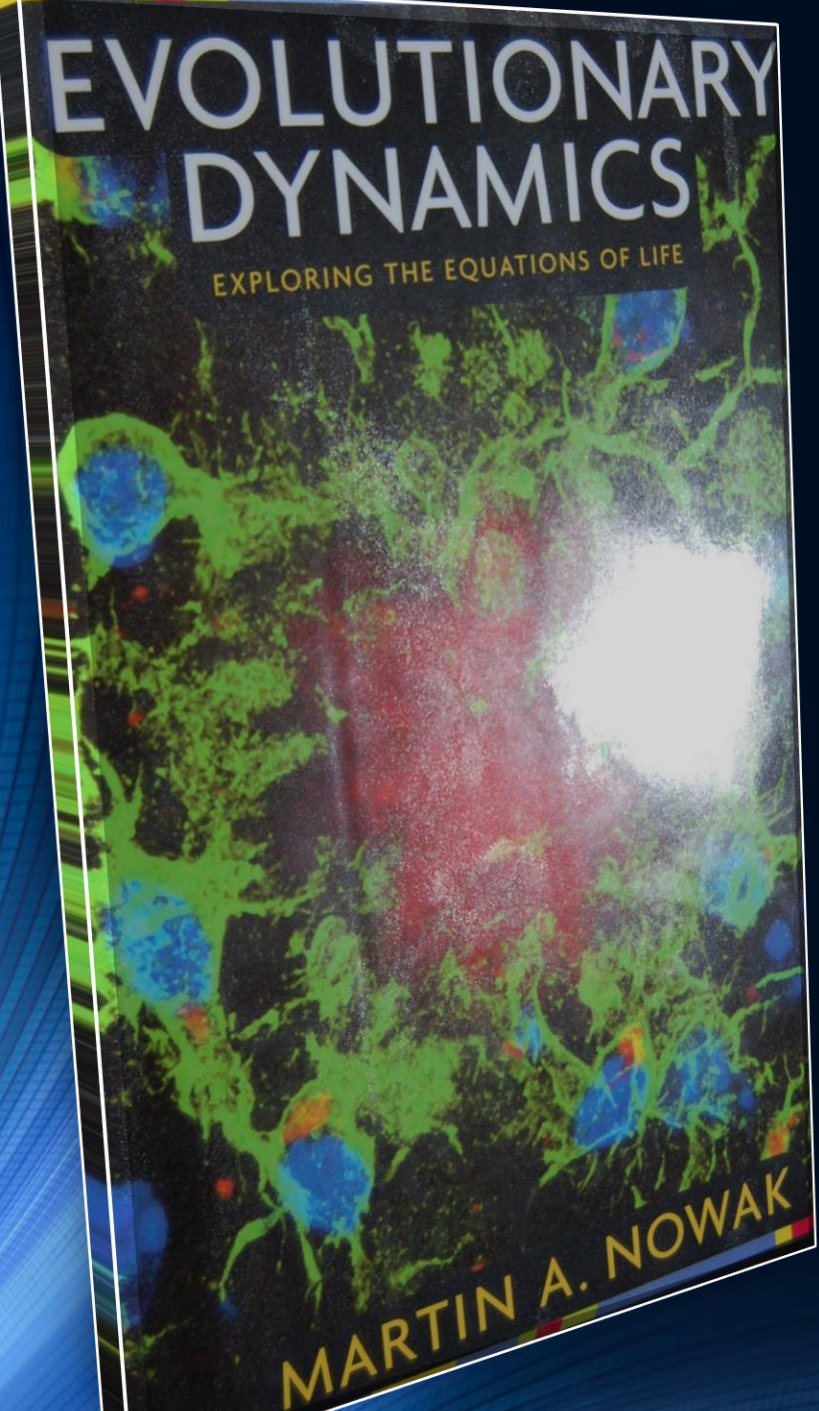


Image 1.5

### Network Biology and Medicine

The cover of two issues of *Nature Reviews Genetics*, the leading review journal in genetics. The journal has devoted exceptional attention to the impact of networks: the 2004 cover focuses on *network biology* [8] (top), the 2011 cover discusses *network medicine* [9] (bottom).

# Ausfall von einzelnen Knoten

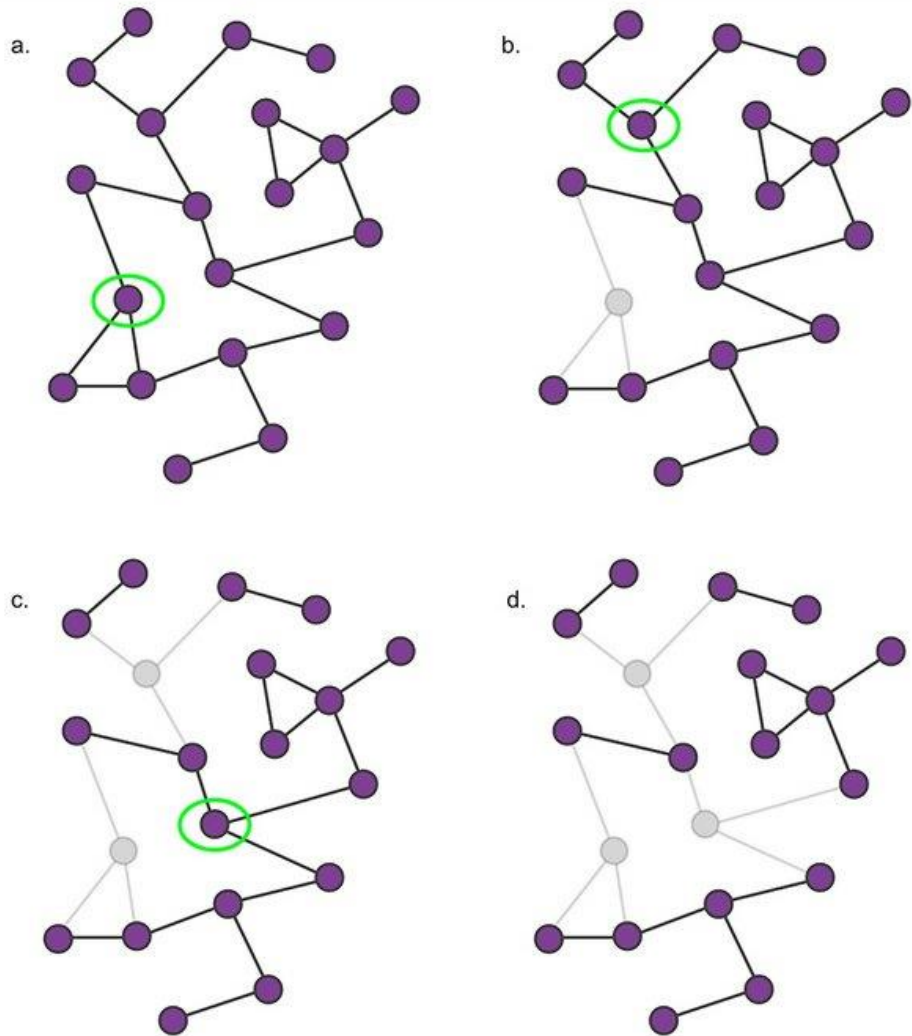


Image 8.3

## The Impact of Node Removal

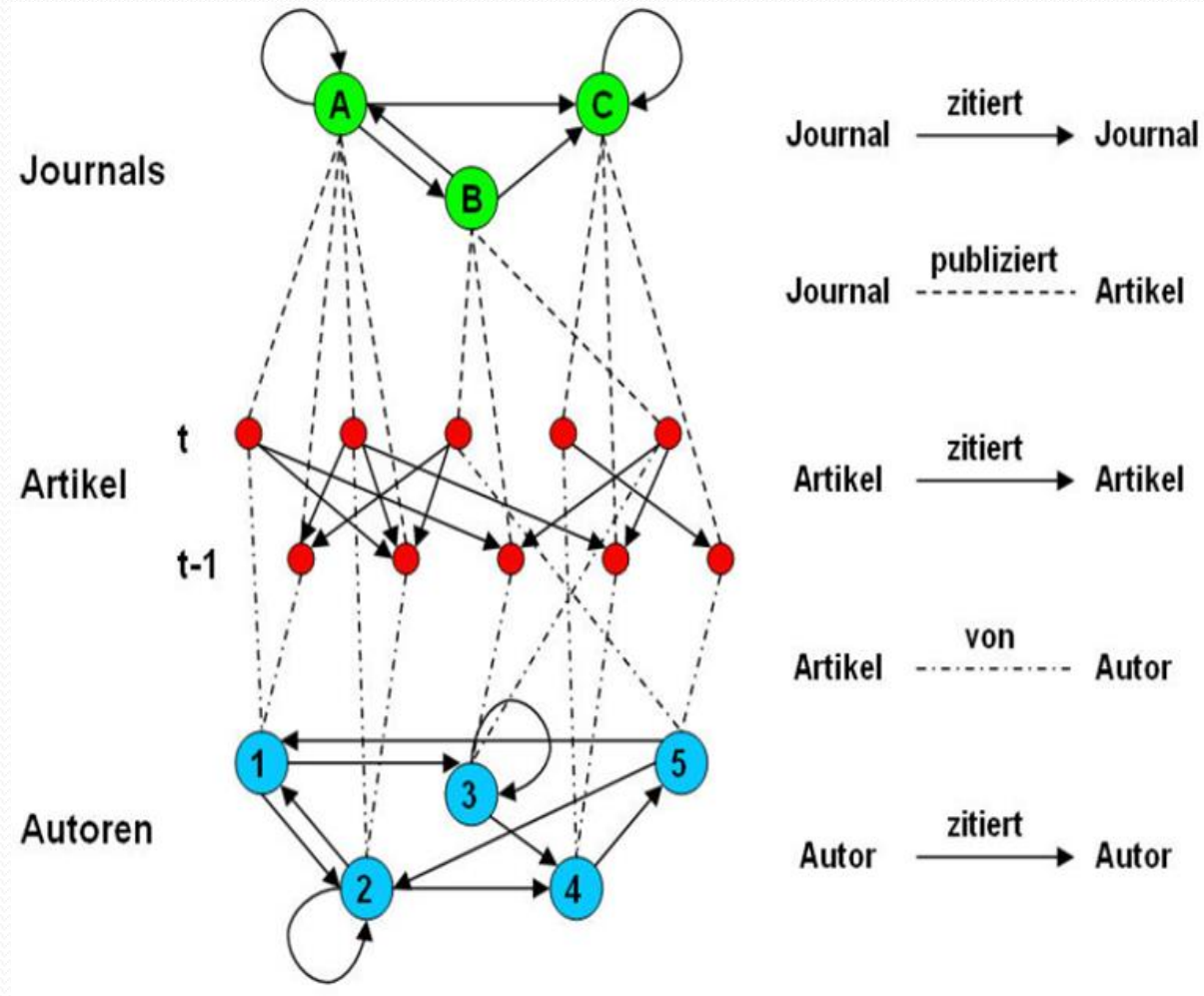
The gradual fragmentation of a small network following the breakdown of its nodes. In each panel we remove a different node (highlighted with a green circle), together with its links. While the removal of the first node has only limited impact on the network's integrity, the removal of the second node isolates two small clusters from the rest of the network. Finally, the removal of the third node fragments the network, breaking it into five non-communicating clusters of sizes  $s = 2, 2, 2, 5, 6$ .



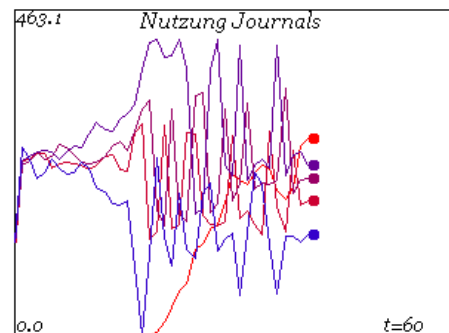
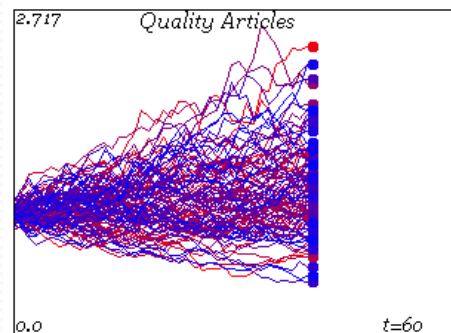
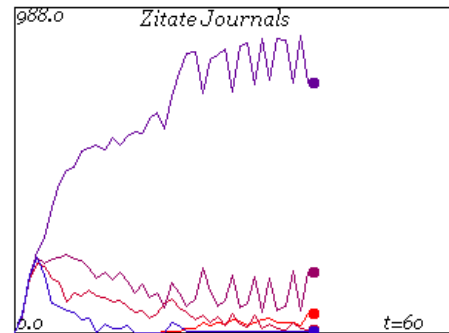
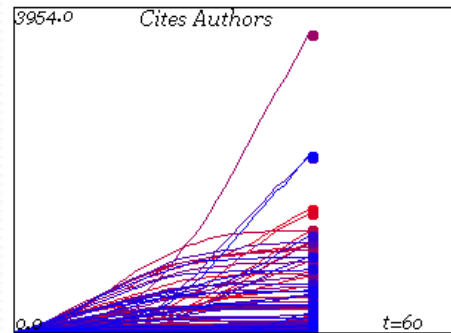
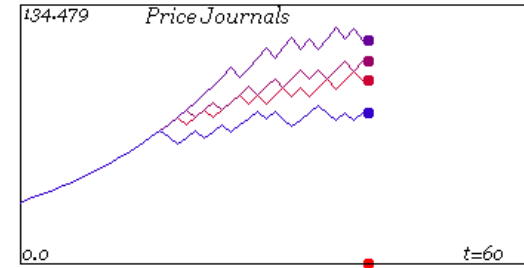
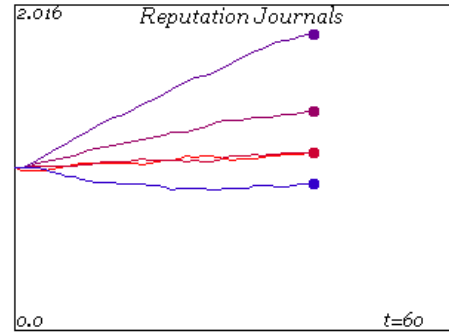
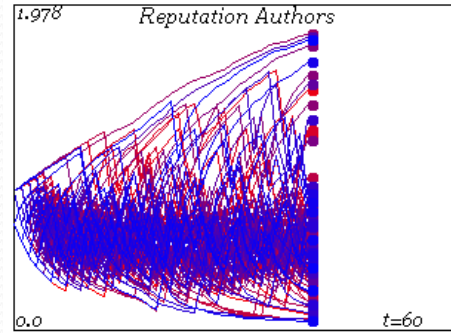
<http://networksciencebook.com/chapter/8>



# Schematische Darstellung eines multipartiten Zitationsnetzwerks



# Das Java Simulationsapplet

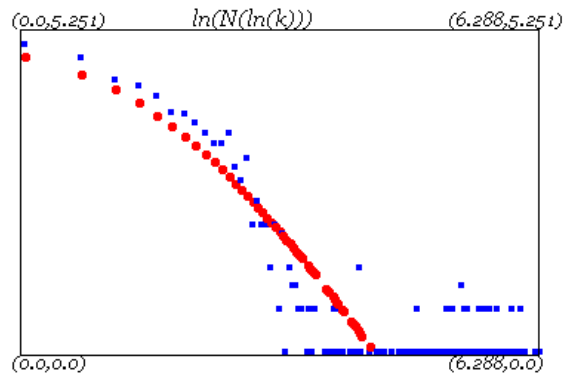


Starting: All Equal    Pricing: auch runter

Start    Stop

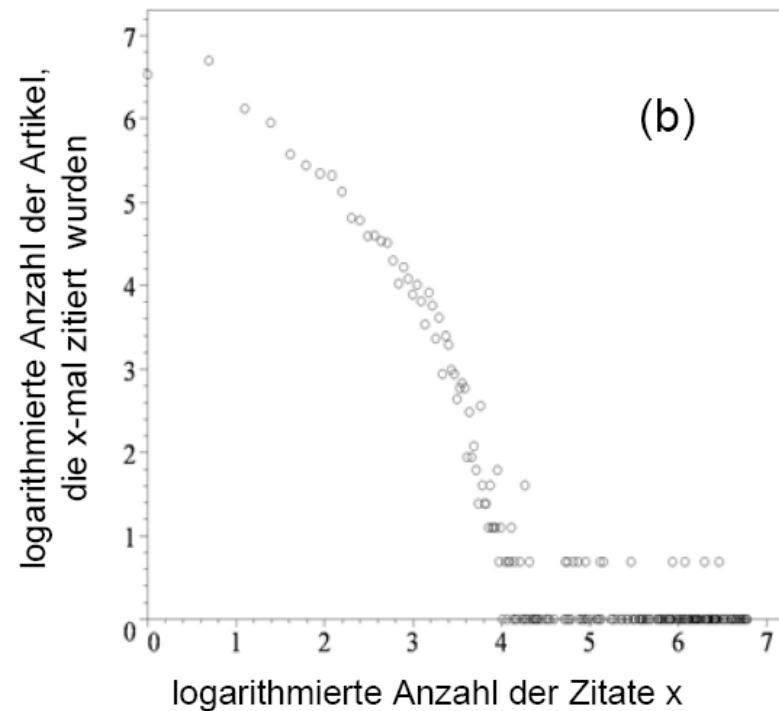
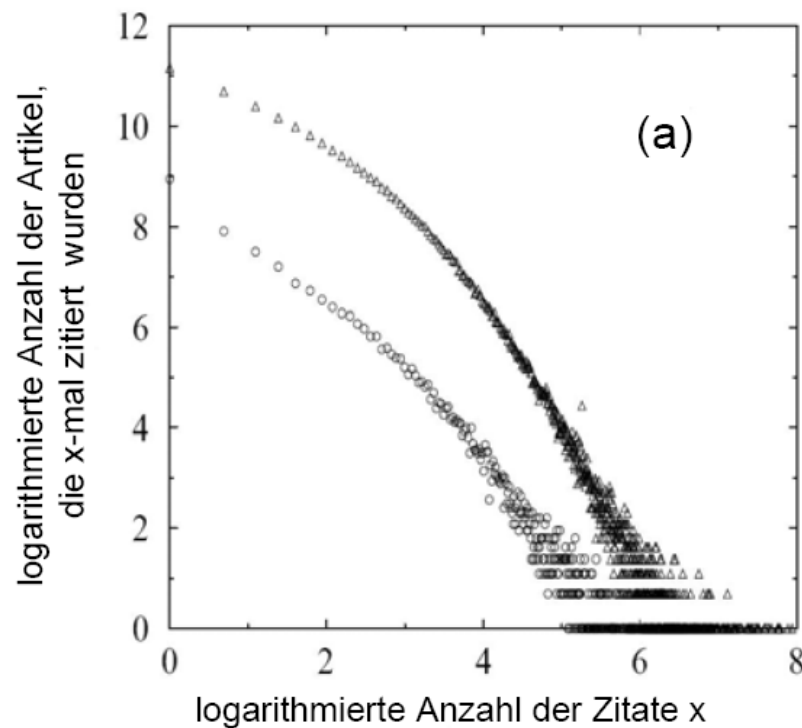
**WIAP** Wissenschaftliche Informationsversorgung und alternative Preisbildungsmechanismen

Periods	Cites New	FT	sigma	oa Anz
60	2	20	0.05	25
Authors	Cites Old	Read Papers	Bibs	oa Start
100	8	5	3	20
Journals	alpha 1	Pub.Articles	Staat	Lesevers
5	1	12	800	3
Forgetrange	alpha 2	mu	Staatd	
30	1.2	0.005	1	



# Vergleich des simulierten Artikelnetzwerks mit empirischen Daten

Das auf der Artikelebene simulierte Zitationsnetzwerk (Abbildung b) stimmt gut mit der in Realität beobachteten Netzwerkstruktur (Abbildung a) überein. In Abbildung a sind die Zitationsnetzwerke der Zeitschrift *Physical Review D* und der Datenbank *ISI (Institute of scientific Information)* aufgetragen.



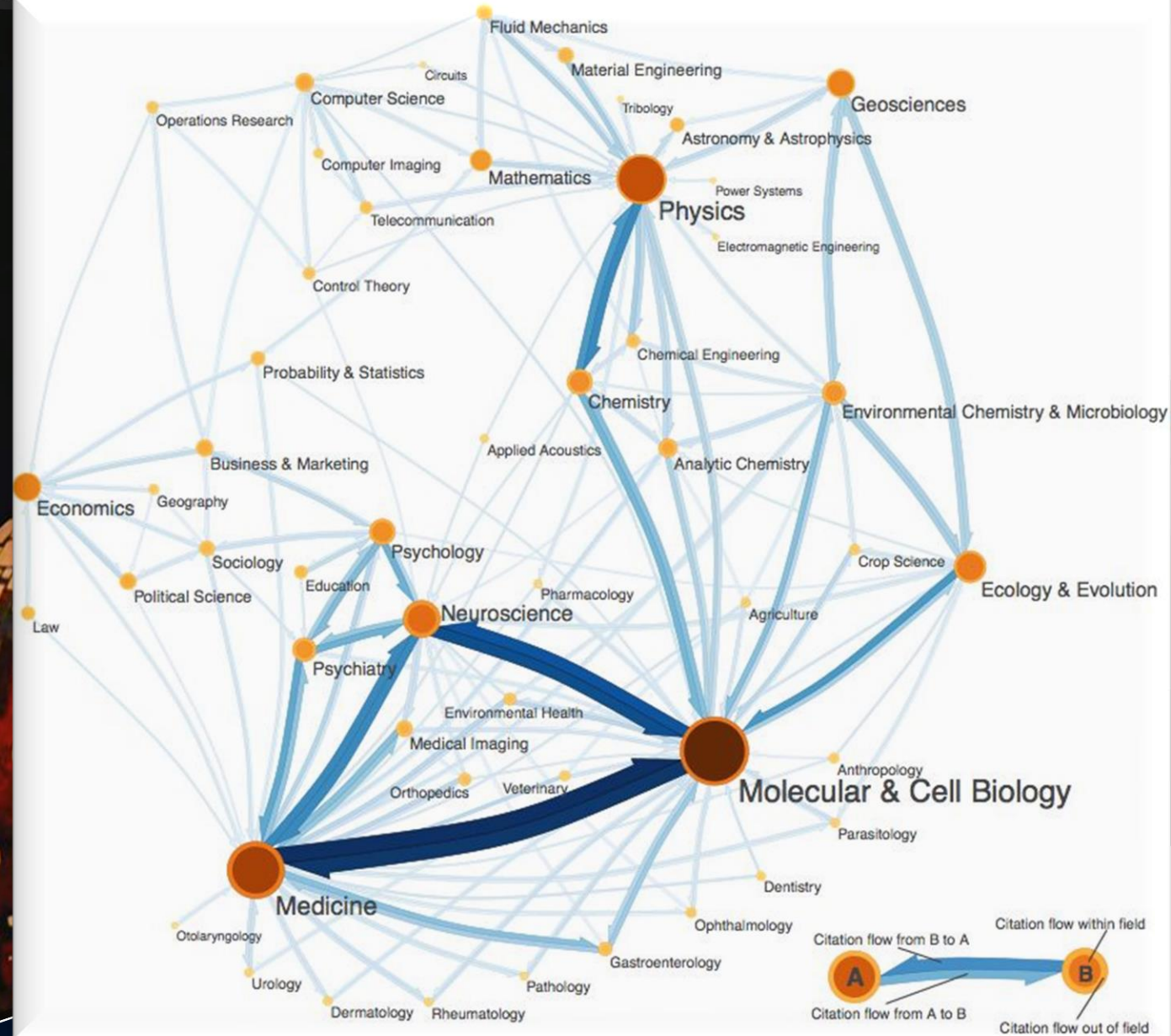




# Atlas of Science

## Visualizing What We Know

Katy Börner



# Big Author-Hubs in Science



## Albert-László Barabási

FOLGEN

Northeastern University, Harvard Medical School  
Bestätigte E-Mail-Adresse bei neu.edu - [Startseite](#)

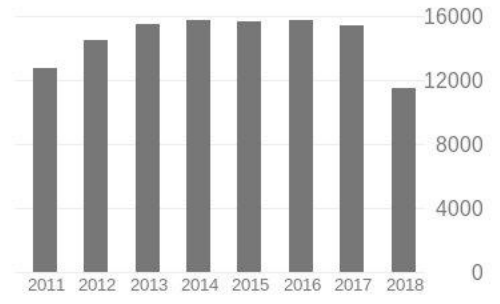
network science statistical physics biological physics physics medicine

EIGENES PROFIL ERSTELLEN

TITEL	ZITIERT VON	JAHR
<b>Emergence of scaling in random networks</b> AL Barabási, R Albert Science 286 (5439), 509-512	32013	1999
<b>Diameter of the world wide web</b> A Reka, H Jeong, AL Barabasi Nature 401 (9), 130-131	24127 *	1999
<b>Statistical mechanics of complex networks</b> R Albert, AL Barabasi Reviews of Modern Physics 74, 47-97	20489	2002
<b>Linked: The New Science Of Networks</b> AL Barabási Basic Books	9437 *	2002
<b>Error and attack tolerance of complex networks</b> R Albert, H Jeong, AL Barabási Nature 406, 378-482	8303	2000
<b>Network biology: understanding the cell's functional organization</b> AL Barabasi, ZN Oltvai Nature reviews genetics 5 (2), 101	6746	2004
<b>The large-scale organization of metabolic networks</b> H Jeong, B Tombor, R Albert, ZN Oltvai, AL Barabási Nature 407 (6804), 651	5364	2000

Zitiert von ALLE ANZEIGEN

	Alle	Seit 2013
Zitate	190647	89820
h-index	132	104
i10-index	301	250



Koautoren ALLE ANZEIGEN

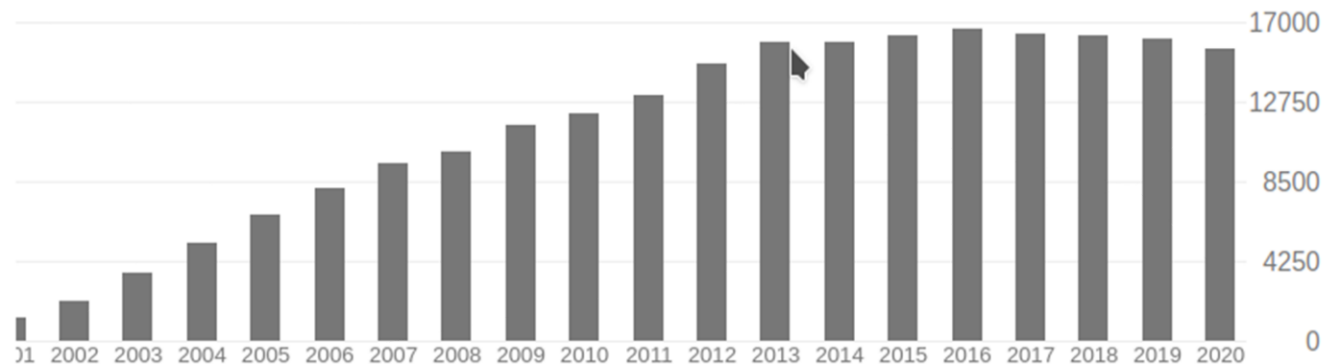
- Reka Albert**  
Distinguished Professor, Penn St...
- Hawoong Jeong**  
Professor of Physics, KAIST
- Zoltan N. Oltvai**  
University of Pittsburgh
- Tamas Vicsek**



## Albert-László Barabási

Northeastern University, Harvard Medical School  
 Bestätigte E-Mail-Adresse bei neu.edu - [Startseite](#)

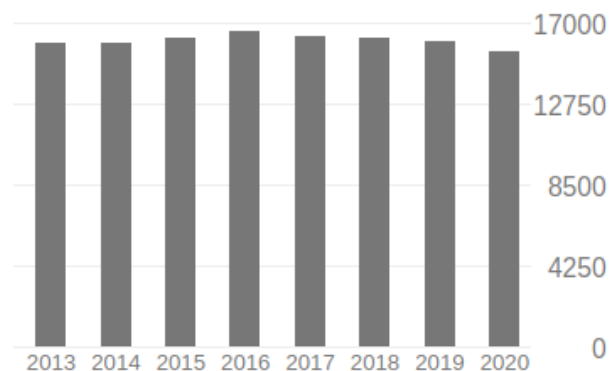
[network science](#) [statistical physics](#) [biological physics](#) [physics](#) [medicine](#)



TITEL	ZITIERT VON	JAHR
<a href="#">Emergence of scaling in random networks</a> AL Barabási, R Albert Science 286 (5439), 509-512	37107	1999
<a href="#">Statistical mechanics of complex networks</a> R Albert, AL Barabasi Reviews of Modern Physics 74, 47-97	22551	2002
<a href="#">Linked: The New Science Of Networks</a> AL Barabási Basic Books	10371 *	2002
<a href="#">Error and attack tolerance of complex networks</a> R Albert, H Jeong, AL Barabási Nature 406, 378-482	9193	2000
<a href="#">Network biology: understanding the cell's functional organization</a> AL Barabasi, ZN Oltvai	8083	2004

Zitiert von [ALLE ANZEIGEN](#)

	Alle	Seit 2015
Zitate	232922	97303
h-index	146	112
i10-index	347	283



Koautoren [ALLE ANZEIGEN](#)





## Reka Albert

FOLGEN

Distinguished Professor, [Penn State](#)  
Bestätigte E-Mail-Adresse bei psu.edu

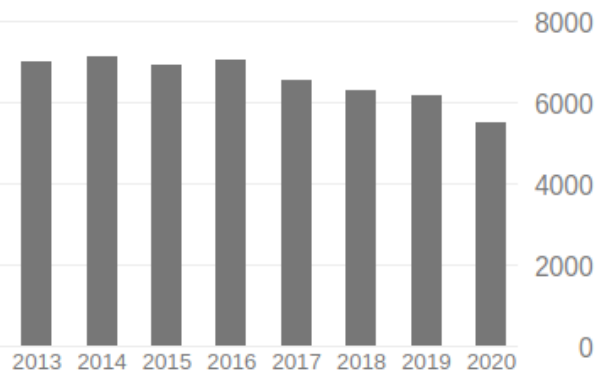
[Network science](#) [Systems Biology](#) [Mathematical Biology](#)

EIGENES PROFIL ERSTELLEN

TITEL	ZITIERT VON	JAHR
<a href="#">synergy-A Python library for calculating, analyzing, and visualizing drug combination synergy</a> DJ Wooten, R Albert Bioinformatics		2020
<a href="#">Parity and time-reversal elucidate decisions in high-dimensional state space--application to attractor scaling in critical Boolean networks</a> JC Rozum, JGT Zañudo, X Gan, R Albert arXiv preprint arXiv:2009.05526		2020
<a href="#">A guard cell abscisic acid (ABA) network model that captures the stomatal resting state</a> P Maheshwari, SM Assmann, R Albert Frontiers in physiology 11, 927		2020
<a href="#">Network model and analysis of the spread of Covid-19 with social distancing</a> P Maheshwari, R Albert arXiv preprint arXiv:2006.09189		2020

Zitiert von [ALLE ANZEIGEN](#)

	Alle	Seit 2015
Zitate	104049	38638
h-index	59	45
i10-index	109	96



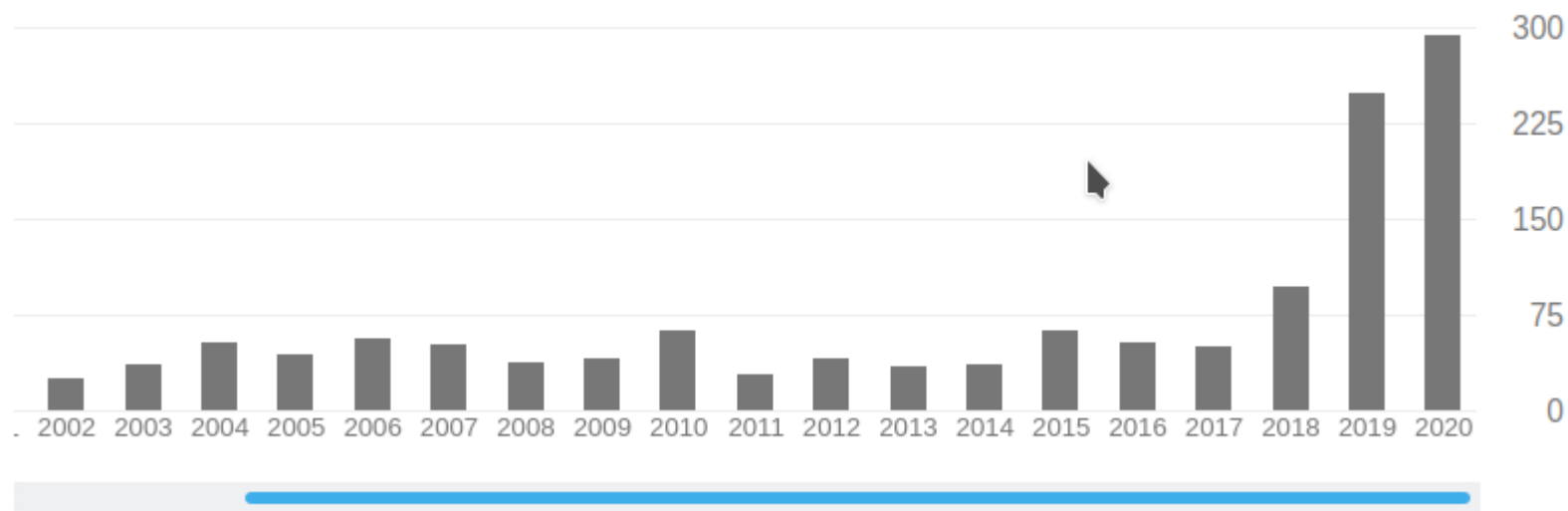
Koautoren [ALLE ANZEIGEN](#)



## Matthias Hanauske

Goethe-Universität, Frankfurt |  
Bestätigte E-Mail-Adresse bei

Allgemeine Relativitätstheorie  
Physik sozio-ökonomischer...

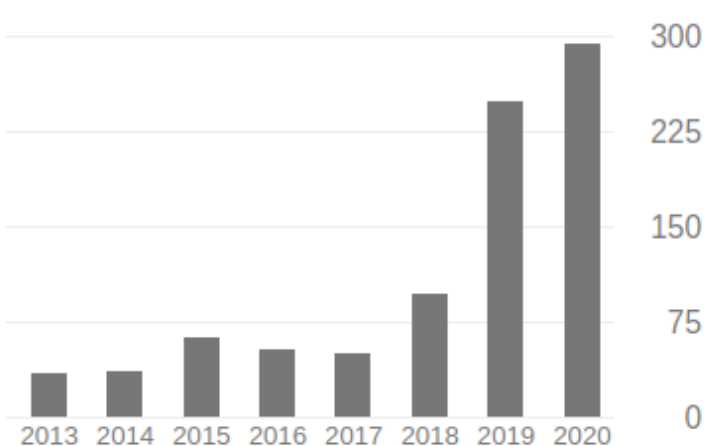


### TITEL

### ZITIERT VON JAHR

TITEL	ZITIERT VON	JAHR
<a href="#">Phase transition to hyperon matter in neutron stars</a> J Schaffner-Bielich, M Hanauske, H Stöcker, W Greiner Physical review letters 89 (17), 171101	163	2002
<a href="#">Neutron star properties in the quark-meson coupling model</a> S Pal, M Hanauske, I Zakout, H Stöcker, W Greiner Physical Review C 60 (1), 015802	147	1999
<a href="#">Signatures of quark-hadron phase transitions in general-relativistic neutron-star mergers</a> ER Most, LJ Papenfort, V Dexheimer, M Hanauske, S Schramm, ... Physical review letters 122 (6), 061101	117	2019
<a href="#">Nonstrange hybrid compact stars with color superconducting matter</a> I Shovkovy, M Hanauske, M Huang Physical Review D 67 (10), 103004	111	2003

h-index	20	17
i10-index	25	23



Koautoren

ALLE ANZEIGEN

# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem C

## (Physics of Socio-Economic Systems with the Com

Vorlesung gehalten an der J.W.Goethe-Universität in Frankfurt am Main

(Wintersemester 2020/21)

von Dr.phil.nat. Dr.rer.pol. Matthias Hanauske

Frankfurt am Main 02.11.2020

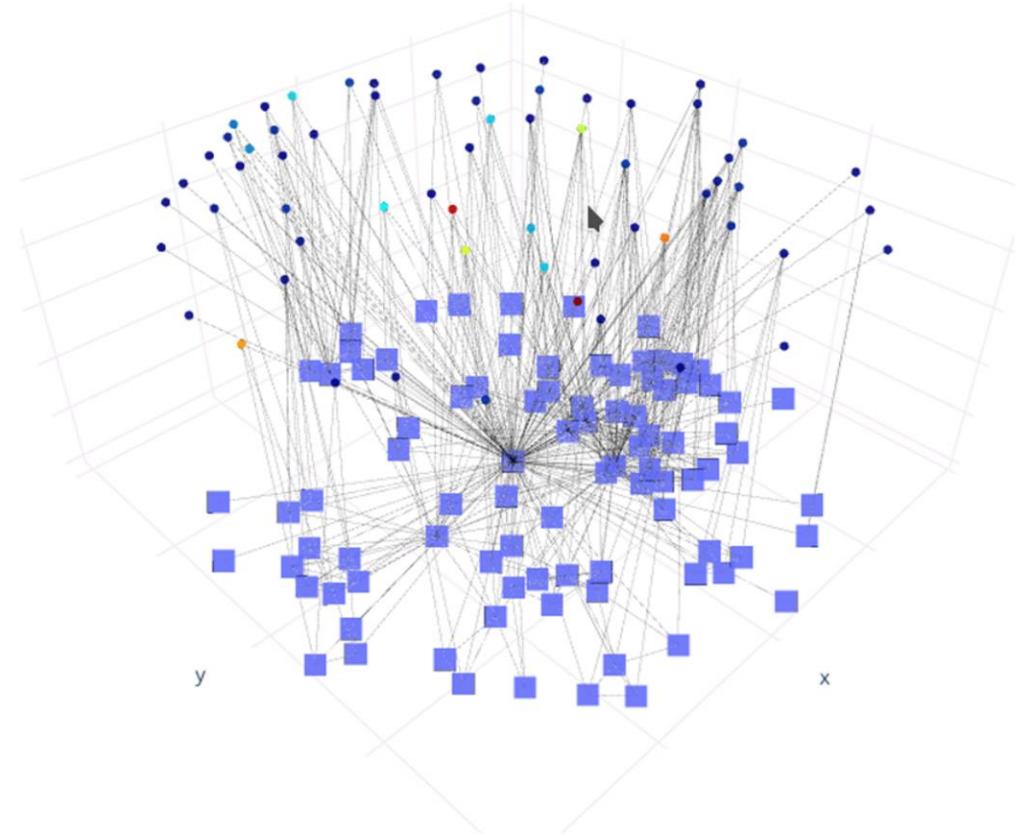
Zweiter Vorlesungsteil:

Zitations- und Autorennetzwerke

## Einführung

In diesem Jupyter Notebook wird ein Beispiel eines multipartiten Netzwerks betrachtet, das sogenannte Zitations-Autorennetzwerk. In multipartiten Netzwerken kann man die Menge der Netzwerkknoten  $\mathcal{I}$  in disjunkte Teilmengen gliedern. Wir betrachten im folgenden den wissenschaftlichen Informationsmarkt, indem Autoren (Teilmenge  $\mathcal{A} = \{A, B, \dots\}$  der Netzwerkknoten) wissenschaftliche Artikel/Papers (Teilmenge  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$  der Netzwerkknoten) schreiben und in wissenschaftlichen Journalen (Teilmenge  $\mathcal{J}$  der Netzwerkknoten) veröffentlichen. Wir beschränken uns jedoch hierbei auf ein bipartites Netzwerk und betrachten lediglich das Autoren-Zitationsnetzwerk ( $\mathcal{I} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}$ ).

Neben diesen unterschiedlichen Knotenarten existieren auch unterschiedliche Kanten in diesem bipartitem Netzwerk. Die Kanten welche die Autoren miteinander verbinden kennzeichnen Koautorenschaften die entstehen können, wenn man einen gemeinsamen Artikel schreibt; diese Kanten haben zahlenmäßige Gewichtung (wieviele Artikel man zusammen geschrieben hat) und sind ungerichtet. Kanten, die Autorenknoten mit Artikelknoten miteinander verknüpfen sind ungerichtet und ungewichtet und kennzeichnen einfach das dieser Autor diesen Artikel geschrieben hat. Diejenige Kanten, die Artikel miteinander verbinden sind dagegen gerichtet und ungewichtet und kennzeichnen das ein Artikel einen anderen zitiert.



# Physik der sozio-ökonomischen Systeme mit dem Computer



Knotengrad

9

8

7

6

5

4

3

2

1