Neue Entwicklungen in der Evolutionären Spieltheorie
(Vorlesungsteil 3)

Vorlesung im Rahmen des
Deutsch-Französischen Dozenten-Austauschprogramms „*Minerve*“

Dr. Matthias Hanauske
Institut für Wirtschaftsinformatik
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Grüneburgplatz 1, 60323 Frankfurt am Main

Lyon, 21.Oktober 2009

Inhaltsübersicht der gesamten Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
2. Grundlagen der evolutionären Spieltheorie
3. Neue Entwicklungen in der evolutionären Spieltheorie

Inhaltsübersicht des ersten und zweiten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien

+ Hausaufgabe: „Nash-Gleichgewichte
eines Anti-Koordinationspiels“

Hausaufgabe

- Betrachten Sie das Folgende (2x2)-Spiel:

	Strategie 1	**Strategie 2**
Strategie 1	(-7 , -7)	(4 , 1)
Strategie 2	(1 , 4)	(2 , 2)

1. Um welche Spielklasse handelt es sich hierbei?
2. Gibt es eine dominante Strategie?
3. Geben Sie die Nash-Gleichgewichte des Spiels an?

Lösung (I)

1. Es handelt sich um ein Anti-Koordinationspiel, da
   a) es keine dominante Strategie gibt.
   b) es zwei unsymmetrische Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht gibt:
      i. Reine Nash-Gleichgewichte:
         (Strategie 1 , Strategie 2) und (Strategie 2 , Strategie 1)
      ii. Gemischtes Nash-Gleichgewicht:
         (Strategie 1 mit 20 % , Strategie 2 mit 80 %)

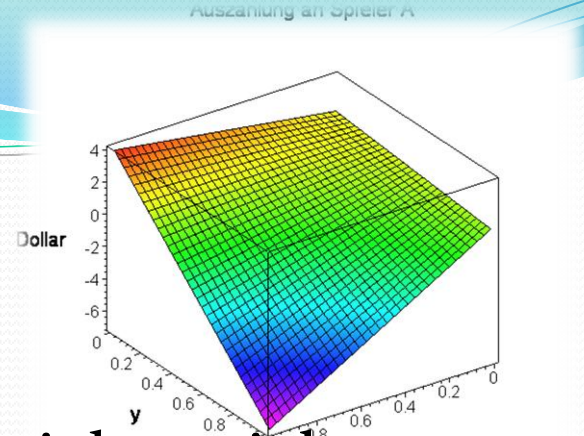
Lösung (II)

2. Es gibt keine dominante Strategie bei diesem Spiel, da wenn *Spieler 2* seine Strategie auf „Strategie 1“ festsetzt ist es für *Spieler 1* ratsam „Strategie 2“ zu wählen und umgekehrt, wenn *Spieler 2* seine Strategie auf „Strategie 2“ festlegt, sollte *Spieler 1* die Strategie „Strategie 1“ wählen. (*Spieler B* äquivalent)

	Strategie 1	**Strategie 2**
Strategie 1	(-7 , -7)	(4 , 1)
Strategie 2	(1 , 4)	(2 , 2)

Lösung (III)

2. Es gibt zwei reine Nash-Gleichgewichte ((**Strategie 1** , **Strategie 2**) und (**Strategie 2** , **Strategie 1**), zur Begründung siehe die Abbildung der Auszahlungsmatrix auf der vorigen Seite)
und ein gemischtes Nash-Gleichgewicht bei (**Strategie 1 mit 20 %** , **Strategie 2 mit 80 %**).
Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts:



Lösung (IV)

- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts:

$$\text{Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers:} \quad \$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$$

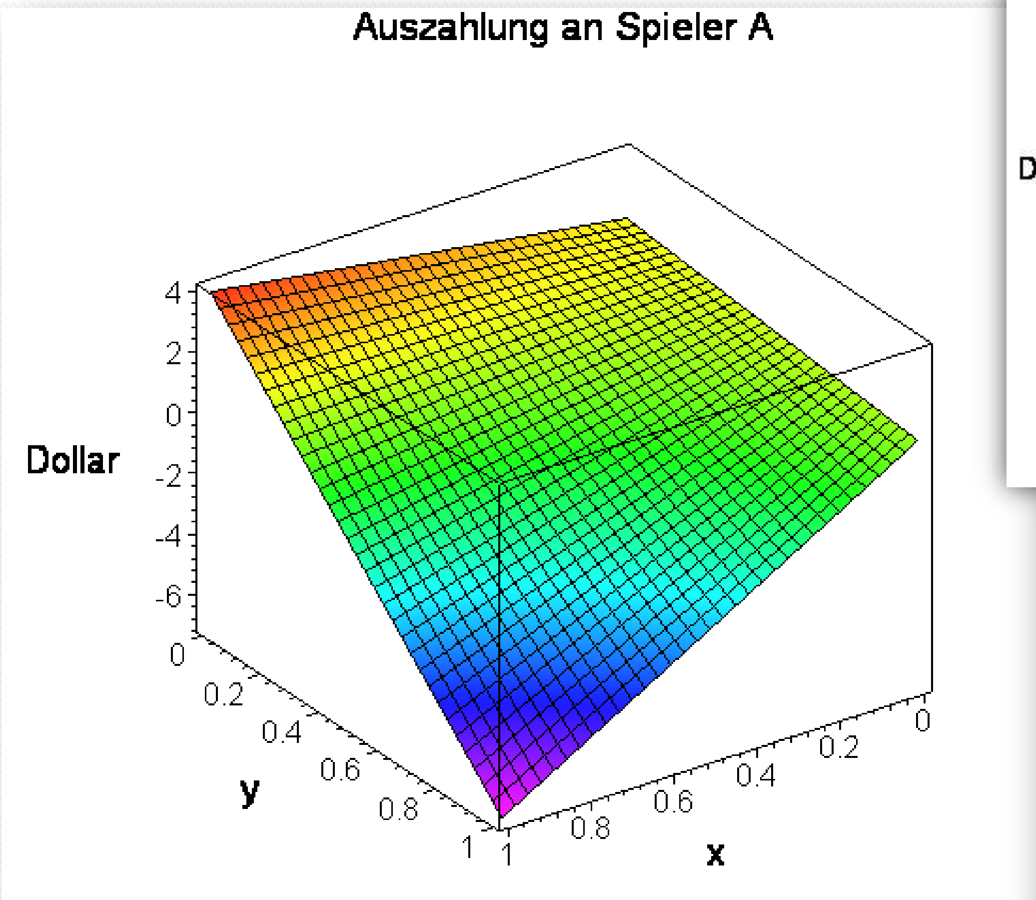
$$\$^1(x,y) = (-7)\cdot x \cdot y + 4 \cdot x \cdot (1-y) + 1 \cdot (1-x) \cdot y + 2 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$
$$= -10 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x - y + 2$$

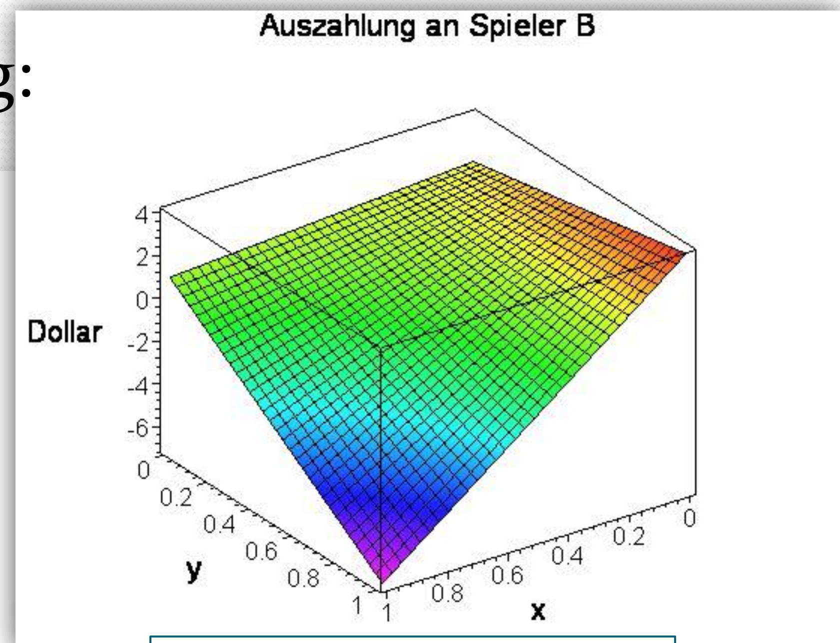
$$\left.\frac{\partial \$^1(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y^*} = -10 \cdot y^* + 2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{1}{5} \approx 20\%$$

Da es sich um ein symmetrisches Spiel handelt gilt auch $x^* = \frac{1}{5} \approx 20\%$

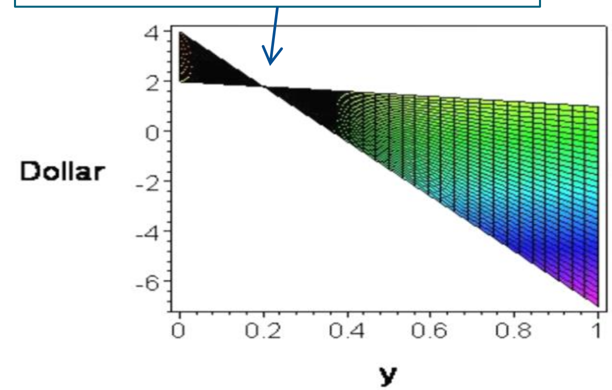
Lösung (V)

- Grafische Veranschaulichung:





Gemischtes Nash-Gleichgewicht bei 20%



Inhaltsübersicht des dritten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie

Inhaltsübersicht des dritten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie

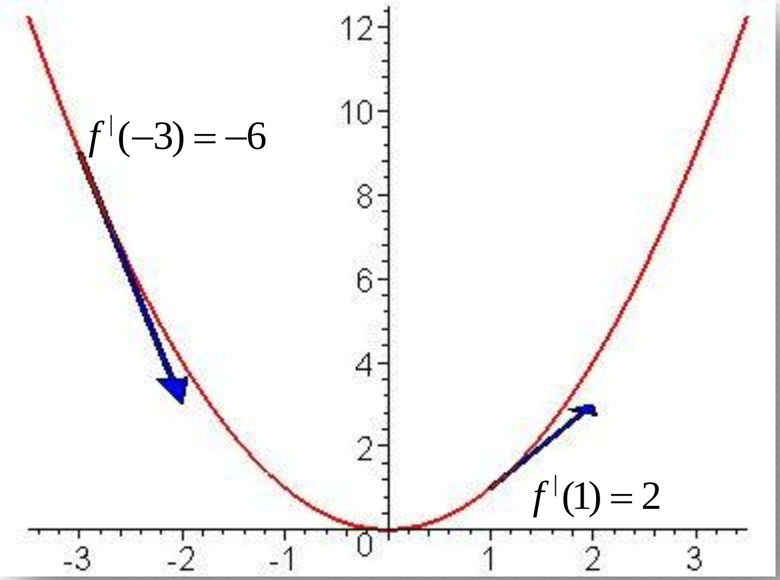
Differentialrechnung

(Wie man eine Funktion ableitet)

- Polynome lassen sich nach folgender Formel ableiten:

$$f(x) = x^n$$

$$f^{|}(x) := \frac{d\ f(x)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$



Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

$$f^{|}(x) = 2 \cdot x^1 = 2 \cdot x$$

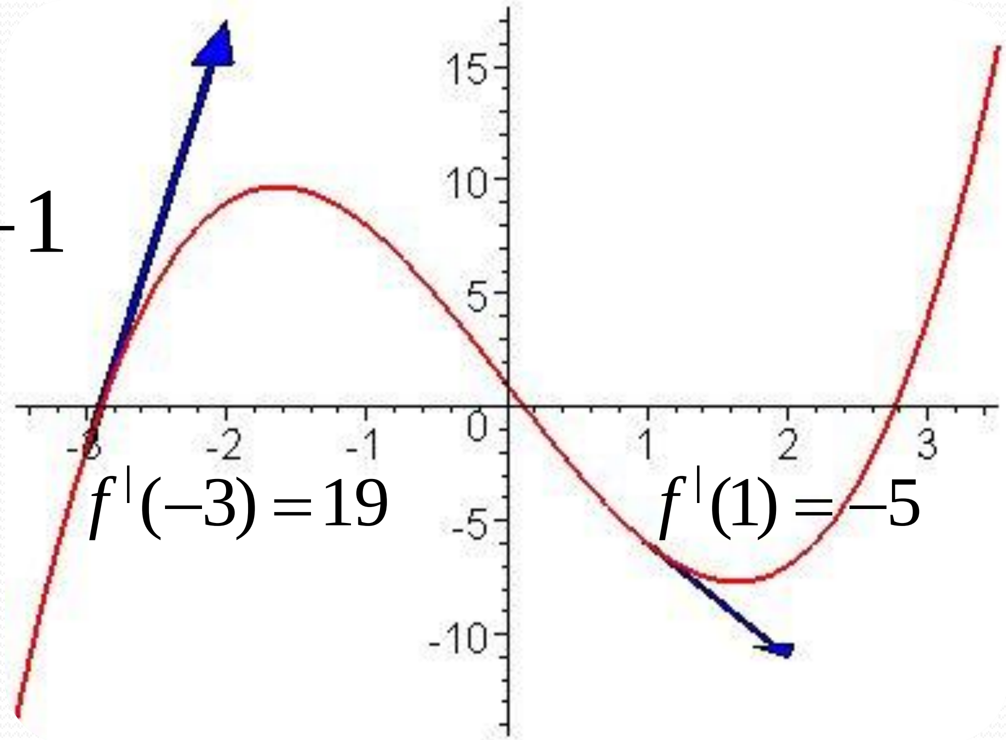
Die Ableitung einer Funktion gibt ihre Steigung bei gewähltem x-Wert an.

Differentialrechnung
(Weiteres Beispiel)

- Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 8 \cdot x + 1$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 8$$



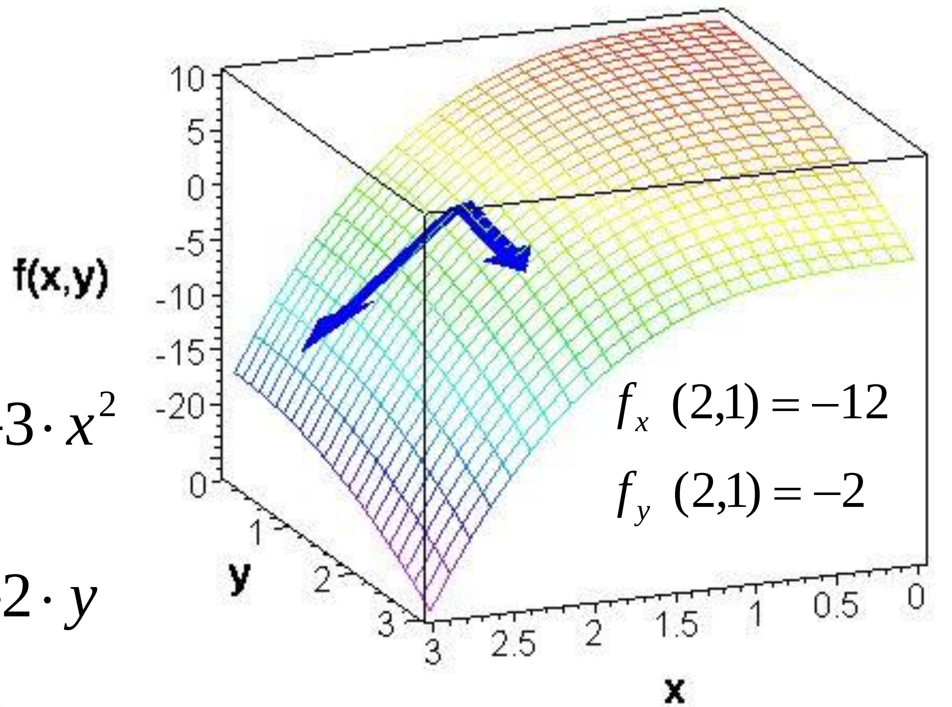
Differentialrechnung
(Die partielle Ableitung)

- Beispiel:

$$f(x,y) = -x^3 - y^2 + 10$$

$$f_x(x,y) := \left.\frac{\partial\, f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y} = -3 \cdot x^2$$

$$f_y(x,y) := \left.\frac{\partial\, f(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x} = -2 \cdot y$$



$$f_x\ (2,1) = -12$$

$$f_y\ (2,1) = -2$$

Wiederholung: Das Nash - Gleichgewicht

Das von dem Mathematiker John Forbes Nash Jr. definierte strategische Gleichgewicht beschreibt einen Spielzustand, von dem ausgehend kein einzelner Spieler für sich einen Vorteil erzielen kann, indem er einseitig von seiner Strategie abweicht.

Mathematische Definition (W.Schlee):
Eine Strategienkombination $s^* = (s^{1*}, \ldots, s^{N*})$ heißt Nash–Gleichgewicht, wenn gilt

$$\$^i(s^{i*}, s^{-i*}) \geq \$^i(s^i, s^{-i*}) \;\; \forall \; i \in A, \; s^i \in S^i$$

Wobei ***A*** die Menge der Spieler, S^i die Strategienmenge des i-ten Spielers und s^{-i*} die gewählten Strategien der übrigen Spieler im Nash-Gleichgewicht beschreibt.

Beispiel: ***Gefangenendilemma***

	$s_1^2 \hat{=} Ge$	$s_1^2 \hat{=} Sc$
$s_1^1 \hat{=} Ge$	(-7 , -7)	(-1 , -9)
$s_2^1 \hat{=} Sc$	(-9 , -1)	(-3 , -3)

$$\$^1(Ge, Ge) = -7 \geq -9 = \$^1(Sc, Ge)$$

$$\$^2(Ge, Ge) = -7 \geq -9 = \$^2(Ge, Sc)$$

$$\Rightarrow (Ge, Ge) \text{ ist Nash-Gleichgewicht}$$

Inhaltsübersicht des dritten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie

Symmetriebedingung der Auszahlungsmatrizen

	Spieler 2 wählt Strategie 1	Spieler 2 wählt Strategie 2
Spieler 1 wählt Strategie 1	$(\$^1_{11}, \$^2_{11})$	$(\$^1_{12}, \$^2_{12})$
Spieler 1 wählt Strategie 2	$(\$^1_{21}, \$^2_{21})$	$(\$^1_{22}, \$^2_{22})$

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} \$^2_{11} & \$^2_{12} \\ \$^2_{21} & \$^2_{22} \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$^1_{11} & \$^1_{12} \\ \$^1_{21} & \$^1_{22} \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} \$^2_{11} & \$^2_{21} \\ \$^2_{12} & \$^2_{22} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \$^1_{11} & \$^1_{12} \\ \$^1_{21} & \$^1_{22} \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

Transponierte Matrix

Inhaltsübersicht des dritten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie

Beispiel: Gefangenendilemma
(Symmetrisches (2x2)-Spiel)

	Ge	**Sc**
Ge	(-7 , -7)	(-1 , -9)
Sc	(-9 , -1)	(-3 , -3)

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

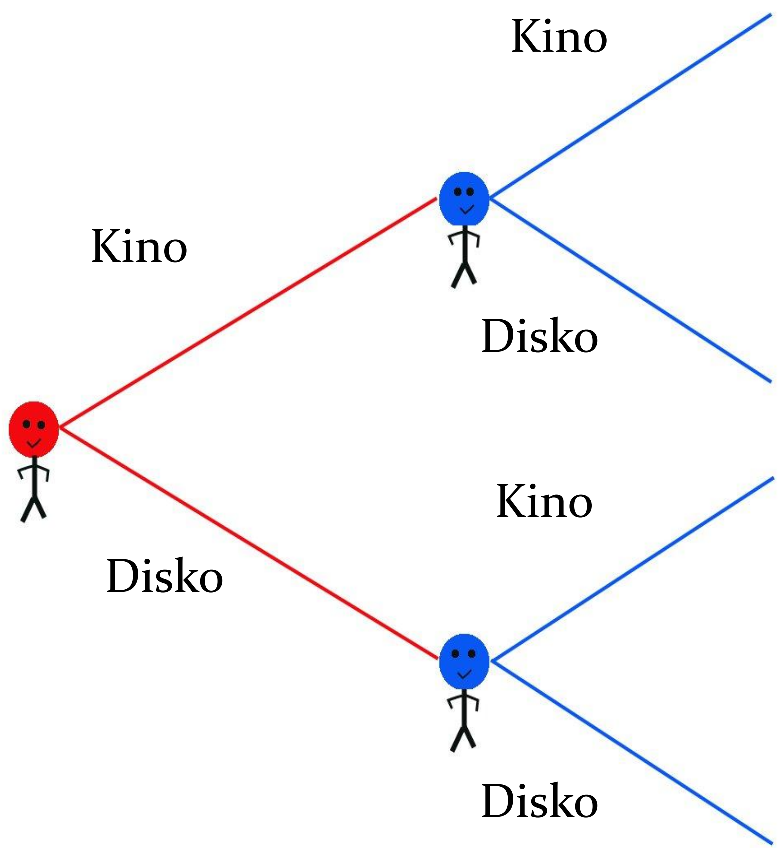
Symmetriebedingung stimmt:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

⇒ symmetrisches Spiel

Kampf der Geschlechter

	Kino	Disko
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)



Alexander und Bettina haben bei ihrem letzten Treffen nicht genau ausgemacht, wann und wo sie sich am Samstagabend treffen wollen. Bettina geht sehr gerne in das kleine Kino am Stadtrand (Spätvorstellung, Beginn 23.30 Uhr), Alexander aber würde gerne in die Diskothek im Zentrum der Stadt gehen. Keiner von ihnen hat ein Telefon. Bettina denkt, wird er mir zuliebe ins Kino gehen? Alexander denkt ähnlich, wird sie mir zuliebe in die Diskothek gehen? Beiden liegt aber viel daran sich am Samstagabend zu treffen. Der erzielte Nutzen dieses Spiels kann zum Beispiel wie oben angegeben quantifiziert werden.

Kampf der Geschlechter

(Unsymmetrisches (2x2)-Koordinationspiel)

	Kino	**Disko**
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung stimmt nicht:

$$\left(\hat{\$}^2\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \hat{\$}^1$$

$\Rightarrow$ unsymmetrisches Spiel

Kampf der Geschlechter

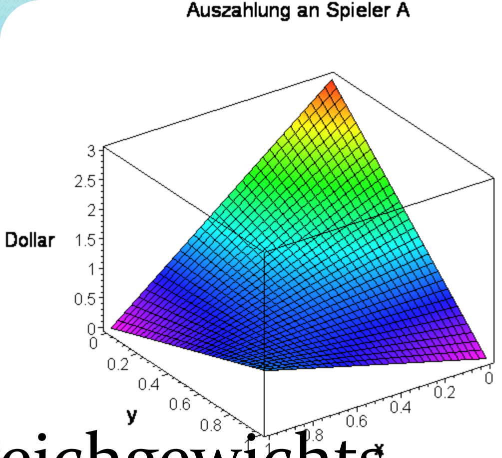
(Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien)

- Es gibt keine dominante Strategie bei diesem Spiel.
- Es gibt zwei reine Nash-Gleichgewichte:
  (Kino,Kino)
  (Disko, Disko)

	Kino	**Disko**
Kino	(1 , 3)	(0 , 0)
Disko	(0 , 0)	(3 , 1)

Kampf der Geschlechter

(Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts für den zweiten Spieler (Bettina):

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers (Alexander): $\$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \to \mathfrak{R}$

$$\$^1(x,y) = 1 \cdot x \cdot y + 0 \cdot x \cdot (1-y) + 0 \cdot (1-x) \cdot y + 3 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$= 4 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 3 \cdot y + 3$$

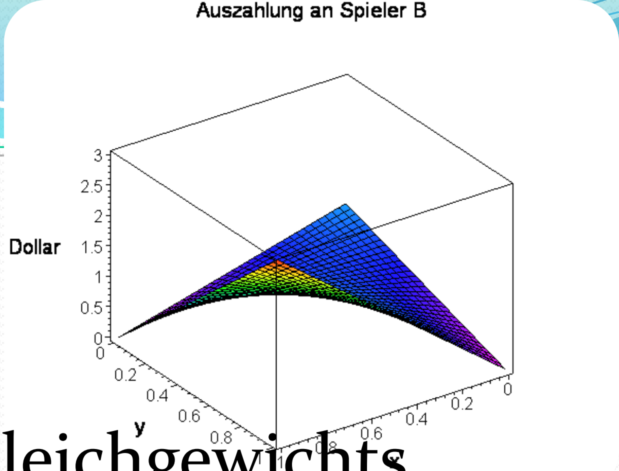
$$\left.\frac{\partial \$^1(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y^*} = 4 \cdot y^* - 3 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{3}{4} \approx 75\%$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht für Bettina befindet sich bei

$$y^* = \frac{3}{4} \approx 75\%$$

Kampf der Geschlechter

(Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)



- Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts für den ersten Spieler (Alexander):

Auszahlungsfunktion des 2-ten Spielers (Bettina): $\$^2 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \rightarrow \Re$

$$\$^2(x,y) = 3 \cdot x \cdot y + 0 \cdot x \cdot (1-y) + 0 \cdot (1-x) \cdot y + 1 \cdot (1-x) \cdot (1-y)$$

$$= 4 \cdot x \cdot y - x - y + 1$$

$$\frac{\partial \$^2(x,y)}{\partial y}\bigg|_{x=x^*} = 4 \cdot x^* - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{1}{4} \approx 25\%$$

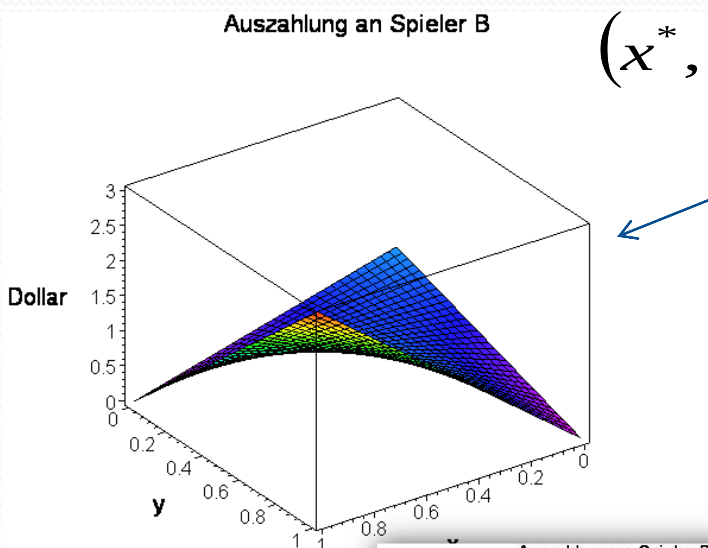
Das gemischte Nash-Gleichgewicht für Alexander befindet sich bei $x^* = \frac{1}{4} \approx 25\%$

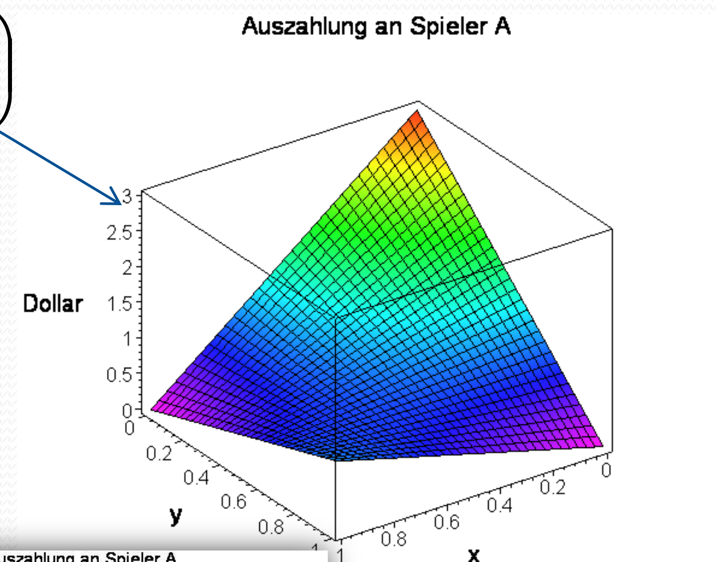
Kampf der Geschlechter

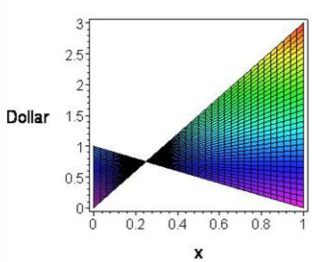
(Grafische Veranschaulichung des gemischten Nash-Gleichgewichts)

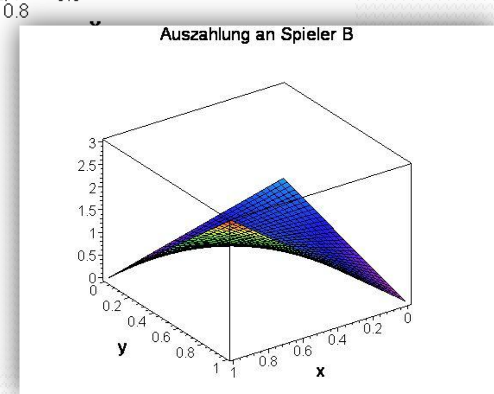
- Das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien befindet sich bei

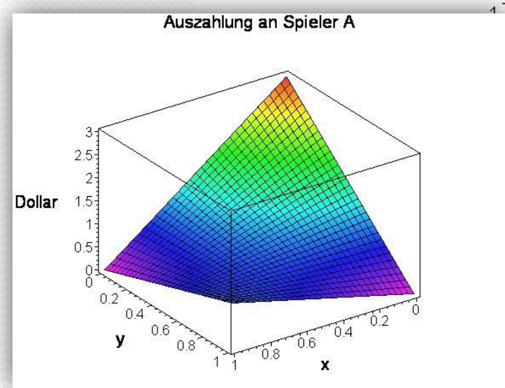
$$\left(x^*, y^*\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

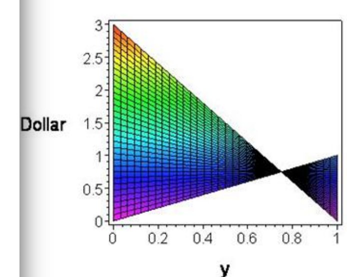












Inhaltsübersicht des dritten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
   a) Einleitung
   b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
   c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
   d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
   f) Reine und gemischte Strategien
   g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
   h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
   i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
   k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
   l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
   m) **Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien**
   n) Weitere Konzepte der Spieltheorie

Welche Strategie würden Sie spielen?

Gibt es eine dominante Strategie? Geben Sie die Nash-Gleichgewichte an.
Ist es ein symmetrisches oder unsymmetrisches Spiel?

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(7 , 7)	(7 , 8)	(1 , 8)
Strategie 2	(8 , 7)	(9 , 9)	(3 , 1)
Strategie 3	(8 , 1)	(1 , 3)	(2 , 2)

(Strategie 2 , Strategie 2) !

Die Strategienkombination (**Strategie 2 , Strategie 2**) ist das einzige Nash-Gleichgewicht und sogar die dominante Strategie dieses symmetrischen Spiels.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(7 , 7)	(7 , 8)	(1 , 8)
Strategie 2	(8 , 7)	(9 , 9)	(3 , 1)
Strategie 3	(8 , 1)	(1 , 3)	(2 , 2)

Welche Strategie würden Sie spielen?

Gibt es eine dominante Strategie? Geben Sie die Nash-Gleichgewichte an.
Ist es ein symmetrisches oder unsymmetrisches Spiel?

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

(Strategie 3 , Strategie 3) !

Die Strategienkombination **(Strategie 3 , Strategie 3)** ist das einzige Nash-Gleichgewicht dieses unsymmetrischen Spiels. Es gibt keine dominante Strategie.

	Strategie 1	**Strategie 2**	**Strategie 3**
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

Mathematische Überprüfung des Nash-Gleichgewichts

Behauptung:

(S3,S3) ist Nash-Gleichgewicht.

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(1 , 3)	(2 , 7)	(3 , 9)
Strategie 2	(2 , 1)	(3 , 1)	(3 , 8)
Strategie 3	(3 , 1)	(2 , 1)	(5 , 3)

Beweis:

$$1\text{-ter Spieler}: \quad \$^1 : S^1 \times S^2 \to \Re \qquad 2\text{-ter Spieler}: \quad \$^2 : S^1 \times S^2 \to \Re$$

$$\$^1(S3, S3) = 5 \geq 3 = \$^1(S2, S3) \qquad \$^2(S3, S3) = 3 \geq 1 = \$^2(S3, S2)$$

$$\$^1(S3, S3) = 5 \geq 3 = \$^1(S1, S3) \qquad \$^2(S3, S3) = 3 \geq 1 = \$^2(S3, S1)$$

Welche Strategie würden Sie spielen?

Gibt es eine dominante Strategie? Geben Sie die Nash-Gleichgewichte an.
Ist es ein symmetrisches oder unsymmetrisches Spiel?

	Stein	**Schere**	**Papier**
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien!

Es gibt keine dominante Strategie und auch keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien. Es ist ein symmetrisches (2x3)-Spiel.

	Stein	Schere	Papier
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Berechnung des Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien (I)

		y_1	y_2	$1-y_1-y_2$
		Stein	**Schere**	**Papier**
x_1	Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
x_2	Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
$1-x_1-x_2$	Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Auszahlungsfunktion des 1-ter Spieler : $\$^1 : \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^2 \to \Re$

$$\begin{aligned}\$^1(x_1,x_2,y_1,y_2) &= 0\cdot x_1\cdot y_1 + 1\cdot x_1\cdot y_2 + (-1)\cdot x_1\cdot(1-y_1-y_2)+\\ &+(-1)\cdot x_2\cdot y_1 + 0\cdot x_2\cdot y_2 + 1\cdot x_2\cdot(1-y_1-y_2)+\\ &+1\cdot(1-x_1-x_2)\cdot y_1 + (-1)\cdot(1-x_1-x_2)\cdot y_2 + 0\cdot(1-x_1-x_2)\cdot(1-y_1-y_2)\\ &= x_1\cdot(1-3\cdot y_2) + x_2\cdot(3\cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2\end{aligned}$$

Möglichkeit zur Berechnung eines inneren Nash-Gleichgewichts

$$\left.\frac{\partial \$^1(x_1,x_2,y_1,y_2)}{\partial x_1}\right|_{y_1=y_1^*,y_2=y_2^*} = \left(1-3\cdot y_2^*\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_2^* = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$$

$$\left.\frac{\partial \$^1(x_1,x_2,y_1,y_2)}{\partial x_2}\right|_{y_1=y_1^*,y_2=y_2^*} = \left(3\cdot y_1^* - 1\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_1^* = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$$

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers:

$$\$^1(x_1,x_2,y_1,y_2) = x_1\cdot\left(1-3\cdot y_2\right) + x_2\cdot\left(3\cdot y_1 - 1\right) - y_1 + y_2$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei

$$\left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Genauso für 2-ten Spieler

	Stein	**Schere**	**Papier**
Stein	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Schere	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (I)

Behauptung:
Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right) = \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right)$$

Beweis für den 1. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 1-ten Spielers:

$$\$^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 \cdot (1 - 3 \cdot y_2) + x_2 \cdot (3 \cdot y_1 - 1) - y_1 + y_2$$

Überprüfung des Nash-Gleichgewichts:

$$\$^1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \geq \$^1(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) =$$

$$\$^1(x_1, x_2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = x_1 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + x_2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \qquad \forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$$

Überprüfung des gemischten, inneren Nash-Gleichgewichts (II)

Behauptung:
Das gemischte Nash-Gleichgewicht befindet sich bei folgender Strategienkombination

$$\left((x_1^*, x_2^*, x_3^*), (y_1^*, y_2^*, y_3^*)\right) = \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right)$$

Beweis für den 2. Spieler:

Auszahlungsfunktion des 2-ten Spielers:

$$\$^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 \cdot (3 \cdot x_2 - 1) + y_2 \cdot (1 - 3 \cdot x_1) + x_1 - x_2$$

Überprüfung des Nash-Gleichgewichts:

$$\$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \geq \$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2) =$$

$$\$^2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, y_1, y_2) = y_1 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) + y_2 \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \qquad \forall\, y_1, y_2 \in [0,1]$$

Inhaltsübersicht des dritten Teils der Vorlesung

1. Grundlagen der Spieltheorie
    a) Einleitung
    b) Mathematische Grundlagen (Teil 1)
    c) Definition eines Spiels in Normalform mit Auszahlung
    d) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
    e) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
    f) Reine und gemischte Strategien
    g) Mathematische Grundlagen (Teil 2)
    h) Dominante Strategien und Nash Gleichgewichte
    i) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
    j) Mathematische Grundlagen (Teil 3)
    k) Symmetrische und unsymmetrische Spiele
    l) Beispiel: Zwei Spieler – Zwei Strategien
    m) Beispiel: Zwei Spieler – Drei Strategien
    n) Weitere Konzepte der Spieltheorie

In dieser Vorlesung nicht behandelte Konzepte der Spieltheorie

- Abbildung der besten Antwort
- Strategische Äquivalenz von Spielen
- Spiele in extensiver Form
- Verfeinerung des Nash-Gleichgewichts
- Signalisierungsspiele
- Bayesches Nash-Gleichgewicht
- Kooperative Spiele
- „Believe spaces“
- „Mechanism design“
- …

Hausaufgabe

- Zwei Länder stehen vor der Entscheidung die Streitkräfte ihres Landes militärisch, atomar aufzurüsten oder atomar abzurüsten.

1. Definieren Sie das Spiel.
2. Beschreiben Sie eine mögliche Situation der Länder und definieren Sie die dem Spiel zugrundeliegende Auszahlungsmatrix.
3. Berechnen Sie die Nash-Gleichgewichte des Spiels. Gibt es eine dominante Strategie?
4. Um welche Spielklasse handelt es sich?
5. Handelt es sich um ein symmetrisches oder unsymmetrisches Spiel?

Literaturangaben

(Bitte zunächst nicht lesen -> viel zu mathematisch!)

- *Schlee, Walter* **Einführung in die Spieltheorie**, Vieweg, 2004
- *Jörgen W. Weilbull* **Evolutionary Game Theory**, The MIT Press, 1995
- *J. Hofbauer, K. Sigmund* **Evolutionary Games and Population Dynamics**, *Cambridge* UP, 1998
- *Erwin Amann* **Evolutionäre Spieltheorie**, Physica-Verlag, 1999
- *H. Rommelfanger,* **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, …**