H. van Hees **Sommersemester 2019**

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 13

Aufgabe 1: Berechnen einer Determinanten
Betrachten Sie wieder die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

vom vorigen Übungsblatt.
Berechnen Sie die Determinante

(a) mit dem Determinantenentwicklungssatz durch Entwicklung nach der ersten Zeile,

(b) als Spatprodukt der Spaltenvektoren,

(c) indem Sie die Matrix zunächst durch Gaußelimination auf obere Dreiecksgestalt bringen.

Aufgabe 2: Transformationsverhalten des Vektorprodukts
Hinweis: In dieser Aufgabe verwenden wir die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. über in einer Gleichung doppelt auftretende Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert!
Wir wollen zeigen, dass sich die kartesischen Komponenten des Vektors

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{2}$$

unter einem orthogonalen Basiswechsel mit der Drehmatrix $\hat{O}$

$$\vec{e}_j = O_{kj} \vec{e}'_k, \tag{3}$$

wie kartesische Vektorkomponenten transformieren. Sie dürfen dazu verwenden, dass die Drehmatrix orthogonal, d.h. dass

$$\hat{O}^{\mathrm{T}} \hat{O} = \hat{O} \hat{O}^{\mathrm{T}} = \mathbb{1}_3 \tag{4}$$

gilt und orientierungserhaltend ist, d.h. es ist

$$\det \hat{O} = +1. \tag{5}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass aus (3) für die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzgl. der beiden Basen die Beziehung

$$a'_k = O_{kj} a_j, \quad b'_k = O_{kj} b_j \tag{6}$$

folgt.

(b) Verwenden Sie diese Transformationsformeln nun in der Formel für die Komponenten des Vektorprodukts

$$c'_j = \epsilon_{jkl} a'_k b'_l, \tag{7}$$

um daraus herzuleiten, dass

$$c'_j = O_{jk} c_k \tag{8}$$

gilt, wobei

$$c_k = \epsilon_{klm} a_l b_m \tag{9}$$

ist, d.h. in Matrix-Vektor-Schreibweise gilt

$$\underline{a}' \times \underline{b}' = (\hat{O}\underline{a}) \times (\hat{O}\underline{b}) = \hat{O}(\underline{a} \times \underline{b}). \tag{10}$$

(c) (Knobelaufgabe) Wie verhält sich das Skalarprodukt zweier Vektoren unter Raumspiegelungen. Die Raumspiegelung entspricht dabei der Transformation $\vec{a} \to -\vec{a}$.