Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte): Resonanzkatastrophe

Betrachten Sie den ungedämpften harmonischen Oszillator mit einer harmonischen äußeren Kraft, deren Kreisfrequenz der Eigenfrequenz des Oszillators entspricht, also die lineare inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega_0 t) \tag{1}$$

Sie dürfen ohne weitere Rechnung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \tag{2}$$

als bekannt voraussetzen.

Wir suchen also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

(a) **[2 Punkte]** Zeigen Sie, dass der Standardansatz

$$x_{\text{inh}}(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \tag{3}$$

nicht zum Ziel führt.

Diskutieren Sie, warum man dies aus physikalischen Gründen erwarten kann.

(b) **[5 Punkte]** Verwenden Sie nun den Ansatz

$$x_{\text{inh}}(t) = C(t)[C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)], \tag{4}$$

um doch noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

(c) **[3 Punkte]** Lösen Sie nun unter Verwendung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (2) und der soeben gefundenen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ und skizzieren Sie diese Lösung.

Argumentieren Sie nun nochmals physikalisch, warum man mit dem Standardansatz (3) scheitert.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Lösung mit Potenzreihenansatz (Frobenius-Methode)

Wir betrachten die homogene Lineare DGL 2. Ordnung mit *zeitabhängigen Koeffizienten*

$$t^2 \ddot{x} + 2t\dot{x} = 0. \tag{5}$$

Setzen Sie nun einen allgemeinen Potenzreihenansatz der Form

$$x(t) = t^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^{j+\lambda} \tag{6}$$

an.

(a) **[5 Punkte]** Setzen Sie den Ansatz in die DGL ein und bestimmen Sie mögliche Werte für λ und damit dann Formeln für die Koeffizienten C_j.

(b) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie nun zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, indem Sie geeignete λ und C_j bestimmen. Dabei darf man stets annehmen, dass $C_0 \neq 0$ ist (*warum?*).
