Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 10

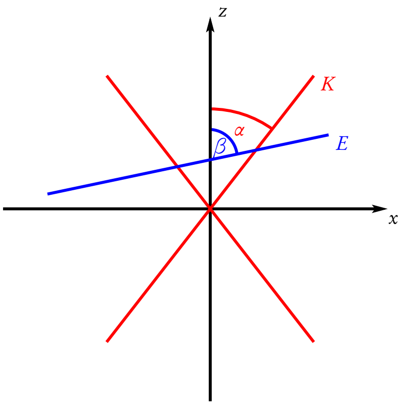
Aufgabe 1 [10 Punkte]: Kegelschnitte

Wir wollen zeigen, dass die im Skript durch ihre Ortsdefinitionen definierten Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) tatsächlich die Schnittkurven einer Ebene mit einem Doppelkreiskegel ist.

In Zylinderkoordinaten ist der Doppelkegel durch

$$K: \quad \underline{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R(z)\cos\varphi \\ R(z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad R(z) = z\tan\alpha \tag{1}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ parametrisiert.



Im Folgenden ist es bequemer, die implizite Definition

$$x^2 + y^2 = R^2(z)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = R^2(z) \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2\tan^2\alpha \tag{2}$$

zu verwenden. Dabei ist $0 < \alpha < \pi/2$ der halbe Öffnungswinkel des Kegels.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die Ebene durch

$$\begin{aligned} E: \quad \underline{r}(q, y) &= \begin{pmatrix} q\sin\beta \\ y \\ q\cos\beta + z_0 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= q\vec{e}_\beta + y\vec{e}_y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

parametrisiert ist. Dabei ist $\beta \in [0, \pi/2]$ und $z_0 > 0$. Wir bemerken, dass q und y kartesische Koordinaten in der Ebene E sind, weil $\vec{e}_\beta = (\sin\beta, 0, \cos\beta)^{\mathrm{T}}$.

Aufgrund der Symmetrie des Kreiskegels sind dann alle möglichen hinsichtlich der Schnittkurven zwischen Ebene und Kegel erfasst. Berechnen Sie nun diese Schnittkurven in impliziter Form $F(q, y) = 0$ und zeigen Sie, dass es sich bis auf spezielle Ausnahmen, wo die Schnittkurven Geraden sind bzw. Ebene und Kegel nur einen einzigen Punkt (die Kegelspitze) gemeinsam haben, um Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln handelt.

Dazu nehmen Sie die folgenden Fallunterscheidungen vor

(1) $z_0 = 0$,

(2) $z_0 > 0$.

Dabei sind in diesen beiden Fällen jeweils noch weitere Fallunterscheidungen hinsichtlich des Winkels β zu berücksichtigen.