

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Rechnen mit komplexen Zahlen

Es seien $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 3 + 4i$. Berechnen Sie

- (a) [4 Punkte] $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ und z_1/z_2 .
 - (b) [4 Punkte] Berechnen Sie jeweils den Betrag und das Argument für $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \exp(i\varphi_2)$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$.
 - (c) [2 Punkte] Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Man nennt diese Lösungen die „komplexen n -ten Einheitswurzeln“.
-

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Trigonometrische Funktionen und exp-Funktion

- (a) [6 Punkte] Verwenden Sie die Eulersche Formel $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$, um die Additionstheoreme für \cos und \sin herzuleiten.
- (b) [4 Punkte] Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie nun $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ als Punkt in der Gaußschen (x, y) -Zahlenebene. Was bedeutet dann die Abbildung $z \rightarrow z' = z \exp(i\varphi)$.

Tip: Die Aufgabe wird besonders einfach lösbar, wenn man die Polarform $z = r \exp(i\varphi_z)$ verwendet.

Aufgabe 3 [10 Punkte]: Harmonischer Oszillator mit Exponentialfunktionen

Wir betrachten nochmals die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator mit Dämpfung

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

Dabei sind $\gamma > 0$ der Dämpfungsfaktor und $\omega_0 > 0$ die Frequenz des ungedämpften Oszillators.

- (a) (4 Punkte) Verwenden Sie den Exponentialansatz

$$x(t) = A \exp(\lambda t) \quad (2)$$

und finden Sie durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung mögliche Werte für λ .

- (b) (4 Punkte) Wie lautet demnach die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung?

Hinweis: Beachten Sie, dass der „aperiodische Grenzfall“, also der Fall, dass $\gamma = \omega_0$ ist, eine gesonderte Diskussion erfordert.

- (c) (2 Punkte) Wie hängen die so gefundenen Lösungen mit der bisher verwendeten rein reellen Lösungsmethode zusammen?
-

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/mameth-13-SS21/index.html>