

Mathematische Methoden der Physik für das Lehramt L3 – Blatt 11**Aufgabe 1 [10 Punkte]: Hauptachsentransformation einer symmetrischen Matrix**

Gegeben sei die symmetrische $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Der Satz von der Hauptachsentransformation besagt, dass man die Matrix durch eine Drehung, also eine $SO(3)$ -Transformation diagonalisieren kann. Dies wollen wir für die gegebene Matrix konkret ausführen.

- (a) (2 Punkte) Berechnen Sie das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det(\hat{A} - \lambda \mathbb{1}). \quad (2)$$

- (b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix \hat{A} .
- (c) (3 Punkte) Bestimmen Sie drei orthonormierte Eigenvektoren $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ so, dass sie ein rechtshändiges kartesisches Basissystem bilden.
- (d) (3 Punkte) Rechnen Sie dann nach, dass die Transformationsmatrix $\hat{T} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \in SO(3)$ ist und dass sie tatsächlich die Matrix diagonalisiert, d.h. dass $\hat{M}' = \hat{T}^{-1} \hat{M} \hat{T} = \hat{T}^T \hat{M} \hat{T} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gilt.