H. van Hees **Wintersemester 2019/2020**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1: Schwerpunktsberechnungen

Der Schwerpunkt eines Körpers K ist durch

$$\vec{x}_{\text{s}} = \frac{1}{M} \int_K \mathrm{d}^3\vec{x}\, \rho(\vec{x})\vec{x} \tag{1}$$

gegeben. Dabei ist $\rho(\vec{x})$ die Massendichte des Körpers, und M die Gesamtmasse.

Berechnen Sie den Schwerpunkt folgender homogener ($\rho = \text{const}$) Körper mit Gesamtmasse M:

(a) der Halbkugel vom Radius a

$$\vec{x}(r,\vartheta,\varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0,a], \quad \vartheta \in [0,\pi/2], \quad \varphi \in [0,2\pi]. \tag{2}$$

Hinweise: Berechnen Sie zunächst das Volumen V der Halbkugel und damit $\rho = M/V$.

Das Volumenelement in den hier verwendeten Kugelkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\vartheta$.

(b) des geraden Kreiskegels vom Radius a und Höhe h

$$\vec{x}(R,\varphi,z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dabei ist $z \in [0,h]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und für jedes z ist $R \in [0, az/h]$ (warum?).

Hinweis: Berechnen Sie zunächst wieder das Volumen des Kegels und damit $\rho = M/V$. Das Volumenelement der hier verwendeten Zylinderkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}R\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z\, R$.

Aufgabe 2: Satz von Steiner

Wir legen zunächst den Ursprung eines körperfesten kartesischen Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers, d.h. es gilt

$$\int_V \mathrm{d}^3 x\, \rho(\vec{x})\vec{x} = \vec{0}. \tag{4}$$

Der Trägheitstensor um den Schwerpunkt ist dann durch

$$\Theta_{jk}^{(\text{S})} = \int_V \mathrm{d}^3 x\, \rho(\vec{x})(\vec{x}^2 \delta^{jk} - x^j x^k) \tag{5}$$

definiert.

(a) Sei dann $\vec{r}$ der Ortsvektor eines beliebigen anderen festen Punktes P in diesem Körper. Wie hängen der Trägheitstensor $\Theta_{jk}^{(\text{P})}$ bzgl. dieses Punktes

$$\Theta_{jk}^{(\text{P})} = \int_V \mathrm{d}^3 x\, \rho(\vec{x})[(\vec{x}-\vec{r})^2 \delta_{jk} - (x_j - r_j)(x_k - r_k)] \tag{6}$$

mit dem Trägheitstensor $\Theta_{jk}^{(S)}$ um den Schwerpunkt zusammen?

Lösung: Wir multiplizieren die Produkte in der eckigen Klammer aus und verwenden (4):

$$\begin{aligned}\Theta_{jk}^{(P)} &= \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x})[(\vec{x}^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{r} + \vec{r}^2)\delta_{jk} - (x_j x_k - x_j r_k - x_k r_j + r_j r_k)] \\ &= \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x})[(\vec{x}^2 + \vec{r}^2)\delta_{jk} - (x_j x_k + r_j r_k)].\end{aligned} \tag{7}$$

Nun fassen wir die Terme in der Klammer anders zusammen und beachten, dass $\int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x}) = M$ die Gesamtmasse des Körpers ist:

$$\Theta_{jk}^{(P)} = \int_V \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x})\rho(\vec{x})(\vec{x}^2\delta_{jk} - x_j x_k) + M(\vec{r}^2\delta_{jk} - r_j r_k) = \Theta_{jk}^{(S)} + M(\vec{r}^2\delta_{jk} - r_j r_k). \tag{8}$$

(b) Das Trägheitsmoment um eine Achse in Richtung $\vec{n}$ (mit $|\vec{n}| = 1$) durch den Schwerpunkt bzw. durch den Punkt P ist durch

$$\Theta_{\vec{n}}^{(S)} = \Theta_{jk}^{(S)} n_j n_k \quad \text{bzw.} \quad \Theta_{\vec{n}}^{(P)} = \Theta_{jk}^{(P)} n_j n_k \tag{9}$$

gegeben (wobei hier die Einsteinschen Summenkonvention gelten soll).

Was folgt aus der oben hergeleiteten Beziehung zwischen $\Theta_{jk}^{(S)}$ und $\Theta_{jk}^{(P)}$ für diese Trägheitsmomente um zwei zueinander parallele Achsen.

Bemerkung: Die entsprechende Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten ist als **Satz von Steiner** bekannt (Jakob Steiner, 1796-1863) oder **Parallelachsen-Theorem** bekannt.