

## Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 5

---

### Aufgabe 1 (10 Punkte): Satellit auf Kreisbahn

Wie lautet das effektive Potenzial  $V_{\text{eff}}$  für die Bahn eines Erdsatelliten mit der Masse  $m$ ? Dabei darf von der Näherung Gebrauch gemacht werden, dass die Erde als festes Zentrum behandelt werden darf, d.h.  $m \ll m_{\text{Erde}}$ .

Gehen Sie vom Energieerhaltungssatz

$$E = m\dot{r}^2/2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (1)$$

mit diesem Potential aus. Bestimmen Sie den Radius  $r_0$  der Kreisbahn als Funktion der Umlauffrequenz  $\omega$  des Satelliten. Welcher Radius ergibt sich für eine geostationäre Bahn, d.h. eine Bahn, für die der Satellit stets über demselben Punkt der Erde steht?

Die Gravitationskonstante ist  $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  und die Erdmasse  $m_{\text{Erde}} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

**Hinweis:** Es ist dabei hilfreich, dass man durch Ableiten von (1) nach der Zeit die effektive Bewegungsgleichung für  $r$

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}V_{\text{eff}}(r) \quad (2)$$

erhält (*warum?*).

**Hinweis:** Alle Resultate der Vorlesung (Skript Abschnitt 2.8) dürfen ohne Beweis verwendet werden!

---

### Aufgabe 2 (10 Punkte): Bewegung im allgemeinen Zentralkraftfeld

Wir betrachten allgemein die Bewegung eines Teilchens im Zentralkraftfeld, wobei die Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(r), \quad r = |\vec{x}|$$

gegeben ist.

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{e}_r \frac{dV}{dr} = F_r \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{r}$$

gilt.

- (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus der Newtonschen Bewegungsgleichung die Erhaltung der Gesamtenergie des Teilchens

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(r)$$

und des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

folgen.

- (c) (2 Punkte) Drücken Sie  $|\vec{L}|$  durch die Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und deren Zeitableitungen  $\dot{r}$  und  $\dot{\varphi}$  aus, wobei die Polarkoordinaten durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert sind.

- (d) (2 Punkte) Bestimmen Sie unter Verwendung von Energie- und Drehimpulserhaltung Bewegungsgleichungen für  $r$  und  $\varphi$ . Zeigen Sie, dass die Bewegung für  $r$  durch eine eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem „effektiven Potential“ (welchem?) beschrieben wird.
- (e) (2 Punkte) Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass für vorgegebene Energie  $E$  und Drehimpuls  $L = |\vec{L}|$  eine Kreisbahn  $r = R = \text{const}$  als Lösung existiert.
- (f) **Zusatzaufgabe zum Knobeln (3 Zusatzpunkte):** Diskutieren Sie, ob diese Kreisbahn stabil gegen kleine Störungen ist. Setzen Sie dazu  $r = R + \eta$  und entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für  $r$  bis zur linearen Ordnung nach  $\eta$  und diskutieren Sie die entstehende näherungsweise Bewegungsgleichung für  $\eta$ .