Mechanik - Review

Newtonsche Postulate:

(1) Es gibt ein Inertialsystem (absoluter Raum + absolute)

IS: Ein Körper verharrt in Ruhe oder glf. geradliniger Bewegung, wenn keine Kräfte auf ihn einwirken

(Trägheitsprinzip)

(2) Änderungen der Bewegung $\Leftrightarrow$ Kräfte

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad ; \quad \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$$

(3) Wechselwirkungsprinzip: "actio = reactio"

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{F}_{12} & \text{Kraft auf Teilchen } 1 \\ \vec{F}_{21} & \quad\text{— '' —} \qquad\quad 2 \end{array}\right\} \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Dynamik

Konservative Kräfte: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) = -\begin{pmatrix} \partial_1 V \\ \partial_2 V \\ \partial_3 V \end{pmatrix}$

$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad j \in \{1,2,3\}$ (kartesische Koord.)

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \Rightarrow \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2}_{T\text{ kin. Energie}} + \underbrace{V(\vec{x})}_{\text{pot. Energie}} = \text{const.}$$

Zentralkräfte: $\vec{F} = f(r)\,\vec{x} \quad (r = |\vec{x}|)$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r) = -(\vec{\nabla} r)\, V'(r) = -\frac{\vec{x}}{r} V'(r)$$

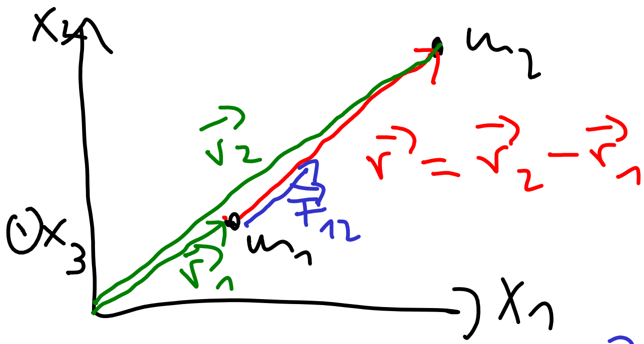
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}} \Rightarrow \dot{\vec{L}} = m(\cancel{\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}}} + \vec{x} \times \ddot{\vec{x}})$$

$$= -m\,\vec{x} \times \frac{\vec{x}}{r} V'(r) = \vec{0}$$

$\vec{L}$ ist erhalten

Newtonsches Gravitationsgesetz



$$\vec F_{12} = -\frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}\, G\, \frac{m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^2}$$

$$\vec F_{21} = -\vec F_{12}$$

$$F_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3} \Rightarrow \vec F_{12} = -\vec\nabla_1 V(|\vec r_1 - \vec r_2|)$$

$$V(|\vec r_1 - \vec r_2|) = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

Kepler-Bewegung: Planet um Sonne

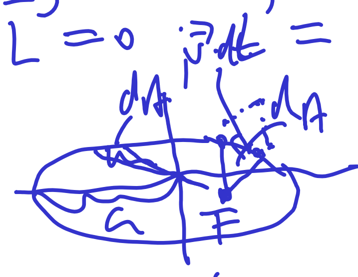
Schwerpunkt bewegt sich mit $\vec v_{sp} = \text{const.} \Rightarrow \vec v_{sp} = \vec 0$

$$m_2 = m_\odot \gg m_1 = m_p \Rightarrow \vec r_s = \vec 0$$

$$\cancel{m_p}\, \ddot{\vec r}_p = -\frac{G \cancel{m_p} m_\odot}{|\vec r_p|^3}\, \vec r_p$$

$\Rightarrow$ Kepler

2. Gesetz $\hat{=}$ $\dot{\vec L} = 0$, $\vec L = m \vec r \times \dot{\vec r}$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec L| \frac{1}{m} = \text{const.}$$

nur für $\frac{1}{r^2} - \vec F$ {

1. Gesetz: Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen mit Sonne in einem Brennpunkt

3. Gesetz: $m_\odot \gg m_{p_{1,2}} \Rightarrow \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \Leftrightarrow a^3/T^2 = \text{const.}$

Beschl. (rotierendes) Bezugssystem (Erde)

$$m\ddot{\vec r}' = \underbrace{\vec F'}_{\text{„echte Kraft"}} \underbrace{- 2m\,\vec\omega'\times\dot{\vec r}'}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{- m\,\vec\omega'\times(\vec\omega'\times\vec r')}_{\text{Zentrifugalkraft}} - m\,\dot{\vec\omega}'\times\vec r'$$

Bsp. Foucault-Pendel $\left(\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{Tag}} = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60\,s}\right)$

$\Rightarrow$ Schwingungsebene rotiert

Umlaufz.: $T = \frac{2\pi}{\omega\cos\vartheta} = \frac{2\pi}{\omega\sin\lambda} \simeq 31\,h \;(\lambda = 50^\circ)$

Hamilton-Prinzip

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k, \dot q_k, t) \xrightarrow{\text{Bahn}} \text{macht } S \text{ minimal}$$

Lagrangefunktion

$$L = T - V$$

kin Energie − potentielle Energie

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \quad \text{gen. Impuls}$$

$$\dot p_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \overset{!}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k} \Leftrightarrow \text{Bewegungsgln.}$$

Noethertheorem: jeder kontinuierlichen Symmetrie $\hat{=}$ Erhaltungssatz

Newtonsche RZ-Symmetrien:

Homogenität des Raumes: Translationsinv. $\Rightarrow \vec p = \text{konst.}$

Isotropie des Raumes: Drehungen $\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$

Homogenität der Zeit: zeitl. Translationsinv. $\Rightarrow E = \text{const}$

$$E = H = \dot{q}_k p_k - L \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \right)$$

$$H = T + V$$

"Boostinvarianz": $\vec{x}' = \vec{x} - \underbrace{\vec{v}}_{\text{const.}} t \;,\; t' = t$

$$\dot{\vec{R}} = \text{const.} \quad \text{Schwerpunktsgeschw.}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \;; \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$