Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 13

Aufgabe 1 (10 Punkte): Schwerpunktsberechnungen
Der Schwerpunkt eines Körpers K ist durch

$$\vec{x}_s = \frac{1}{M} \int_K \mathrm{d}^3\vec{x}\,\rho(\vec{x})\vec{x} \tag{1}$$

gegeben. Dabei ist $\rho(\vec{x})$ die Massendichte des Körpers, und M die Gesamtmasse.
Berechnen Sie den Schwerpunkt folgender homogener ($\rho = \text{const}$) Körper mit Gesamtmasse M:

(a) (5 Punkte) der Halbkugel vom Radius a

$$\vec{x}(r,\vartheta,\varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0,a], \quad \vartheta \in [0,\pi/2], \quad \varphi \in [0,2\pi]. \tag{2}$$

Hinweise: Berechnen Sie zunächst das Volumen V der Halbkugel und damit $\rho = M/V$.
Das Volumenelement in den hier verwendeten Kugelkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\vartheta$.

(b) (5 Punkte) des geraden Kreiskegels vom Radius a und Höhe h

$$\vec{x}(R,\varphi,z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Dabei ist $z \in [0,h]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ und für jedes z ist $R \in [0, az/h]$ (warum?).
Hinweis: Berechnen Sie zunächst wieder das Volumen des Kegels und damit $\rho = M/V$. Das Volumenelement der hier verwendeten Zylinderkoordinaten ist $\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\, R$.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Satz von Steiner
Wir legen zunächst den Ursprung eines körperfesten kartesischen Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers, d.h. es gilt

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})\vec{x} = \vec{0}. \tag{4}$$

Der Trägheitstensor um den Schwerpunkt ist dann durch

$$\Theta^{(\mathrm{S})}_{jk} = \int_V \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})(\vec{x}^2\delta^{jk} - x^j x^k) \tag{5}$$

definiert.

(a) (6 Punkte) Es sei dann $\vec{r}$ der Ortsvektor eines beliebigen anderen festen Punktes P in diesem Körper. Wie hängen der Trägheitstensor $\Theta^{(\mathrm{P})}_{jk}$ bzgl. dieses Punktes

$$\Theta^{(\mathrm{P})}_{jk} = \int_V \mathrm{d}^3x\,\rho(\vec{x})[(\vec{x}-\vec{r})^2\delta_{jk} - (x_j - r_j)(x_k - r_k)] \tag{6}$$

mit dem Trägheitstensor $\Theta^{(\mathrm{S})}_{jk}$ um den Schwerpunkt zusammen?

(b) (4 Punkte) Das Trägheitsmoment um eine Achse in Richtung $\vec{n}$ (mit $|\vec{n}| = 1$) durch den Schwerpunkt bzw. durch den Punkt P ist durch

$$\Theta_{\vec{n}}^{(\mathrm{S})} = \Theta_{jk}^{(\mathrm{S})} n_j n_k \quad \text{bzw.} \quad \Theta_{\vec{n}}^{(\mathrm{P})} = \Theta_{jk}^{(\mathrm{P})} n_j n_k \tag{7}$$

gegeben (wobei hier die Einsteinschen Summenkonvention gelten soll).

Was folgt aus der oben hergeleiteten Beziehung zwischen $\Theta_{jk}^{(\mathrm{S})}$ und $\Theta_{jk}^{(\mathrm{P})}$ für diese Trägheitsmomente um zwei zueinander parallele Achsen.

Bemerkung: Die entsprechende Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten ist als **Satz von Steiner** bekannt (Jakob Steiner, 1796-1863) oder **Parallelachsen-Theorem** bekannt.