Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Strahlungseichung für freie Felder

In der Vorlesung haben wir die Potentiale Φ und $\vec{A}$ für das elektromagnetische Feld im Vakuum eingeführt. Bei Anwesenheit von (vorgegebenen) Ladungs- und Stromverteilungen ρ bzw. $\vec{j}$ lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\Phi, \tag{1}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{2}$$

$$\Box\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{3}$$

$$\Box\vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{4}$$

Dabei müssen die Potentiale die Lorenz-Eichbedingung

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{5}$$

erfüllen.

Im Folgenden betrachten wir den Fall **freier elektromagnetischer Wellen**, d.h. $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$.

(a) **[2 Punkte]** Zeigen Sie, dass in diesem Fall *zusätzlich* zur Lorenz-Eichbedingung noch

$$\Phi' = 0 \tag{6}$$

gefordert werden darf, und dass dies durch eine Eichtransformation

$$\Phi' = \Phi + \partial_t \chi \stackrel{!}{=} 0, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \tag{7}$$

mit der Nebenbedingung

$$\Box\chi = 0 \tag{8}$$

erreicht werden kann.

(b) **[2 Punkte]** Vergewissern Sie sich, dass nun auch für die neuen Potentiale $\Phi' = 0$, $\vec{A}'$ immer noch die Lorenz-Eichbedingung erfüllt ist. Welche Eichbedingung ergibt sich daraus für $\vec{A}'$? Man nennt diese Eichung die **Strahlungseichung**. Warum kann es Potentiale in dieser Eichung nur für $\rho = 0$ geben?

(c) **[3 Punkte]** Finden Sie nun die allgmeine Ebene-Wellen-Lösung für in $\vec{k}$-Richtung fortschreitende Wellen mit dem komplexen Ansatz

$$\vec{A}'(t, \vec{r}) = \vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega t), \quad \vec{A}_0 = \text{const.} \tag{9}$$

Was ergibt sich für $\omega = \omega(\vec{k})$? Welche Einschränkung muss $\vec{A}_0$ erfüllen, damit die Strahlungseichbedingung für $\vec{A}'$ erfüllt ist.

(d) **[3 Punkte]** Berechnen Sie nun $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mittels (1). Dazu beachte man, dass die physikalischen Felder durch den Realteil der soeben berechneten komplexen Felder gegeben sind.

Aufgabe 2 [10 Punkte]: Eichtransformation von Lorenz- zu Coulomb-Eichung

In der Vorlesung haben wir als spezielle Eichbedingungen an die elektromagnetischen Potentiale die Lorenz-Eichung

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \Phi_{\text{L}} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\text{L}} = 0 \tag{10}$$

und die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\text{C}} = 0 \tag{11}$$

kennengelernt.

(a) **[3 Punkte]** Finden Sie eine partielle Differentialgleichung für das skalare Eichfeld χ, mit dem die beiden Eichungen via

$$\Phi_{\text{C}} = \Phi_{\text{L}} + \frac{1}{c^2}\partial_t \chi, \quad \vec{A}_{\text{C}} = \Phi_{\text{L}} - \vec{\nabla}\chi \tag{12}$$

ineinander umgerechnet werden können.

(b) **[4 Punkte]** Verwenden Sie die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{13}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}, \tag{14}$$

um Feldgleichungen für die Potentiale in Coulomb-Eichung Φ_C und $\vec{A}_C$ herzuleiten.

(c) **[3 Punkte]** Zeigen Sie, dass die gefundenen Feldgleichungen mit der Coulomb-Eichbedingung (11) kompatibel sind.