

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 2

Aufgabe 1

Man nennt die Polarisationszustände

$$|\epsilon_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + i|e_2\rangle) \quad \text{und} \quad |\epsilon_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - i|e_2\rangle) \quad (1)$$

links- bzw. rechtszirkular polarisierte Photonen.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt ein linkszirkular polarisiertes Photon (Zustand $|\epsilon_L\rangle$) durch einen gegen die x_1 -Achse um den Winkel α verdrehten Polarisationsfilter?
- (b) Zeigen Sie, dass $|\epsilon_L\rangle$ und $|\epsilon_R\rangle$ eine vollständige Orthonormalbasis im (2D!) Hilbert-Raum der Polarisationszustände bilden.
- (c) Drücken Sie die Polarisationszustände $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$ (für in x_1 - bzw. x_2 -Richtung linear polarisierte Photonen) durch die Basis zirkularer Polarisationszustände aus.
- (d) Wie rechnen sich die Komponenten eines beliebigen Polarisationszustandes $|\psi\rangle$ bzgl. dieser beiden Orthonormalbasen ineinander um, d.h. wie hängen

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2)$$

miteinander zusammen.

Tip: Die Komponenten sind durch

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1 | \psi \rangle \\ \langle e_2 | \psi \rangle \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \epsilon_L | \psi \rangle \\ \langle \epsilon_R | \psi \rangle \end{pmatrix} \quad (3)$$

gegeben, und die Vollständigkeit der Orthonormalsysteme besagt, dass

$$|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| = |\epsilon_L\rangle\langle \epsilon_L| + |\epsilon_R\rangle\langle \epsilon_R| = \mathbb{1} \quad (4)$$

gilt.

Aufgabe 2: Gauß-Integrale

Wir betrachten die Gauß-Verteilung für eine reelle Zufallsvariable $x \in \mathbb{R}$

$$W(x) = N \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\Delta x^2}\right]. \quad (5)$$

Um die Normierung zu bestimmen und Erwartungswerte und Momente der Verteilung zu berechnen, benötigt man einige Integrale, die wir in dieser Übung herleiten wollen. Dabei ist $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\Delta x > 0$.

- (a) Zuerst bestimmen wir das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), \quad a > 0. \quad (6)$$

Dazu schreiben wir

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{y^2}{a^2}\right). \quad (7)$$

Dies können wir als Flächenintegral über die ganze Ebene \mathbb{R}^2 uminterpretieren.

Führen Sie Polarkoordinaten $(x, y) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ein. Dann lässt sich das Integral leicht durch Substitution lösen, und da $I > 0$ ist, ist damit auch I bestimmt.

Hinweis: Das Ergebnis ist $I = a\sqrt{\pi}$.

- (b) Berechnen Sie mit einer geeigneten Substitution aus dem Ergebnis der vorigen Teilaufgabe die „erzeugende Funktion“

$$Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx W(x) \exp(\lambda x) \quad (8)$$

und bestimmen Sie den Normierungsfaktor N so, dass $Z(\lambda = 0) = 1$ wird, d.h. so, dass $W(x)$ ordnungsgemäß auf Eins normiert ist.

Hinweis: Mit der korrekt gewählten Normierungskonstante lautet das Ergebnis

$$Z(\lambda) = \exp\left(\lambda x_0 + \frac{\lambda^2 \Delta x^2}{2}\right). \quad (9)$$

- (c) Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungen $Z'(\lambda)$ und $Z''(\lambda)$ die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ und daraus die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.