H. van Hees **Wintersemester 2019/2020**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 8

Aufgabe 1: Drehimpulse und Drehungen

Wir betrachten den Bahndrehimpulsoperator

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{p}}. \tag{1}$$

Dabei sind $\vec{\mathbf{x}}$ und $\vec{\mathbf{p}}$ die Orts- und Impulsoperatoren eines Teilchens. Aus der Vorlesung kennen wir die Kommutatorrelationen

$$\left[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k\right] = 0, \quad \left[\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k\right] = 0, \quad \left[\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k\right] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}\mathbb{1}, \tag{2}$$

$$\left[\mathbf{L}_j, \mathbf{L}_k\right] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jkl}\mathbf{L}_k. \tag{3}$$

Dabei ist $j, k \in \{1, 2, 3\}$, und wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. über gleichlautende Indizes wird summiert.

(a) Zeigen Sie, dass für die Ortsoperatoren die Vertauschungsregeln

$$\left[\mathbf{L}_j, \mathbf{x}_k\right] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jkl}\mathbf{x}_l \tag{4}$$

gilt. Verwenden Sie dazu, dass man (1) in Komponentenschreibweise als

$$\mathbf{L}_j = \epsilon_{jlm}\mathbf{x}_l\mathbf{p}_m \tag{5}$$

schreiben kann, und verwenden Sie dann die allgmeine Formel

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B} + \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] \tag{6}$$

sowie die Kommutatorrelationen (2).

(b) Wir wollen nun die anschauliche Bedeutung des Operators

$$\mathbf{D}_3(\varphi) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}\varphi\mathbf{L}_3}{\hbar}\right), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{7}$$

untersuchen, indem wir zeigen, dass er **Drehungen** um die 3-Achse im Ortsraum repräsentiert. Betrachten Sie nun die Operatoren

$$\mathbf{X}_j(\varphi) = \mathbf{D}_3(\varphi)\mathbf{x}_j\mathbf{D}_3^{-1}(\varphi). \tag{8}$$

Zeigen Sie, mit Hilfe der Kommutarorelationen (4), dass diese Operatoren die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\mathbf{X}_j(\varphi) = -\epsilon_{3jl}\mathbf{X}_l(\varphi) \tag{9}$$

erfüllen.

(c) Schreiben Sie (9) für alle drei Komponenten explizit hin, und lösen Sie die Differentialgleichungen. **Tip:** Dabei darf man mit den Ortsoperatoren $\mathbf{X}_j(\varphi)$ weitestgehend wie mit Zahlen umgehen, weil sie allesamt untereinander kommutieren.

(d) Erklären Sie aufgrund des Resultats, dass $\vec{\mathbf{X}}(\varphi)$ der Drehung des Ortsvetkors $\vec{\mathbf{x}}$ um die 3-Achse mit Drehwinkel φ entspricht!

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-l3-WS1920/index.html`