

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 9

Aufgabe 1: Bohrscher Radius

Wie in der Vorlesung gezeigt, sind die Energie-Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms ($Z = 1$) durch

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)! a_B^3}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^l \exp\left(-\frac{r}{na_B}\right) L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_B}\right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (1)$$

gegeben. Die assoziierten Laguerre-Polynome $L_{n_r}^k$ und die Kugelflächenfunktionen sind im Skript ausführlich erklärt. Dabei ist

$$a_B = \frac{\hbar}{\alpha \mu c}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}, \quad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad (2)$$

Betrachten Sie nun den Grundzustand des Wasserstoffatoms mit den Quantenzahlen $n = 1$, $l = m = 0$. Zeigen Sie, dass (1) ordnungsgemäß normiert ist und berechnen Sie den mittleren Abstand zwischen Proton und Elektron.

Tip: Die Integrale

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right) &= \frac{a_B^3}{4}, \\ \int_0^\infty dr r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a_B}\right) &= \frac{3}{8} a_B^4 \end{aligned} \quad (3)$$

dürfen ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 2: Teilchen im Magnetfeld

Wir betrachten den Hamilton-Operator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} [\vec{\mathbf{p}} - q\vec{A}(\vec{\mathbf{x}})]^2 = \frac{1}{2m} [\vec{\mathbf{p}}^2 - q\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{A}(\vec{\mathbf{x}}) - q\vec{A}(\vec{\mathbf{x}}) \cdot \vec{\mathbf{p}} + q^2 \vec{A}^2(\vec{\mathbf{x}})]. \quad (4)$$

Wir wollen zeigen, dass dies die Bewegung eines Teilchens mit Masse m und Ladung q im Magnetfeld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5)$$

entspricht. Dazu berechnen wir den Operator der Kraft auf das Teilchen:

- (a) Die Komponenten der Geschwindigkeit des Teilchens sind gemäß der allgemeinen Formel für die Operatoren, die die Zeitableitung einer Observablen definieren (s. Skript!) durch

$$\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{x}}_j = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{x}_j, \mathbf{H}] \quad (6)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{v}_j = \frac{1}{m} [\mathbf{p}_j - qA_j(\vec{\mathbf{x}})]. \quad (7)$$

Bemerkung: Beachten Sie, dass bei Anwesenheit von Magnetfeldern demnach der quantenmechanische Impuls nicht dem üblichen mechanischen Impuls entspricht sondern dem sog. „kanonischen Impuls“.

(b) Zeigen Sie nun, dass die Operatoren der Kraftkomponenten

$$\mathbf{F}_j = m\dot{\mathbf{v}}_j = \frac{m}{i\hbar} [\mathbf{v}_j, \mathbf{H}] = \frac{q}{2} [\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}) - \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}) \times \vec{\mathbf{v}}]_j \quad (8)$$

erfüllen.

Tip: Dabei sind die allgemeinen Kommutatorrelationen

$$[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0, \quad [f(\vec{\mathbf{x}}), \mathbf{p}_j] = i\hbar \partial_j f(\vec{\mathbf{x}}), \quad (9)$$

die man in der Ortsdarstellung der Operatoren

$$\hat{x}_j \psi(\vec{x}) = x_j \psi(\vec{x}), \quad \hat{p}_j \psi(\vec{x}) = -i\hbar \partial_j \psi(\vec{x}) \quad (10)$$

auch leicht herleiten kann (*Zusatzübung!*).

Bemerkung: Das entspricht der Lorentz-Kraft auf ein Teilchen im Magnetfeld. Die Rechnung ergibt dabei die korrekte Verallgemeinerung von $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{v})/2$ auf die nicht kommutierenden Operatoren $\vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}})$, indem diese „symmetrisierte Form“ des Kreuzprodukts selbstadjungierte Operatoren für die Operatoren der Kraftkomponenten liefert.