

## Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 11

### Aufgabe 1: Hintereinanderausführung von Lorentz-Transformationen

Wir betrachten im Folgenden drei Inertialsysteme  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  und  $\Sigma''$  im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie. Dabei möge sich  $\Sigma''$  gegenüber  $\Sigma'$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{u} = \beta_u c \vec{e}'_1$  und  $\Sigma'$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \beta_v c \vec{e}_1$  gegenüber  $\Sigma$  bewegen.

- (a) Geben Sie die Lorentz-Transformationsmatrizen  $\hat{\Lambda}_1$  und  $\hat{\Lambda}_2$  zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten

$$\underline{x}'' = \hat{\Lambda}_1 \underline{x}', \quad \underline{x}' = \hat{\Lambda}_2 \underline{x} \quad (1)$$

an.

**Hinweis:** Für das Folgende ist es bequem mit der Darstellung der Lorentz-Transformationsmatrizen mit Hyperbelfunktionen  $\cosh$  und  $\sinh$  mit den Rapiditäten  $\alpha_u$  und  $\alpha_v$  zu arbeiten.

- (b) Zeigen Sie, dass auch die Transformationsmatrix  $\hat{\Lambda}$ , die direkt von  $\underline{x}$  zu  $\underline{x}''$  führt,

$$\underline{x}'' = \hat{\Lambda} \underline{x} = \hat{\Lambda}_1 \underline{x}' = \hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2 \underline{x} \Rightarrow \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2, \quad (2)$$

wieder eine Lorentz-Transformation ist. Was ist die entsprechende Rapidität?

**Tipp:** Für die Hyperbelfunktionen gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cosh(\alpha_1) \cosh(\alpha_2) + \sinh(\alpha_1) \sinh(\alpha_2), \\ \sinh(\alpha_1 + \alpha_2) &= \sinh(\alpha_1) \cosh(\alpha_2) + \sinh(\alpha_2) \cosh(\alpha_1). \end{aligned} \quad (3)$$

- (c) Was ergibt sich daraus für die Relativgeschwindigkeit zwischen  $\Sigma$  und  $\Sigma''$ ?

### Aufgabe 2: Additionstheorem von Geschwindigkeiten

Seien  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  zwei Inertialsysteme, wobei sich  $\Sigma'$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \beta c(1, 0, 0)$  gegenüber  $\Sigma$  bewegt. In  $\Sigma'$  bewege sich ein Teilchen mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{u}' = (u_1, u_2, 0)$ . Mit welcher Geschwindigkeit bewegt es sich bzgl.  $\Sigma$ ?

Diskutieren Sie die Lösung sowohl im Rahmen der Newtonschen als auch der speziell-relativistischen Mechanik!