H. van Hees **Wintersemester 2021/2022**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 2

Aufgabe 1 (10 Punkte): Potentialtopf

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens auf der x-Achse in einem Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [0, a], \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Damit ist die Bewegung des Teilchens auf das Intervall $x \in [0, a]$ beschränkt, und die Wellenfunktionen müssen die Randbedingungen

$$\psi(a) = \psi(0) = 0 \tag{2}$$

erfüllen. Der Hamilton-Operator ist innerhalb des Topfes der eines freien Teilchens

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2. \tag{3}$$

Bemerkung: In den Übungen bezeichnen wir Operatoren mit einem „Dach“ über dem Symbol (also hier den Hamilton-Operator mit $\hat{H}$ statt mit $\mathbf{H}$), weil sich das beim Rechnen besser notieren lässt als fettgedruckte Symbole wie im Manuskript.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ auf dem Hilbert-Raum der über das Intervall $[0, a]$ quadratintegrablen Funktionen $\mathrm{L}^2([0, a])$ selbstadjungiert ist.

Hinweis: Sie müssen zeigen, dass für zwei beliebige Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 stets $\left\langle \psi_1 \middle| \hat{H}\psi_2 \right\rangle = \left\langle \hat{H}\psi_1 \middle| \psi_2 \right\rangle$ gilt, wobei das Skalarprodukt zwischen zwei Wellenfunktionen durch

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_0^a \mathrm{d}x \, \psi_1^*(x) \psi_2(x) \tag{4}$$

definiert ist.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Energie-Eigenzustände und die dazugehörigen Energie-Eigenwerte aus der entsprechenden Eigenwertgleichung

$$\hat{H} u_E(x) = E u_E(x). \tag{5}$$

(c) (3 Punkte) Normieren Sie die Energie-Eigenzustände so, dass

$$\int_0^a \mathrm{d}x \, |u_E(x)|^2 = 1 \tag{6}$$

ist.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass erwartungsgemäß die Energie-Eigenzustände zu verschiedenen Energieeigenwerten orthogonal sind, d.h.

$$\int_0^a \mathrm{d}x \, u_{E_1}^*(x) u_{E_2}(x) = 0 \quad \text{falls} \quad E_1 \neq E_2. \tag{7}$$

(e) (Zusatzaufgabe: 3 Extrapunkte) Zeigen Sie, dass für diese (etwas überidealisierte und daher unphysikalische!) Situation keine Impulsobservable definiert werden kann, weil der Impulsoperator $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$ nicht selbstadjungiert ist. Verwenden Sie dazu, dass die oben ausgerechneten Energie-Eigenzustände eine vollständige Basis auf dem Hilbert-Raum der über das Intervall $[0, a]$ quadratintegrablen Funktionen, die die Randbedingungen (2) erfüllen, bilden, und dass für alle u_E die Anwendung von $\hat{p}$ aus diesem Raum herausführt, d.h. $\hat{p}u_E(x)$ nicht mehr die Randbedingungen erfüllt.