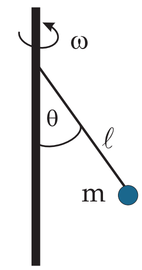
Theoretikum zur Vorlesung

Theoretische Physik I für Lehramtskandidaten

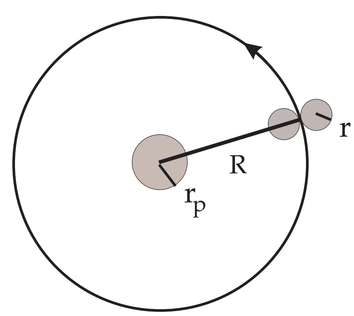
Blatt 14

Aufgabe 1 (Rotierendes Pendel)
Ein vertikaler Stab rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Längsachse. Am Stab ist eine masselose starre Stange der Länge ℓ so befestigt, dass sie mitrotieren muss, aber ihren Auslenkungswinkel θ verändern kann. Am Ende der Stange hängt eine Masse m. Betrachten Sie den stationären Fall, bei dem die Masse im mitrotierenden System in Ruhe ist.
Wie groß ist die Längsspannung in der Stange? Welchen Winkel θ zur Vertikalen nimmt der Stab ein? Gibt es mehrere Lösungen?



Aufgabe 2 (Senkrechter Wurf mit Corioliskraft)
An einem Ort der geographischen Breite ψ wird eine Kanonenkugel mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geschossen. Wo trifft die Kugel nach ihrem Flug wieder auf der Erdoberfläche auf? Vernachlässigen Sie bei der Rechnung die Luftreibung und die Zentrifugalkraft. Welcher Zahlenwert ergibt sich für $v_0 = 500$ km/h bei der geographischen Breite von Frankfurt?
Anleitung: 1. Aufstellen der Bewegungsgleichungen im rotierenden System (siehe Vorlesung). 2. Integration über die Zeit. 3. Iterative Lösung der Differentialgleichungen für die Geschwindigkeit mittels Störungsrechnung: Zunächst wird eine "ungestörte" Trajektorie $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ ohne Corioliskraft berechnet. Diese Lösung wird in der rechten Seite der Differentialgleichungen eingesetzt. Deren Integration liefert die "Näherung erster Ordnung" $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$.

Aufgabe 3 (Die Roche-Grenze)
Bewegt sich ein Trabant auf einer niedrigen Umlaufbahn um seinen Zentralkörper (z.B. ein Mond um einen Planeten), dann können die Gezeitenkräfte so groß werden, dass er zerrissen wird. Als stark vereinfachtes Modell dafür nehmen wir an, dass der Mond aus zwei gleichartigen Kugeln besteht, jeweils mit Masse m und Radius r, die wie abgebildet auf einer Kreisbahn vom Radius R um den Zentralkörper der Masse m_p umlaufen. Die beiden Kugeln seien durch ihre gegenseitige Gravitationskraft aneinander gebunden.



a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Kugeln voneinander lösen, wenn der Bahnradius R einen Minimalwert unterschreitet und berechnen sie diese „Roche-Grenze". Drücken Sie R_{Roche} durch das Verhältnis der Massendichten ρ_m und ρ_p von Mond und Planeten sowie den Planetenradius r_p aus.

b) Die Ringe des Saturn (Radius $r_p = 60\,000$ km) bestehen aus fein verteiltem Staub und haben Radien zwischen 70 000 km und 170 000 km. Ist das mit Ihrem Ergebnis aus a) verträglich?
c) Was sind die Konsequenzen für niedrig fliegende künstliche Satelliten auf Erdumlaufbahnen?

Zusatzaufgabe für Interessierte (Das Foucault-Pendel)
Ein Pendel der Länge ℓ schwingt in einem mit der Erde mitrotierenden Bezugssystem. Durch die Scheinkräfte wird sich die Schwingungsebene des Pendels langsam ändern. Betrachten Sie das System für kleine Auslenkungen.
a) Machen Sie sich klar, dass die dominanten Terme in der Bewegungsgleichung lauten:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{\ell}x + 2\omega \sin\psi\, \dot{y} \ , \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{\ell}y - 2\omega \sin\psi\, \dot{x} \ , \end{aligned}$$

wobei x und y die Auslenkungen in West-Ost- bzw. Süd-Nord-Richtung und ψ die geographische Breite bezeichnen.
b) Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem durch den Ansatz

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\Omega t)\cos(\alpha t) \ , \\ y(t) &= A\cos(\Omega t)\sin(\alpha t) \end{aligned}$$

gelöst wird und bestimmen Sie die Frequenzen Ω und α. Diskutieren Sie qualitativ die Bahnbewegung des Pendels.