Theoretikum zur Vorlesung

Theoretische Physik I für Lehramtskandidaten

Lösungen zu Blatt 13

Aufgabe 1
Zur Bestimmung der großen Halbachse a können wir das dritte Keplersche Gesetz verwenden und den Bahn des Kometen mit der Erdbahn in Beziehung setzen:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_E^3}{T_E^3} \qquad \text{oder} \qquad a = r_E \Big(\frac{T}{T_E}\Big)^{2/3} = 1 \text{ AE } 76^{2/3} = 17.94 \text{ AE} .$$

Die Exzentrizität hängt mit dem Minimalabstand (Perihel) über $r_P = a(1-\epsilon)$ zusammen, also

$$\epsilon = 1 - \frac{r_P}{a} = 1 - \frac{0.586 \text{ AE}}{17.94 \text{ AE}} = 0.967 .$$

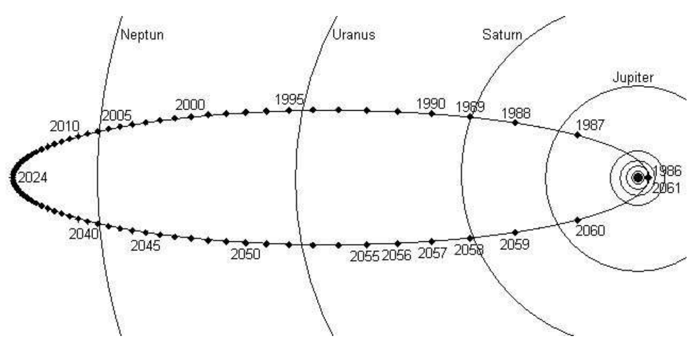
Für den Maximalabstand (Aphel) folgt dann

$$r_A = a(1+\epsilon) = 17.94 \text{ AE } (1 + 0.967) = 35.2 \text{ AE} .$$

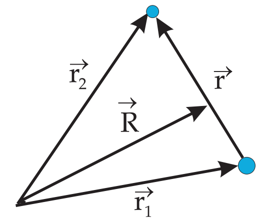
Die Geschwindigkeit in den Umkehrpunkten der Bahn wird durch den Drehimpuls bestimmt. Da dort $\dot{r} = 0$ ist folgt $v = v_\varphi = r\dot{\varphi}$. Die Drehimpulserhaltung besagt $L = mr^2\dot{\varphi} = mrv_\varphi = \text{const}$. Also hängen Perihel- und Aphelgeschwindigkeit über $r_P v_P = r_A v_A$ zusammen und für das Verhältnis der Geschwindigkeiten folgt

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = 59.6 .$$

Die Graphik zeigt die Bahn des Halleyschen Kometen im Sonnensystem und seine Positionen während seines gegenwärtigen Umlaufs um die Sonne.



Aufgabe 2



In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem zurückführen lässt, indem man die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \qquad \text{und} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

einführt. Die resultierenden Bewegungsgleichungen sind

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$$

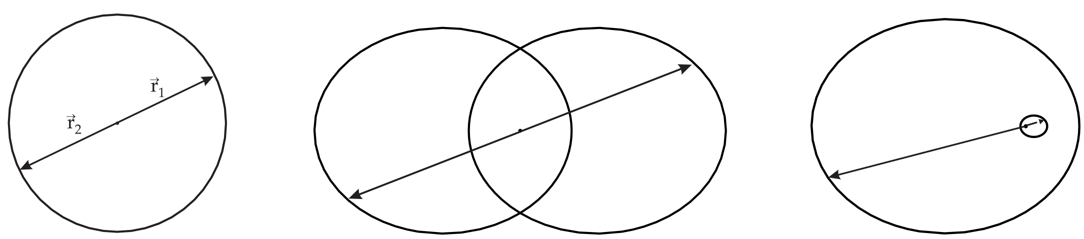
und

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{\text{int}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{oder} \qquad \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r \; .$$

Also bewegt sich der Schwerpunkt $\vec{R}(t)$ des Systems auf einer geradlinig unbeschleunigten Bahn $\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \vec{V}t$ und für die Relativbewegung $\vec{r}(t)$ lassen sich die Resultate des Einkörperproblems mit unbeweglichem Kraftzentrum übernehmen. Einziger Unterschied ist, dass in den Formeln anstelle der Zentralmasse die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ einzusetzen ist und für die Masse m des bewegten Körpers die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$. Die Bewegung der Einzelkörper errechnet sich dann aus der Überlagerung von Schwerpunkts- und Relativbewegung:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_2}{M}\vec{r}(t) \qquad \text{und} \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_1}{M}\vec{r} \; .$$

Im Schwerpunktssystem entfällt der erste Summand. Die gebundene Bewegung besteht dann also aus zwei ineinander geschachtelten Ellipsen- (oder Kreis-)bahnen mit einem gemeinsamen Brennpunkt, die um 180^0 gegeneinander gedreht sind (wegen der unterschiedlichen Vorzeichen in $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$). Nachstehend sind drei Beispiele dargestellt. Bei der Kreisbewegung mit gleichen Massen $m_1 = m_2$ fällt auf, dass sich beide Körper auf genau der gleichen Bahn bewegen, aber in diametral entgegengesetzten Positionen.



$m_1 = m_2$, $\epsilon = 0$ $\qquad$ $m_1 = m_2$, $\epsilon = 0.6$ $\qquad$ $m_1 = 10m_2$, $\epsilon = 0.6$

Im Erde-Mond-System führt die Bewegung des Monds dazu, dass die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne "eiert". Ihre (hier wegen $\epsilon = 0.055$ als annähernd kreisförmig angenommene) Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt Erde-Mond hat einen Radius von $r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,r_0 = 0.0122\,r_0 = 4700$ km, etwas weniger als der Erdradius von $r_E = 6370$ km.

Aufgabe 3
Betrachten wir zunächst die ursprüngliche Mondbahn, die genähert als Kreis mit $a = b = r_0$ beschrieben werden kann. Die Bewegung der Erde soll vernachlässigt werden. Mit den allgemeinen Formeln für die Halbachsen der Kepler-Ellipsen

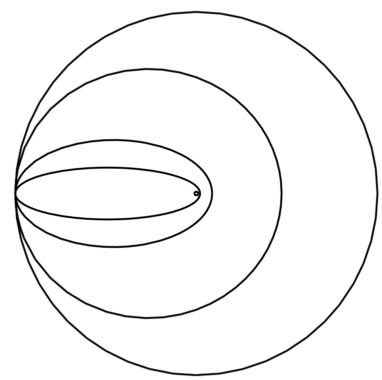
$$a = \frac{GmM}{-2E} \qquad \text{und} \qquad b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$$

folgt für Energie und Drehimpuls

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r_0} \qquad \text{und} \qquad L = \sqrt{Gm^2Mr_0} \; .$$

Aus $L = mr^2\dot{\varphi} = mrv$ folgt für die (rein tangentiale) Bahngeschwindigkeit $v = \frac{L}{mr_0} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$.

Nach der Abbremsung (die natürlich nur als Gedankenexperiment möglich ist) hat der Mond immer noch den gleichen Abstand r_0 zur Erde aber seine Geschwindigkeit hat sich auf $v' = fv$ verringert. Die Zentrifugalkraft reicht jetzt nicht mehr aus, um den Mond auf einer Kreisbahn zu halten und es setzt eine negative radiale Beschleunigung zum Zentrum ein. Natürlich gilt das erste Keplersche Gesetz weiterhin, d.h. der Mond bewegt sich nun auf einer Ellipsenbahn mit neuen Halbachsen a' und b'. Da zunächst noch $\dot{r} = 0$ gilt, befindet sich der Mond am äußeren Umkehrpunkt (Apogäum) der Ellipse.


Die Bahnen für $f = 1, 0.8, 0.4, 0.2$.

Dies neuen Bahnparameter lassen sich aus der geänderten Geschwindigkeit berechnen. Für den Drehimpuls ergibt sich

$$L' = mr_0v' = fL$$

und für die Energie

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GmM}{r_0} = (\frac{1}{2}f^2 - 1)\frac{GmM}{r_0} = (\frac{1}{2}f^2 - 1)(-2E) = (2 - f^2)E \; .$$

Damit lauten die Halbachsen der Ellipse

$$\begin{aligned} a' &= \frac{GmM}{-2E'} = \frac{1}{2-f^2}r_0 \; , \\ b' &= \frac{L'}{\sqrt{-2mE'}} = \frac{fL}{\sqrt{-2m(2-f^2)E}} = \frac{f}{\sqrt{2-f^2}}b = \frac{f}{\sqrt{2-f^2}}r_0 \; , \end{aligned}$$

und die Exzentrizität

$$\epsilon' = \sqrt{1 - \frac{b'^2}{a'^2}} = \sqrt{1 - \frac{f^2(2-f^2)^2}{2-f^2}} = \sqrt{1 - 2f^2 + f^4} = 1 - f^2 \; .$$

Für den fernsten und nächsten Bahnabstand (Apogäum und Perigäum) folgt also

$$\begin{aligned} r_{\max} &= a' + e' = a'(1+\epsilon') = \frac{r_0}{2-f^2}(1+(1-f^2)) = r_0 \;, \\ r_{\min} &= a' - e' = a'(1-\epsilon') = \frac{r_0}{2-f^2}(1-(1-f^2)) = r_0 \frac{f^2}{2-f^2} \;. \end{aligned}$$

Das Kriterium für eine Kollision mit der Erde lautet $r_{\min} < R_E + R_M$. Mit der Abkürzung $\beta = \dfrac{R_E + R_M}{r_0}$ heisst dies $\dfrac{f^2}{2-f^2} < \beta$ oder

$$f < \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} \;.$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich $\beta = 0.021$ und damit $f < 0.2028$.
Die Zeit bis zur Kollision lässt sich bequem mittels des dritten Keplerschen Gesetzes berechnen. Für die gesamte Umlaufszeit auf der Ellipsenbahn gilt (siehe Blatt 12 Aufgabe 1)

$$T' = \sqrt{\frac{4\pi^2 a'^3}{GM}} = \frac{1}{(2-f^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{GM}} = \frac{T}{(2-f^2)^{3/2}} \;.$$

Die Zeit bis zur Kollision ist $T_k = \frac{1}{2} T'$. Für den Fall vollständiger Abbremsung $f = 0$ bedeutet dies

$$T_k = \frac{1}{4\sqrt{2}} T' = 4.8 \text{ d} \;.$$

Das exakte Resultat wird geringfügig kleiner sein, da in der letzten Rechnung die endlichen Radien nicht berücksichtigt wurden.

Ergänzung: Das gleiche Resultat für die Kollisionszeit lässt sich auch „zu Fuß“ durch Integration der radialen Bewegungsgleichung herleiten. Aus der Energiegleichung (für $L = 0$)

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GmM}{r}$$

mit dem Wert $E = -\frac{GmM}{r_0}$ folgt

$$\dot{r} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \;.$$

Dies lässt sich nach Variablentrennung aufintegrieren

$$\int_0^{T_k} dt = -\int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}} \int_0^{r_0} dr \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} \;.$$

Dieses Integral lässt sich mit mit der Formel

$$\int dx \sqrt{\frac{x}{c-x}} = -\sqrt{x(c-x)} - \frac{c}{2} \arcsin \frac{c-2x}{c}$$

geschlossen lösen:

$$\begin{aligned}
T_k &= -\sqrt{\frac{r_0}{2GM}}\left(\sqrt{r(r_0-r)}+\frac{r_0}{2}\arcsin\frac{r_0-2r}{r_0}\right)\Big|_0^{r_0} \\
&= -\sqrt{\frac{r_0}{2GM}}\frac{r_0}{2}(\arcsin(-1)-\arcsin(1)) = -\sqrt{\frac{r_0}{2GM}}\frac{r_0}{2}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{2GM}}
\end{aligned}$$

was mit dem früheren Resultat übereinstimmt.

Aufgabe 4

In Aufgabe 3 von Blatt 12 wurde gezeigt, dass die Gravitationswirkung einer *kugelsymmetischen* Massenverteilung sich so verhält, als sei die gesamte Masse im Zentrum konzentriert, d.h. die Gravitationskraft auf einen Probekörper der Masse m lautet

$$\vec{F}(r) = -\frac{GmM(r)}{r^2}\vec{e}_r$$

wobei $M(r)$ die in einer Kugel mit dem Radius r eingeschlossene Masse ist. Die Gravitationswirkung der außerhalb liegenden Masse kompensiert sich hingegen vollständig und trägt nicht zu $\vec{F}$ bei. Damit lässt sich die Rotationskurve ganz einfach ausrechnen. Für Kreisbewegung führt die Gleichgewichtsbedingung von Zentrifugalkraft und Gravitationskraft $\vec{F}_Z + \vec{F}_G = 0$ auf

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM(r)}{r^2} \qquad \text{also} \qquad v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}\ .$$

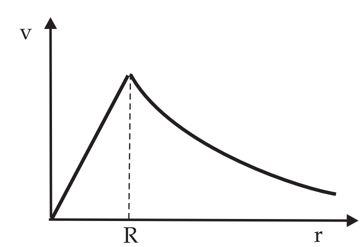
Bei Planetensystemen (nahezu die gesamte Masse ist im Zentrum konzentriert) hat die Rotationskurve also den Verlauf $v \propto 1/\sqrt{r}$; die äusseren Planeten laufen langsamer als die inneren.

Betrachten wir den Fall einer ausgedehnten homogenen Massenverteilung mit scharfem Rand, $\rho(r) = \rho_0$ für $r \leq R$ und $\rho(r) = 0$ für $r > R$. Die in einer Kugel vom Radius r eingeschlossene Masse ist

$$M(r) = \int_{\text{Kugel}} dV'\rho(r') = 4\pi\int_0^r dr'\, r'^2\rho(r') = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 & r \leq R \\ \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3 & r > R \end{cases}$$

Also ergibt sich für die Umlaufgeschwindigkeit

$$v(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4\pi}{3}G\rho_0}\ r & r \leq R \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}G\rho_0 R^3}\,\frac{1}{\sqrt{r}} & r > R \end{cases}$$



Das beobachtete Abflachen der Rotationskurve zu einem konstanten Wert $v \to v_c$ kann so nicht erklärt werden. Offenbar muss auch im Bereich außerhalb der Galaxien, wo kaum noch Materie zu sehen ist, gravitierende Masse vorhanden sein, und zwar

$$M(r) = \frac{v_c^2 r}{G}\ .$$

Die zugehörige Massendichte folgt durch Differentiation der Funktion $M(r)$:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{v_c^2}{G} \qquad \text{also} \qquad \rho(r) = \frac{v_c^2}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \; .$$

Demnach scheinen die Galaxien von riesigen Wolken ("Halos") aus unsichtbarer *Dunkler Materie* durchdrungen und umgeben zu sein. Die Mehrheit der Astrophysiker ist wegen dieser und verschiedener anderer Beobachtungen der Ansicht, dass die Masse des Universums nur zu etwa 4 Prozent aus "normaler Materie" besteht! Die Natur der Dunklen Materie ist aber noch völlig ungekärt.