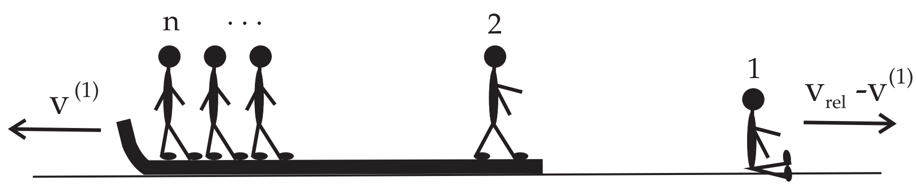
Theoretikum zur Vorlesung
Theoretische Physik I für Lehramtskandidaten

Lösungen zu Blatt 9

Aufgabe 1



Es handelt sich um eine „diskretisierte“ Version des Problems der Raketenbewegung. Grundlage für die Beschreibung ist die Gleichung für die Impulserhaltung. Die anfängliche Gesamtmasse (Schlitten plus Menschen) ist $M = M_0 + nm$.

a) Sequentieller Absprung
1. Schritt
Wir betrachten das Bezugssystem („Laborsystem“), in dem der Schlitten anfänglich ruht. Einer der Passagiere beginnt loszulaufen und überträgt dadurch einen Rückstoßimpuls auf den Schlitten. Beim Absprung und danach hat der Schlitten die Geschwindigkeit $v^{(1)}$. Die Impulsbilanz lautet dann:

$$(M-m)v^{(1)} = m(v_{\rm rel} - v^{(1)}) \quad \longrightarrow \quad v^{(1)} = \frac{m}{M} v_{\rm rel} \ .$$

Beachte, dass auf der rechten Seite $v - v^{(1)}$ steht: Beim Absprung ist der Schlitten schon in Bewegung geraten, so dass der Springer im Laborsystem nicht die volle Geschwindigkeit $v_{\rm rel}$ erreicht.

2. Schritt
Wir benutzen nun ein neues inertiales Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit $v^{(1)}$ mit dem Schlitten mitbewegt. In diesem Bezugssystem liegt die gleiche Situation vor wie im ersten Schritt. Einziger Unterschied ist die um m verringerte Masse des beladenen Schlittens. Dementsprechend erhält der Schlitten nach dem zweiten Absprung eine erneute Rückstoßgeschwindigkeit $v^{(2)}$ gemäß

$$(M-2m)v^{(2)} = m(v_{\rm rel} - v^{(2)}) \quad \longrightarrow \quad v^{(2)} = \frac{m}{M-m} v_{\rm rel} \ .$$

n. Schritt
Dieses Verfahren lässt sich ganz analog fortsetzen. Der Absprung des $n$ten Passagiers wird

dann in einem Bezugssystem beschrieben, in dem der Schlitten bereits die Geschwindigkeit $v^{(1)} + v^{(2)} + \ldots + v^{(n-1)}$ hat. Die zusätzliche Rückstoßgeschwindigkeit in diesem Bezugssystem lautet wieder

$$(M - nm)v^{(n)} = m(v_{\rm rel} - v^{(n)}) \quad \longrightarrow \quad v^{(n)} = \frac{m}{M-(n-1)m}\, v_{\rm rel} \; .$$

Da sich die Einzelgeschwindigkeiten addieren (Galilei-Transformationen) erreicht der Schlitten *im Laborsystem* die Endgeschwindigkeit

$$v_{\rm Lab}^{(n)} = v^{(1)} + v^{(2)} + \ldots + v^{(n)} = \left(\frac{m}{M} + \frac{m}{M-m} + \ldots + \frac{m}{M-(n-1)m}\right) v_{\rm rel} \; .$$

b) Gemeinsamer Absprung
Die Geschwindigkeit $\tilde{v}^{(1)}$, die der Schlitten bei gleichzeitigem Absprung aller Personen erreicht, ergibt sich, indem man beim in der Formel aus dem 1. Schritt in a) die Einzelmasse m durch die Gesamtmasse der Passagiere nm ersetzt:

$$(M - nm)\tilde{v}^{(1)} = nm(v_{\rm rel} - \tilde{v}^{(1)}) \quad \longrightarrow \quad \tilde{v}^{(1)} = \frac{nm}{M}\, v_{\rm rel} \; .$$

Nun gilt offensichtlich für jeden (außer dem ersten) der Summanden im Ausdruck für $v_{\rm Lab}^{(n)}$: $\frac{m}{M-km} > \frac{m}{M}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Daraus folgt $v_{\rm Lab}^{(n)} > \tilde{v}^{(1)}$. Der Schlitten bewegt sich schneller, wenn die Personen nacheinander einzeln abspringen! Die Geschwindigkeit des Schlittens kann im Fall b) den Wert $v_{\rm rel}$ nicht überschreiten, im Fall a) sind (bei kleiner Masse M_0) auch höhere Endgeschwindigkeiten möglich.

Ergänzung: Der Antrieb des Schlittens durch Rückstoß ähnelt offenbar dem Raketenbewegung, wobei die Passagiere die Rolle des Raketentreibstoffs spielen. Ein formaler mathematischer Zusammenhang wird ersichtlich im „Kontinuumslimes“, d.h. für $n \to \infty$ und $m \to 0$ mit konstantem Produkt $nm = M - M_0$. Unter Benutzung der interessanten (und nicht offensichtlichen) mathematische Formel

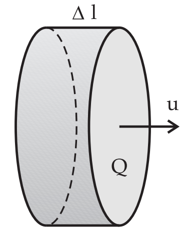
$$\lim_{n\to\infty} \frac{z}{n}\left(1 + \frac{1}{1-\frac{1}{n}z} + \frac{1}{1-\frac{2}{n}z} + \ldots + \frac{1}{1-\frac{n-1}{n}z}\right) = \ln\frac{1}{1-z}$$

mit der Identifikation $z = \frac{nm}{M} = 1 - \frac{M_0}{M}$ ergibt sich für die Endgeschwindigkeit das von der Raketenbewegung bekannte Resultat

$$v_{\rm Lab} = v_{\rm rel} \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) \; .$$

Aufgabe 2

a) Wir zerlegen den Strahl in Scheiben der Dicke Δl mit der Querschnittsfläche Q und einer Masse $\Delta m = \rho Q \Delta l$. Wenn eine Scheibe auf die unbewegliche Wand prallt, wirkt in einem Zeitintervall Δt eine Reaktionskraft F_R, die die Abbremsung des Impulses von $\Delta m\, u$ auf Null bewirkt:



$$F_R = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \Delta p = \Delta m(0 - u) = -\Delta m\, u \; .$$

Die Zeit für die Abbremsung ist $\Delta t = \frac{\Delta l}{u}$. Wegen des dritten Newtonschen Gesetzes wirkt auf die Wand die Rückstoßkraft

$$F = -F_R = \frac{\Delta m\, u}{\Delta l/u} = \frac{\Delta m}{\Delta l} u^2 = \rho Q u^2 \ .$$

Die Kraft steigt quadratisch mit der Geschwindigkeit, denn mit u wächst sowohl der Impulsübertrag als auch die auftreffende Wassermenge pro Zeiteinheit.
b)

$$F = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\,20\,\mathrm{cm}^2\left(30\cdot 10^2\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 20\,(3\cdot 10^3)^2\frac{\mathrm{g\,cm}}{\mathrm{s}^2} = 1.8\cdot 10^8\mathrm{dyn} = 1800\,N \ .$$

Dies erklärt die Wirksamkeit von Wasserwerfern.
c) Wenn sich die Wand mit Geschwindigkeit v in Strahlrichtung bewegt, reduziert sich der Impulsübertrags auf $\Delta p = \Delta m(v-u)$. Gleichzeitig dauert es länger, bis die Wasserscheibe vollständig aufgetroffen ist: $\Delta t = \frac{\Delta l}{u-v}$. Daher lautet die Abbremskraft nunmehr

$$F = \rho Q(u-v)^2 \ .$$

Das Ergebnis ist plausibel, da der Strahl im mitbewegten System des Wagens die reduzierte Geschwindigkeit $u-v$ hat.
d) Die Bewegungsgleichung für den Wagen lautet

$$M\frac{dv}{dt} = F = \rho Q\big(u-v\big)^2 \ .$$

Trennung der Variablen und Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^v \frac{dv'}{(u-v')^2} &= \frac{\rho Q}{M}\int_0^t dt' \\
\frac{1}{u-v'}\Big|_0^v &= \frac{\rho Q}{M}t \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{u-v} - \frac{1}{u} = \frac{\rho Q}{M}t
\end{aligned}$$

Dies führt auf

$$u - u + v = \frac{\rho Q}{M}tu(u-v) \quad\longrightarrow\quad v = u\,\frac{\frac{\rho Q}{M}ut}{1+\frac{\rho Q}{M}ut} \ .$$

Die Geschwindigkeit wächst monoton an bis zum asymptotischen Wert $v \to u$.

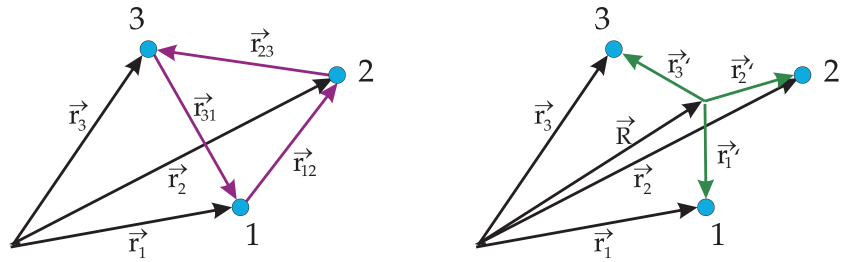
Aufgabe 3
Zu beweisen ist

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_s^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{1}{M}(m_1m_2\vec{v}_{12}^{\,2} + m_2m_3\vec{v}_{23}^{\,2} + m_3m_1\vec{v}_{31}^{\,2})$$

mit $\vec{v}_s = \frac{1}{M}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3)$ und $\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, $\vec{v}_{23} = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$, $\vec{v}_{31} = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$. Einsetzen in die behauptete Gleichung und Ausquadrieren liefert

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M\frac{1}{M^2}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{M}\left[m_1m_2(\vec{v}_2-\vec{v}_1)^2 + m_2m_3(\vec{v}_3-\vec{v}_2)^2 + m_3m_1(\vec{v}_1-\vec{v}_3)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{M}\Big[m_1^2\vec{v}_1^{\,2} + m_2^2\vec{v}_2^{\,2} + m_3^2\vec{v}_3^{\,2} + 2m_1m_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + 2m_1m_3\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 + 2m_2m_3\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 \\
&\quad + m_1m_2(\vec{v}_2^{\,2} - 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \vec{v}_1^{\,2}) + m_2m_3(\vec{v}_3^{\,2} - 2\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 + \vec{v}_2^{\,2}) + m_1m_3(\vec{v}_1^{\,2} - 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 + \vec{v}_3^{\,2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{M}\Big[\vec{v}_1^{\,2}(m_1^2 + m_1m_2 + m_1m_3) + \vec{v}_2^{\,2}(m_2^2 + m_1m_2 + m_2m_3) + \vec{v}_3^{\,2}(m_3^2 + m_2m_3 + m_1m_3)\Big] \\
&= \frac{1}{2}(m_1\vec{v}_1^{\,2} + m_2\vec{v}_2^{\,2} + m_3\vec{v}_3^{\,2})\ .
\end{aligned}$$

Die drei Relativkoordinaten sind nicht unabhängig, denn ihre Vektoren bilden ein geschlossenes Dreieck. Dies äussert sich darin, das für ihre Summe gilt $\vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} + \vec{r}_{31} = 0$. Eine entsprechende Beziehung gilt auch für die Relativgeschwindigkeit.



Anstelle der Relativkoordinaten $\vec{r}_{ij}$ kann man auch die Teilchenkoordinaten im Schwerpunktssystem $\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i - \vec{R}$ verwenden. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in diesem Fall die Zerlegung der kinetischen Energie folgende Form annimmt:

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_s^{\,2} + \frac{1}{2}(m_1\vec{v}_1^{\,\prime 2} + m_2\vec{v}_2^{\,\prime 2} + m_3\vec{v}_3^{\,\prime 2})\ .$$

Auch in diesem Fall sind die Koordinaten voneinander abhängig, denn es gilt $m_1\vec{r}_1\,' + m_2\vec{r}_2\,' + m_3\vec{r}_3\,' = 0$. Die beiden Formeln für T unterscheiden sich dadurch, dass im einen Fall die normalen Massen m_i, im anderen Fall „reduzierte Massen“ der Form $\mu_{ij} = \frac{m_im_j}{M}$ auftreten.