

Kapitel 21 bis 25 aus

Walter Greiner

Theoretische Physik 2: Mechanik 2

Verlag Harri Deutsch, 6. Aufl, 1998

(mit Korrekturen)

VII Nichtlineare Dynamik

Die Behandlung der Mechanik in diesen Vorlesungen wäre nicht komplett, wenn wir nicht wenigstens kurz auch auf ein Themengebiet eingehen, das sich gerade in jüngerer Zeit großer Aufmerksamkeit erfreut, nämlich die Nichtlineare Dynamik und darin als Spezialgebiet die „Chaostheorie“.

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß geordnete und regelmäßige Bewegungen, wie sie etwa beim harmonischen Oszillator, dem Pendel oder dem Keplerproblem der Planetenbewegung auftreten, in der Natur eher die Ausnahme als die Regel sind. Erratischen und häufig bei aller Anstrengung im Detail nicht vorhersehbaren Phänomenen begegnet man häufig (ein besonders markantes Beispiel ist das Auftreten von Turbulenz bei Flüssigkeitsströmungen).

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat der „Vater der nichtlinearen Dynamik“ Henri Poincaré * erstmals darauf hingewiesen, daß irreguläres Verhalten in der Mechanik durchaus nichts Ungewöhnliches ist, sobald das untersuchte System eine *nichtlineare Wechselwirkung* aufweist. Damit verbunden ist die zunächst verblüffenden Erkenntnis, daß auch sehr einfache Systeme eine höchst komplexe Dynamik aufweisen können. Eine simple deterministische Differentialgleichung mit Nichtlinearitäten kann Lösungen besitzen, deren Verhalten sich über längere Zeiträume hinweg ganz unregelmäßig entwickelt und praktisch nicht vorhersagen läßt. Dies ist eine der charakteristischen Eigenschaften *chaotischer* Systeme. Die Bedeutung dieses Begriffs, der im Rahmen der nichtlinearen Dynamik präzise definiert werden kann, weist weit über die Mechanik hinaus, da Chaos in vielen Bereichen nicht nur

*Jules-Henri *Poincaré*, französischer Mathematiker und Physiker, geb. 29.4.1854 in Nancy, gest. 17.7.1912 in Paris. P. studierte an der École Polytechnique und der École des Mines und war Schüler von Ch. Hermite. Bald nach der Promotion erhielt er 1881 einen Lehrstuhl an der Sorbonne, den er bis zu seinem Lebensende einnahm. In der reinen Mathematik machte er sich einen Namen u.a. als Begründer der algebraischen Topologie und der Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Variablen. Weitere wesentliche Arbeitsgebiete waren die algebraische Geometrie und die Zahlentheorie. P. befaßte sich aber auch mit Anwendungen der Mathematik auf zahlreiche physikalische Fragestellungen, etwa in der Optik, Elektrodynamik, Telegrafie, Thermodynamik. Mit Einstein und Lorentz war er einer der Begründer der Speziellen Relativitätstheorie. P.'s Arbeiten zur Himmelsmechanik, insbesondere zum Dreikörperproblem, mündeten in einer dreibändigen Monographie (1892-99). Hierbei entdeckte er als erster das Auftreten chaotischer Bahnen bei der Planetenbewegung. Wegen seiner ungewöhnlich breit gefaßten Interessen wurde P. als der letzte Universalist in der Mathematik bezeichnet.

der Physik sondern auch der Chemie, Biologie etc. auftritt.

In den folgenden Abschnitten werden wir einiges über allgemeine Eigenschaften nichtlinearer dynamischer Systeme lernen. Die Zeitabhängigkeit und Stabilität ihrer Lösungen wird diskutiert, und Begriffe wie Attraktoren, Bifurkationen und Chaos werden eingeführt. Eine ins Einzelne gehende Behandlung der nichtlinearen Dynamik, ihrer vielfältigen Fragestellungen und interdisziplinären Anwendungen überschreitet aber den hier gesteckten Rahmen.* Insbesondere werden wir auch nicht näher auf das wichtigen Thema des Chaos in Hamiltonschen Systemen eingehen können.

21 Dynamische Systeme

Für viele der hier interessierenden Systeme läßt sich eine einheitliche theoretische Beschreibung geben. Ein System wird durch einen Satz von endlich vielen dynamischen Variablen beschrieben, die wir in einem Spaltenvektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$ zusammenfassen. Zu einem gegebenen Zeitpunkt t wird der Zustand des Systems eindeutig durch einen solchen Punkt \vec{x} im Phasenraum beschrieben. Die x_i sind generalisierte Koordinaten hinter denen sich die verschiedensten Größen verbergen können. Wichtig ist, daß der Vektor \vec{x} auch die Geschwindigkeiten (bzw. die Impulse) umfassen soll. Wir nehmen nun an, daß sich das System *deterministisch* verhält. Die gesamte Zeitentwicklung $\vec{x}(t)$ ist also bestimmt, wenn ein Anfangswert $\vec{x}(t_0)$ vorgegeben wird. Die zeitliche Entwicklung soll durch eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit beschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t; \lambda) . \quad (1)$$

Hier ist \vec{F} eine im allgemeinen *nichtlineare* Funktion der Koordinaten \vec{x} (auch als Geschwindigkeitsfeld oder *Vektorfeld* bezeichnet). Darüber hinaus kann \vec{F} auch noch explizit von der Zeit t abhängen, etwa wenn von außen veränderliche Kräfte auf das System einwirken. Besteht keine solche Abhängigkeit, dann spricht man von einem *autonomen* System. Schließlich soll das dritte Argument in (1) andeuten, daß möglicherweise ein oder mehrere *Kontrollparameter* λ existieren. Es handelt sich dabei um fest vorgegebene Konstanten deren Werte die Dynamik des Systems

*Einige Lehrbücher aus der sehr umfangreichen Literatur zur nichtlinearen Dynamik:

H. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH Verlag (1989)

J. Argyris, G. Faust, M. Haase, *Die Erforschung des Chaos*, Vieweg (1995)

H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: *Chaos and Fractals – New Frontiers of Science*, Springer (1992)

R.C. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics*, Oxford University Press, 1994

G. Jetschke, *Mathematik der Selbstorganisation*, Deutscher Verlag der Wiss., Berlin (1989)

beeinflussen und diese unter Umständen in ihrem Charakter verändern können. Typische Kontrollparameter sind zum Beispiel die Kopplungsstärke einer Wechselwirkung oder die Amplitude oder Frequenz einer dem System aufgeprägten äußeren Störung.

Anmerkung: Mit einem kleinen Trick läßt sich eine mögliche explizite Zeitabhängigkeit in (1) eliminieren. Dazu betrachtet man ein System mit einem Freiheitsgrad mehr,

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+1},$$

und postuliert für die hinzugekommene Vektorkomponente die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} x_{N+1} = 1.$$

Mit der Anfangsbedingung $\tilde{x}_{N+1}(0) = 0$ heißt dies einfach $x_{N+1}(t) = t$. Die Zeit auf der rechten Seite von t kann also durch x_{N+1} ersetzt werden und wir haben ein *autonomes* System mit einer Dimension mehr vorliegen.

Die Bewegungsgleichung (1) ist trotz ihrer scheinbar einfachen Gestalt sehr umfassend. Insbesondere ist darin die *Hamiltonsche Mechanik* als Spezialfall enthalten: Für ein System mit N Freiheitsgraden, beschrieben durch die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_N und die zugehörigen kanonischen Impulse p_1, \dots, p_N , lauten die Hamilton-Bewegungsgleichungen (siehe Kapitel 18)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2)$$

Fassen wir Koordinaten und Impulse gemäß $\vec{x} = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)^T$ zu einem $2N$ -dimensionalen Vektor zusammen, dann läßt sich (2) als eine kombinierte Matrixgleichung der Form (1) schreiben:

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = \mathbf{J} \vec{\nabla}_{\vec{x}} H. \quad (3)$$

Dabei steht $\vec{\nabla}_{\vec{x}} H$ für den Gradientenvektor der Hamiltonfunktion:

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} H = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_N}; \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_N} \right)^T \quad (4)$$

und die $2N \times 2N$ -Matrix \mathbf{J} sorgt für die Vertauschung der Komponenten sowie für die richtigen Vorzeichen:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & +\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

wobei \mathbf{I} die $N \times N$ Einheitsmatrix bezeichnet. Nebenbei bemerkt hat \mathbf{J} folgende nützliche Eigenschaften:

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \quad (6)$$

Darüber hinaus lassen sich auch *dissipative Systeme* durch die Gleichung (1) beschreiben indem man geschwindigkeitsabhängige Reibungsterme einführt, siehe etwa Beispiel 21.2.

Es ist klar, daß die Lösungen von (1) äußerst vielgestaltig sein können. Für einen vorgegebenen Startvektor $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0$ läßt sich eine Bahnkurve, auch *Trajektorie* oder *Orbit* genannt, $\vec{x}(t)$ berechnen (was in nichtlinearen Systemen natürlich in der Regel nicht analytisch möglich ist) deren mathematische Existenz und Eindeutigkeit unter sehr allgemeinen Bedingungen durch die Theorie der Differentialgleichungen sichergestellt wird. Besonders interessant ist das asymptotische Verhalten der Trajektorie für große Zeiten: Erreicht sie einen stationären Zustand (einen *Fixpunkt*) oder eine periodische Schwingung (einen *Grenzzzyklus*) oder verhält sie sich irregulär?

Der Zusammenhang zwischen $\vec{x}(t)$ und \vec{x}_0 stellt mathematisch betrachtet eine Abbildung $\Phi_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ dar, nämlich

$$\Phi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t) . \quad (7)$$

Diese Abbildung, die von der Zeit t als Parameter abhängt, wird als *Phasenfluß* oder einfach *Fluß* des Vektorfelds $\vec{F}(\vec{x})$ bezeichnet. Der Fluß reduziert sich für $t = 0$ offensichtlich auf die identische Abbildung

$$\Phi_{t=0} = \mathbb{I} . \quad (8)$$

Für autonome (nicht explizit zeitabhängige) Systeme gilt außerdem bei Hintereinanderschaltung zweier zeitlicher Verschiebungen

$$\Phi_{t_1} \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2} . \quad (9)$$

Um das dynamische System gründlich zu verstehen genügt es nicht, sich einzelne Trajektorien anzuschauen. Von Interesse ist vielmehr auch das Verhalten der Gesamtheit aller Bahnen im Phasenraum. Dies läßt sich auch als Frage nach den globalen Eigenschaften der Abbildung Φ_t interpretieren. Wichtige Fragestellungen sind hier: Läßt sich der Fluß „im Großen“ allgemeingültig charakterisieren? Gibt es Bereiche mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten (geordnete vs. ungeordnete Bewegung)? Wie verändert sich der Fluß mit dem Wert eines etwa vorhandenen Kontrollparameters λ (gibt es etwa kritische Schwellenwerte wo neuartiges Verhalten auftritt?).

Die Antwort auf diese Fragen hängt natürlich vom jeweils betrachteten System ab. Dennoch lassen sich im Rahmen der nichtlinearen Dynamik allgemeine Kriterien finden und es zeigt sich, daß scheinbar sehr unterschiedliche Systeme verblüffende Ähnlichkeiten in ihrer Dynamik aufweisen.

21.1 Dissipative Systeme: Kontraktion des Phasenraumvolumens

Konservative Systeme sind dadurch gekennzeichnet, daß der dynamische Fluß *volumenerhaltend* ist. Der in Kapitel 18 bewiesene *Satz von Liouville* besagte ja, daß sich das Volumen einer Zelle im $2N$ -dimensionalen Phasenraum $(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$ zeitlich nicht ändert, wenn sich die darin befindlichen Punkte gemäß den Hamiltonschen Gleichungen bewegen. In *dissipativen Systemen* hingegen schrumpfen die Zellen im Phasenraum mit der Zeit zusammen. Wir werden jetzt ein quantitatives Maß dafür ableiten, und zwar für ein allgemeines autonomes dynamisches System, dessen Trajektorien der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)) \quad (10)$$

in einem N -dimensionalen Phasenraum genügen. Dazu betrachten wir ein kleines Volumenelement $\Delta V(\vec{x})$, das sich zur Zeit $t = t_0$ an der Stelle $\vec{x} = \vec{x}_0$ befinden und sich mit dem Fluß mitbewegen soll. Das Volumen ist, in cartesischen Koordinaten, gerade durch das Produkt der Seitenlängen gegeben

$$\Delta V(\vec{x}) = \prod_{i=1}^N \Delta x_i(\vec{x}) . \quad (11)$$

Für die Zeitableitung dieser Größe gilt gemäß der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^N \frac{d\Delta x_i(\vec{x})}{dt} \prod_{j \neq i}^N \Delta x_j(\vec{x}) \\ &= \underbrace{\prod_{j=1}^N \Delta x_j(\vec{x})}_{=\Delta V(\vec{x})} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta x_i(\vec{x})} \frac{d\Delta x_i(\vec{x})}{dt} , \end{aligned} \quad (12)$$

wobei mit $\Delta x_i/\Delta x_i$ erweitert wurde. Die relative Veränderung (= logarithmische Zeitableitung) des Volumens ist also

$$\frac{1}{\Delta V(\vec{x})} \frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta x_i(\vec{x})} \frac{d\Delta x_i(\vec{x})}{dt} . \quad (13)$$

Die Änderung der Seitenlängen des Volumens[†] läßt sich aus der Bewegungsgleichung (10) berechnen. Betrachten wir den Abstand von zwei Ecken des Würfels

[†]Genau genommen verzerrt sich auch die Form von ΔV und die Seiten bleiben nicht orthogonal aufeinander. Dies macht sich aber bei der Berechnung des Volumens in niedrigster Ordnung nicht bemerkbar.

in i -Richtung, die durch die Trajektorien $\vec{x}_0(t)$ mit $\vec{x}_0(t_0) = \vec{x}_0$ sowie $\vec{x}(t)$ mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 + \vec{e}_i \Delta x_i$ bestimmt sind

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Delta x_i}{dt} \right|_{t_0} &= \left. \frac{d}{dt} (x_i(t) - x_{0i}(t)) \right|_{t_0} \\ &= F_i(\vec{x}(t_0)) - F_i(\vec{x}_0(t_0)) \\ &= F_i(\vec{x}_0 + \vec{e}_i \Delta x_i) - F_i(\vec{x}_0) . \end{aligned} \quad (14)$$

Für kleine Abweichungen Δx_i liefert die Taylorentwicklung von $\vec{F}(\vec{x})$ in erster Ordnung

$$\left. \frac{d\Delta x_i}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}_0} \Delta x_i . \quad (15)$$

An der Stelle $t_0 = t$, $\vec{x}_0 = \vec{x}$ liefert (13) demnach

$$\Lambda(\vec{x}) := \frac{1}{\Delta V(\vec{x})} \frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} . \quad (16)$$

Die Änderungsrate Λ des Phasenraumvolumens ist daher durch die *Divergenz des Geschwindigkeitsfelds* \vec{F} bestimmt.

Der Satz von Liouville ist als Spezialfall in (16) enthalten. Gemäß (3) – (5) lautet das Geschwindigkeitsfeld für ein Hamiltonsches System mit den Koordinaten $\vec{x} = (q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)^T$ nämlich

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_N}; -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_N} \right)^T . \quad (17)$$

Dies führt auf die Volumenänderung

$$\begin{aligned} \Lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} F_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p_i} F_{N+i} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 , \end{aligned} \quad (18)$$

wodurch sich bestätigt, daß konservative Systeme volumenerhaltend sind.

Wenn der Fluß im Phasenraum *kontrahierend* ist, d.h. wenn $\Lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$ gilt, dann nennen wir das System *dissipativ*. Dies ist zunächst eine lokale Aussage die an einem Punkt \vec{x} im Phasenraum gilt. Um zu einer globalen Einschätzung der Dynamik zu kommen, muß $\Lambda(\vec{x})$ über eine Trajektorie $\vec{x}(t)$ gemittelt werden. Wechselt Λ dabei sein Vorzeichen, dann gibt es keine einfache Methode um zu erkennen, ob ein System dissipativ ist; man muß tatsächlich den Mittelwert ausrechnen.

In dissipativen Systemen schrumpft das Volumen, daß von benachbarten Trajektorien ausgefüllt wird, mit der Zeit zusammen, asymptotisch wird es sogar Null. Dies

kann auf triviale Weise geschehen, indem die Trajektorien zusammenlaufen. Im einfachsten Fall laufen sie in einen Gleichgewichtspunkt und die Bewegung kommt zur Ruhe (siehe Abschnitt 21.4). Es gibt aber auch die Möglichkeit, daß das Volumen schrumpft, indem der Abstand der Trajektorien nur in gewissen Richtungen kleiner wird, während sie in anderen Richtungen aber auseinanderlaufen. In diesem Fall wächst der resultierende Abstand sogar mit der Zeit an. Ein ursprünglich lokalisierter Bereich im Phasenraum wird also durch den dynamischen Fluß gewissermaßen „ausgewalzt“ und weit verteilt. Das Schrumpfen des Volumens zu Null bedeutet dann, daß aus einem ursprünglich N -dimensionalen Hyperwürfel im Phasenraum ein geometrisches Gebilde mit *niedrigerer Dimension* $D < N$ entsteht. Wie in Kapitel 24.4 erläutert wird, kann D sogar einen nicht-ganzzahligen Wert annehmen.

21.2 Attraktoren

Die Dynamik eines nichtlinearen Systems kann sehr komplex sein. Um Ordnung in die auftretenden Phänomene zu bringen empfiehlt es sich, zunächst zwischen *transientem* und *asymptotischen* Verhalten zu unterscheiden. Als Transiente oder Einschwingvorgang bezeichnet man das anfängliche Verhalten eines Systems, nachdem es von einem vorgegebenen Punkt \vec{x}_0 im Phasenraum gestartet ist. Naturgemäß ist es hier besonders schwierig allgemeine Aussagen zu machen, da die Transienten von der speziellen Anfangsbedingung abhängen. Der Theoretiker ist daher geneigt, diesen Teil der Trajektorie zu ignorieren, auch wenn er in der Praxis, abhängig von den vorherrschenden Zeitskalen, eine wichtige Rolle spielen kann. Erst in jüngerer Zeit widmet die Forschung den Transienten mehr Aufmerksamkeit.

Etwas einfacher systematisch zu behandeln ist das asymptotische oder stationäre Verhalten eines Systems. „Stationär“ soll hier nicht bedeuten, daß das System in Ruhe ist, sondern nur, daß etwaige Einschwingvorgänge abgeklungen sind. In dissipativen Systemen, die wir hier vornehmlich behandeln wollen, werden sich die Trajektorien asymptotisch zu einer Teilmenge des Phasenraums von niedrigerer Dimension hinbewegen, einem sogenannten *Attraktor*.

Die Definition und saubere mathematische Klassifikation von Attraktoren ist nicht ganz einfach. Tatsächlich finden sich in der Literatur verschiedene Begriffsbildungen, die im Detail voneinander abweichen. Wir geben hier zunächst eine mathematische Definition[‡], werden den Begriff des Attraktors im Laufe der nachfolgenden Kapitel aber auch an verschiedenen Beispielen veranschaulichen.

Betrachtet werde ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ auf einem Raum M (z.B. $M = \mathbb{R}^N$) mit zugehörigem Phasenfluß Φ_t .

[‡]F. Scheck: *Mechanik*, Springer (1992)

Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *Attraktor* wenn sie folgende Kriterien erfüllt:

- 1) A ist *kompakt*.
- 2) A ist *invariant* unter dem Phasenfluß Φ_t .
- 3) A hat eine offene Umgebung U , die sich unter dem Fluß *auf* A *zusammenzieht*.

Dies bedarf einiger Erläuterungen.

Zu 1): Eine Menge heißt kompakt wenn sie *abgeschlossen* und *beschränkt* ist. D.h. jeder Grenzwert einer unendlichen Folge von Punkten gehört selbst zur Menge, und die Menge kann sich nicht ins Unendliche erstrecken. „Explodierende“ Lösungen, bei denen z.B. Teilchen ins Unendliche entweichen, können also keine Attraktoren sein.

Zu 2): Invarianz unter dem Phasenfluß bedeutet

$$\Phi_t(A) = A \quad \text{für alle } t. \quad (19)$$

Ein Punkt auf dem Attraktor kann diesen also niemals verlassen.

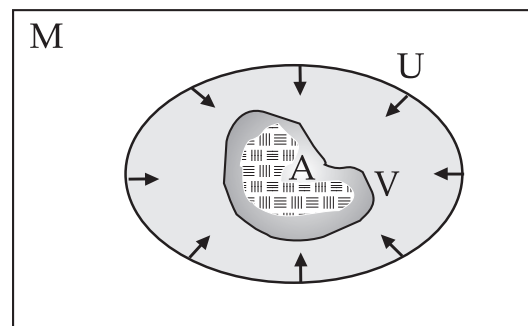
Zu 3): Dies läßt sich in zwei Schritten formulieren.

Zunächst ist die Umgebung $U \supset A$ größer als der Attraktor selbst, da es sich um einen offenen Bereich handelt, der das kompakte A umfaßt. U soll *positiv invariant* sein, d.h. es soll gelten

$$\Phi_t(U) \subseteq U \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (20)$$

Liegt ein Punkt also erst einmal in U , dann kann er sich nicht mehr herausbewegen. Vielmehr wird er sogar zu A hingezogen, was sich wie folgt formulieren läßt.

Abb. VII.1: Veranschaulichung der Definition eines Attraktors A (schraffiert). Die Umgebung U schrumpft im Verlauf der Zeitentwicklung zusammen, so daß sie für $t > t_V$ in jeder beliebigen kleineren Umgebung V enthalten ist.



Zu jeder offenen Umgebung V von A die ganz in U liegt, also $A \subset V \subset U$, kann man eine Zeit t_V finden, nach deren Überschreitung das Bild von U ganz in V liegt:

$$\Phi_t(U) \subset V \quad \text{für alle } t > t_V. \quad (21)$$

Da V beliebig „eng“ um A gewählt werden kann bedeutet dies, daß U für große Zeiten auf den Attraktor A zusammenschrumpft.

Häufig wird die Definition eines Attraktors noch um die Forderung erweitert, daß er aus einem Stück bestehen soll.

- 4) A kann nicht in mehrere abgeschlossene nichtüberlappende invariante Teilmengen zerlegt werden.

Eine wichtige Eigenschaft eines Attraktors ist sein Einzugsbereich. Als *Attraktorbecken* B wird die maximale Umgebung U bezeichnet, die sich auf A zusammenzieht. Mathematisch korrekt formuliert: B ist die Vereinigung aller offenen Umgebungen von A , die die Bedingungen (20) und (21) erfüllen.

Die hier gegebene Einführung des Begriffs Attraktor ist recht aufwendig. Dies wird aber dadurch gerechtfertigt, daß Attraktoren sehr komplexe Eigenschaften haben können. Von zentraler Bedeutung für die nichtlineare Dynamik sind die Begriffe *seltsamer* bzw. *chaotischer* Attraktor, die manchmal – nicht ganz korrekt – synonym verwendet werden. Diese Begriffe werden erst in den folgenden Kapiteln und anhand von Beispielen richtig klar werden. Wir geben jedoch hier schon die Definitionen:

Chaotischer Attraktor: Die Bewegung ist extrem sensitiv auf die Anfangsbedingungen. Der Abstand zwischen zwei anfangs nahe benachbarten Trajektorien wächst exponentiell mit der Zeit an. Näheres hierzu siehe Kap. 24.

Seltsamer Attraktor: Der Attraktor hat eine stark zerklüftete geometrische Gestalt, die durch ein Fraktal beschrieben wird. Näheres hierzu siehe Kap. 24.4

Beide Eigenschaften treten in der Regel gemeinsam auf. Es wurden jedoch auch Beispiele gefunden[§] bei denen ein Attraktor chaotisch aber nicht seltsam, oder seltsam aber nicht chaotisch ist.

21.3 Gleichgewichtslösungen

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn sich das System im stationären Gleichgewicht befindet, also

$$\vec{F}(\vec{x}_0) = 0 \quad \text{so daß} \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_0 = \text{const.} \quad (22)$$

Ein solches \vec{x}_0 wird auch als *kritischer Punkt* oder *Fixpunkt* bezeichnet. Besonders interessant ist die Frage, ob sich das System zu einen solchen Fixpunkt hinbewegt und – falls mehrere vorhanden sind – zu welchem. Ein Fixpunkt der die Trajektorien zu sich hin zieht ist das einfachste Beispiel eines Attraktors. Die in Abschnitt 21.2 definierte Menge A ist in diesem Fall trivial und besteht aus einem einzigen Punkt.

[§]C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J.A. Yorke: *Physica 13D*, 261 (1984)

Wir interessieren uns daher für die *Stabilität* von Gleichgewichtslösungen. Dazu werden die Bahnen $\vec{x}(t)$ in der Umgebung eines kritischen Punkts \vec{x}_0 untersucht. Wir fordern also, daß der Abstand

$$\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_0 \quad (23)$$

eine kleine Größe ist. Unter dieser Bedingung läßt sich das Problem sehr vereinfachen, denn es genügt gewöhnlich, den niedrigsten Term der Taylorentwicklung von $\vec{F}(\vec{x})$ mitzunehmen. Die *linearisierte Bewegungsgleichung* lautet dann

$$\frac{d}{dt} \vec{\xi}(t) = \mathbf{M} \vec{\xi}(t) \quad (24)$$

wobei Terme von quadratischer oder höherer Ordnung in $\vec{\xi}$ vernachlässigt wurden. Bei \mathbf{M} handelt es sich um die *Jacobimatrix* (Funktionalmatrix) der Funktion $\vec{F}(\vec{x})$, ausgewertet an der Stelle \vec{x}_0 . Diese Matrix hat die Elemente

$$M_{ik} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right|_{\vec{x}_0} . \quad (25)$$

Im Gegensatz zur ursprünglichen nichtlinearen Bewegungsgleichung (1) ist die Lösung des linearisierten Problems (24) im Prinzip einfach, nämlich analytisch angebar. Betrachten wir zunächst den wirklich trivialen Spezialfall eines eindimensionalen Systems ($N = 1$). Dann hat die Jacobimatrix nur ein einziges Element, nennen wir es μ , und (24) wird gelöst durch

$$\xi(t) = e^{\mu t} \xi(0) . \quad (26)$$

Der Charakter der Lösung wird vom *Vorzeichen* von μ bestimmt. $\mu < 0$: x_0 ist ein *stabiler* Gleichgewichtspunkt denn kleine Störungen klingen exponentiell ab. $\mu > 0$: Das Gleichgewicht ist *instabil*, da schon kleinste Auslenkungen exponentiell „explodieren“. Ist $\mu = 0$ dann liegt der Grenzfall des *labilen* oder auch *neutralen* Gleichgewichts vor. Das Verhalten bei Störungen wird dann durch die höheren Ableitungen der Funktion $F(x)$ im Punkt x_0 bestimmt.

Den allgemeinen Fall ($N > 1$) kann man wie in Kapitel 8 mit der Methode der Normalschwingungen behandeln. Es werden auf 1 normierte Lösungsvektoren $\vec{u}(t)$ konstruiert, bei denen alle Komponenten die gleiche (exponentielle) Zeitabhängigkeit aufweisen:

$$\vec{u}(t) = e^{\mu t} \vec{u} . \quad (27)$$

Mit (24) führt dies auf das Eigenwertproblem

$$\mathbf{M} \vec{u} = \mu \vec{u} . \quad (28)$$

Dieses N -dimensionale lineare Gleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen wenn die Determinante

$$\det(M_{ij} - \mu \delta_{ij}) = 0 \quad (29)$$

verschwindet. Diese *charakteristische Gleichung* (Säkulargleichung) hat als Polynom N ter Ordnung im allgemeinen N *Eigenwerte* μ_n mit den zugehörigen *Eigenvektoren* \vec{u}_n . Die allgemeine Lösung von (24) läßt sich dann als eine Überlagerung

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{\mu_n t} \vec{u}_n \quad (30)$$

schreiben, wobei sich die Entwicklungskoeffizienten c_n aus der Anfangsbedingung bei $t = 0$ bestimmen lassen. Die Eigenwerte μ_n können reell oder auch komplex sein. Komplexe Eigenwerte treten dabei immer *paarweise* auf: Wenn μ_n die Gleichung (29) löst dann tut dies offensichtlich auch das komplex konjugierte μ_n^* , da die Jacobimatrix M_{ij} reell ist.

Entscheidend für die Charakterisierung eines Gleichgewichtspunkts \vec{x}_0 sind die Realteile der Eigenwerte der charakteristischen Gleichung. Wir definieren nun eine verschärfte Form der Stabilitätsbedingung:

Ein Gleichgewichtspunkt \vec{x}_0 mit $\vec{F}(\vec{x}_0) = 0$ heißt *asymptotisch stabil* wenn es eine Umgebung $U \ni \vec{x}_0$ gibt innerhalb derer sämtliche Bahnen für große Zeiten nach \vec{x}_0 laufen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_0 \quad \text{für} \quad \vec{x}(0) \in U . \quad (31)$$

Wenn die Funktion (das Vektorfeld) \vec{F} genügend glatt ist, um durch die lineare Näherung beschrieben werden zu können, dann läßt sich sofort eine hinreichende *Bedingung für asymptotische Stabilität* angeben:

Der Punkt \vec{x}_0 ist asymptotisch stabil wenn alle Eigenwerte der Jacobimatrix einen negativen Realteil besitzen, wenn also

$$\Re \mu_n \leq c < 0 \quad \text{für alle} \quad n = 1, \dots, N \quad (32)$$

mit einer negativen Konstante c .

Ein Blick auf (30) zeigt, daß unter dieser Bedingung sämtliche Beiträge zur Abweichung $\xi(t)$ exponentiell gegen Null gehen, so daß asymptotisch gilt

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}_0\| < \text{const} e^{-(\min_n |\Re \mu_n|)t} . \quad (33)$$

Umgekehrt gilt auch: Wenn wenigstens einer der Eigenwerte einen positiven Realteil besitzt, $\Re\mu_n > 0$, dann ist x_0 ein *instabiler* Fixpunkt, denn Auslenkungen in Richtung \vec{u}_n wachsen exponentiell an.

Unter Kenntnis der Eigenvektoren \vec{u}_n läßt sich der gesamte Phasenraum in *Teilräume* aufspannen. Der stabile (bzw. instabile) Teilraum wird von allen Vektoren \vec{u}_n aufgespannt für die $\Re\mu_n < 0$ (bzw. > 0) ist. Zusätzlich kann noch ein Teilraum auftreten mit dem speziellen Wert $\Re\mu_n = 0$. Ist dies der Fall, dann spricht man von einem *degenerierten* Fixpunkt. (Der zugehörige Teilraum wird auch als das *Zentrum* bezeichnet; auf die damit verbundenen Fragen wollen wir hier nicht näher eingehen.) Betrachtet man eine allgemeine Störung einer Trajektorie, so wird diese Komponenten in allen Teilräumen besitzen. Nach hinreichend langer Zeit wird sich dann immer derjenige Beitrag durchsetzen mit dem maximalen $\Re\mu_n$.

Abschließend ist zu bemerken, daß die lineare Stabilitätsanalyse nur in der Umgebung eines kritischen Punkts \vec{x}_0 gilt. Mathematisch läßt sich zeigen, daß sich dort das topologische Verhalten des Flusses im allgemeinen unter dem Einfluß der Nichtlinearität nicht ändert. Die Umgebung kann allerdings sehr klein sein, so daß sich über das globale Verhalten des Flusses auf diese Weise keine Aussage machen läßt.

21.1 Beispiel: Lineare Stabilität in zwei Dimensionen

Besonders übersichtlich wird die Stabilitätsanalyse für den Fall $N = 2$, was einem dynamischen System mit einem Freiheitsgrad $x_1 = q$ und dem dazugehörigen Impuls $x_2 = p$ entspricht. In der Nähe eines Fixpunkts $\vec{x} = \vec{F}(\vec{x}_0) = 0$ wird die Bewegung in linearer Näherung durch die vier Elemente der Jacobimatrix M_{ij} bestimmt. Die charakteristische Gleichung (29)

$$\begin{vmatrix} M_{11} - \mu & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

ist ein quadratisches Polynom

$$\mu^2 - (M_{11} + M_{22})\mu + M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 0 \tag{2}$$

oder

$$\mu^2 - 2s\mu + d = 0 \tag{3}$$

mit

$$s = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) = \frac{1}{2}\text{Sp}M \quad , \quad d = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \det M . \tag{4}$$

Die beiden Lösungen von 3 lassen sich explizit angeben:

$$\mu_{1/2} = s \pm \sqrt{s^2 - d} . \tag{5}$$

In Abhängigkeit von Größe und Vorzeichen der beiden Konstanten s und d gibt es etliche verschiedene Möglichkeiten für die Eigenwerte μ_1, μ_2 :

- (a) μ_1, μ_2 reell und beide negativ (wenn $s < 0$ und $0 < d < s^2$) *Stabiler Knoten*
- (b) μ_1, μ_2 reell und beide positiv (wenn $s > 0$ und $0 < d < s^2$) *Instabiler Knoten*
- (c) μ_1, μ_2 reell mit unterschiedlichen Vorzeichen (wenn $d < 0$) *Sattel*
- (d) $\mu_1 = \mu_2^*$, negativer Realteil (wenn $s < 0$ und $d > s^2$) *Stabiler Strudel*
- (e) $\mu_1 = \mu_2^*$, positiver Realteil (wenn $s > 0$ und $d > s^2$) *Instabiler Strudel*
- (f) $\mu_1 = \mu_2^*$, rein imaginär (wenn $s = 0$ und $d > 0$) *Wirbel*

Die Bereiche sind in Figur VII.2 in der $s - d$ -Ebene dargestellt. Diesen Alternativen entsprechen jeweils unterschiedliche Typen von Trajektorien $\xi(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_0$ gemäß Gleichung (30).

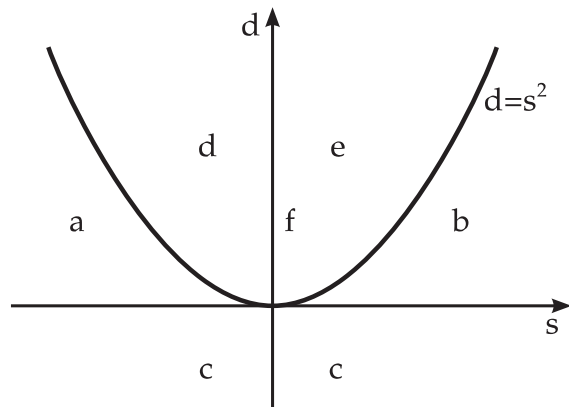


Abb. VII.2: Bereiche unterschiedlicher Stabilität in Abhängigkeit von den Parametern s und d .

Figur VII.3 zeigt, wie die Trajektorien in der Nähe eines *stabilen Knotens* in den Fixpunkt hineinlaufen:

$$\vec{\xi}(t) = c_1 e^{-|\mu_1|t} \vec{u}_1 + c_2 e^{-|\mu_2|t} \vec{u}_2 \quad \underline{6}$$

wobei \vec{u}_1 and \vec{u}_2 die (nicht notwendig orthogonalen) Eigenvektoren sind. Die Krümmung der Trajektorien entsteht wenn $\mu_1 \neq \mu_2$. Es handelt sich um parabelartige Kurven, die im Ursprung eine gemeinsame Tangente aufweisen (in \vec{u}_1 - oder \vec{u}_2 -Richtung, je nachdem ob μ_2 oder μ_1 größer ist). Die Bahnen für den *instabilen Knoten*, Figur VII.3(b), sehen genauso aus, werden aber in umgekehrter Richtung durchlaufen (Exponentielle „Explosion“). Im Fall des *Sattels* laufen die Bahnen zwar in der \vec{u}_1 -Richtung (sei o.B.d.A. $\mu_1 < \mu_2$) auf den Fixpunkt zu, werden jedoch in der \vec{u}_2 -Richtung fortgetrieben, so daß sich die hyperbelartigen Trajektorien aus Fig. VII.3(c) ergeben.

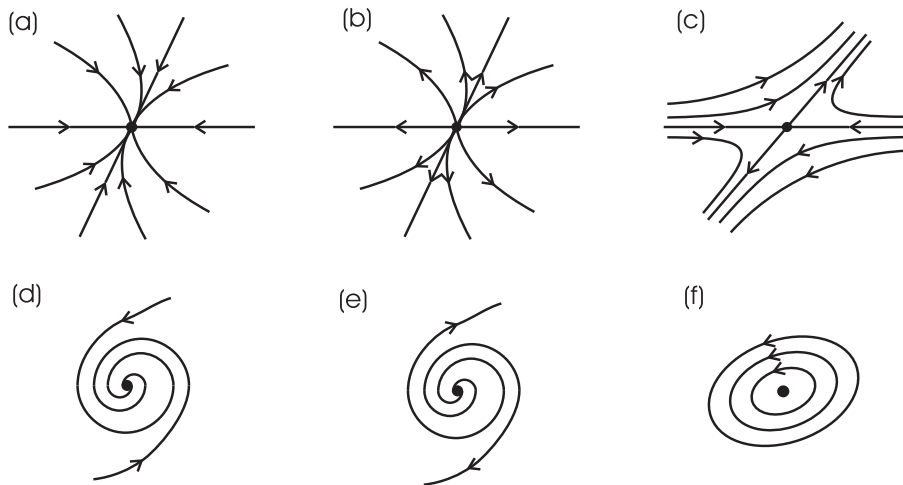


Abb. VII.3: Verschiedene Stabilitätstypen eines Fixpunkts in zwei Dimensionen. Obere Reihe: Stabiler und instabiler Knoten, Sattel. Untere Reihe: Stabiler und instabiler Strudel, Wirbel.

Wenn die Eigenwerte *komplex* sind,

$$\mu_1 = \mu_r + i\mu_i \quad , \quad \mu_2 = \mu_r - i\mu_i \quad \underline{7}$$

wird dies wegen (28) auch für die Eigenvektoren gelten:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_r + i\vec{u}_i \quad , \quad \vec{u}_2 = \vec{u}_r - i\vec{u}_i \quad \underline{8}$$

Die allgemeine Lösung (30) hat dann die Form

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(t) &= c_1 e^{\mu_1 t} \vec{u}_1 + c_2 e^{\mu_2 t} \vec{u}_2 \\ &= c_1 e^{\mu_1 t} \vec{u}_1 + c_1^* e^{\mu_1^* t} \vec{u}_1^* \\ &= 2 e^{\mu_r t} \Re(c_1 e^{i\mu_i t} \vec{u}_1) \end{aligned} \quad \underline{9}$$

wobei $c_2 = c_1^*$ damit $\vec{\xi}$ reell wird. Wenn wir die Konstante c_1 , deren Wert durch die Anfangsbedingung $\vec{\xi}(0)$ festgelegt ist, in Betrag und Phase aufspalten und dies ebenso für die cartesischen Komponenten des komplexen Eigenvektors \vec{u}_1 tun,

$$c_1 = \rho e^{i\phi} \quad , \quad \vec{u}_1 = a e^{i\alpha} \vec{e}_x + b e^{i\beta} \vec{e}_y \quad \text{mit} \quad a^2 + b^2 = 1 \quad \underline{10}$$

dann läßt sich $\underline{9}$ wie folgt umschreiben:

$$\vec{\xi}(t) = 2\rho e^{\mu t} \left[a \cos(\mu t + \phi + \alpha) \vec{e}_x + b \cos(\mu t + \phi + \beta) \vec{e}_y \right] . \quad \underline{11}$$

Der Faktor in Klammern beschreibt gegeneinander phasenverschobene (wenn $\alpha \neq \beta$) harmonische Schwingungen, es handelt sich also um die Parameterdarstellung einer *Ellipse*. Die Größe der Ellipse hängt wegen des Vorfaktors exponentiell von der Zeit ab. Die Trajektorien sind also *logarithmische Spiralen* die je nach dem Vorzeichen des Realteils von μ zum Fixpunkt hin oder von ihm weg streben, siehe Figur VII.3(d) und (e), daher auch der Name *Strudel*. Der Fall des Wirbels mit $\Re\mu = 0$ spielt eine Sonderrolle, da hier die Bahnen in der Umgebung von \vec{x}_0 periodische Funktionen (konzentrische Ellipsen) sind. Das bedeutet daß der Gleichgewichtspunkt zwar *stabil* (kleine Abweichungen werden nicht verstärkt) aber *nicht asymptotisch stabil* (die Trajektorie läuft nicht in den Fixpunkt hinein) ist, dieser ist also kein Attraktor.

21.2 Aufgabe: Der nichtlineare Oszillator mit Reibung

Ein eindimensionales System werde durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = 0 . \quad \underline{1}$$

Zeigen Sie, daß es sich um ein dissipatives System handelt. Man interpretiere die einzelnen Terme und diskutiere die möglichen Fixpunkte und deren Stabilität.

Lösung: Es handelt sich um einen harmonischen Oszillator mit Reibung und Nichtlinearität. Neben der linearen rücktreibenden Kraft des harmonischen Oszillators (3. Term) wirkt hier eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung (2. Term). Außerdem macht sich bei großen Auslenkungen eine kubische Nichtlinearität bemerkbar (4. Term). Zu diesem Kraftgesetz gehört das Potential

$$V(x) = \frac{m}{2} \beta x^2 + \frac{m}{4} \gamma x^4 , \quad \underline{2}$$

wenn m die Masse bezeichnet. Je nach Größe und Vorzeichen der Konstanten in $\underline{1}$ ergeben sich unterschiedliche Bewegungstypen. Zunächst bringen wir die Bewegungsgleichung $\underline{1}$ in die Standardform. Dazu führen wir die Geschwindigkeit als zweite Koordinate ein, $\vec{x} = (x, y) = (x, \dot{x})$, was zu den gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\alpha y - \beta x - \gamma x^3 \end{pmatrix} \equiv \vec{F}(\vec{x}) \quad \underline{3}$$

führt. Für $\alpha > 0$ ist das System dissipativ, denn die Divergenz des Geschwindigkeitsfelds ist

$$\Lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} (-\alpha y - \beta x - \gamma x^3) = -\alpha < 0 . \quad \underline{4}$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\vec{F}(\vec{x}_0)$ lautet

$$y = 0 \quad , \quad x(\beta + \gamma x^2) = 0 . \quad \underline{5}$$

Neben der Gleichgewichtslage $\vec{x}_0 = (0, 0)$ ohne Auslenkung gibt es also noch zwei weitere symmetrisch gelegene Fixpunkte $\vec{x}_0 = (\pm\sqrt{-\beta/\gamma}, 0)$, vorausgesetzt die Konstanten β und γ haben unterschiedliches Vorzeichen. In Figur VII.4 sind die zugehörigen Potentialfunktionen $V(x)$ für alle vier Vorzeichenkombinationen dargestellt.

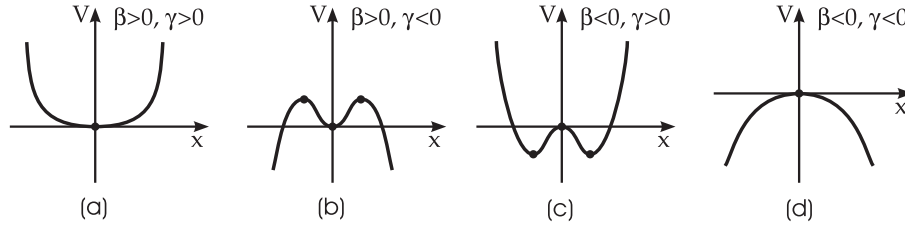


Abb. VII.4: Das Potential des quartischen Oszillators für verschiedene Vorzeichen der Parameter β und γ .

Zur Diskussion der linearen Stabilität wird die Jacobimatrix benötigt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x & \partial F_1/\partial y \\ \partial F_2/\partial x & \partial F_2/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta - 3\gamma x^2 & -\alpha \end{pmatrix} . \quad \underline{6}$$

Die charakteristische Gleichung 3 in Beisp. 21.1 für die Eigenwerte enthält die folgenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{Für } \vec{x}_0 = (0, 0) & : s = -\frac{1}{2}\alpha , d = \beta , \\ \text{Für } \vec{x}_0 = (\pm\sqrt{-\beta/\gamma}, 0) & : s = -\frac{1}{2}\alpha , d = -2\beta . \end{aligned}$$

Asymptotische Stabilität ist offenbar nur bei positivem Vorzeichen der Konstanten $\alpha > 0$ möglich. Nur dann handelt es sich physikalisch um einen dämpfenden Reibungsterm. Für den Fixpunkt in der Ruhelage $x_0 = (0, 0)$ finden wir die Alternativen

1. $\beta > \frac{1}{4}\alpha^2$: stabiler Strudel
2. $0 < \beta < \frac{1}{4}\alpha^2$: stabiler Knoten
3. $\beta < 0$: Sattel

Im ersten Fall liegen schwach gedämpfte Schwingungen vor, im zweiten Fall ist der Oszillator überdämpft und die Auslenkung geht monoton gegen Null. Für $\beta < 0$ ist die Gleichgewichtslage labil, wie den Potentialbildern VII.4(c) und (d) zu entnehmen ist. Die analogen Überlegungen für die Fixpunkte $\vec{x}_0 = (\pm\sqrt{-\beta/\gamma}, 0)$ führen auf (wir setzen voraus $\alpha > 0$)

1. $-2\beta > \frac{1}{4}\alpha^2$: stabiler Strudel
2. $0 < -2\beta < \frac{1}{4}\alpha^2$: stabiler Knoten
3. $\beta > 0$: Sattel

Der Faktor zwei rührt daher, daß die Krümmung des Potentials 2 in den ausgelenkten Gleichgewichtslagen doppelt so groß ist wie in der Ruhelage. Nur das Doppellozillator-Potential (Figur VII.4(c)) erlaubt stabile ausgelenkte Fixpunkte ($\beta < 0$ und $\gamma > 0$).

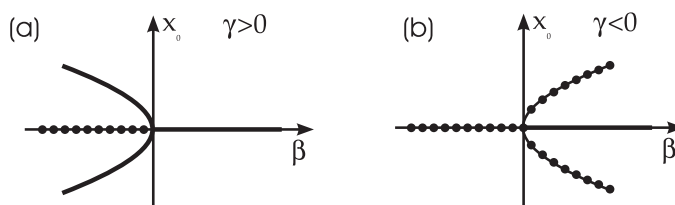


Abb. VII.5: Die Lage der stabilen (durchgezogen) und instabilen (gepunktet) Fixpunkte in Abhängigkeit der Parameter β und γ .

Interessant ist es, die Lage der Fixpunkte als Funktion des Parameters β aufzutragen. Wie Figure VII.5 zeigt, liegt bei $\beta = 0$ eine Quadratwurzel-Verzweigung vor. Im Fall $\gamma > 0$ gabelt sich eine stabile Gleichgewichtslage in zwei neue stabile Lösungen. Derartige *Bifurkationen* (lat. furca=Gabel) treten in nichtlinearen Systemen sehr häufig auf, siehe auch Abschnitt Kapitel 23.

21.4 Grenzyklen

Neben den simplen stationären Gleichgewichtspunkten, die wir in Abschnitt 21.2 ausführlich untersucht haben, kann ein dynamisches System auch noch andere Arten stabiler Lösungen aufweisen. Dies sind die sogenannten *Grenzyklen*, die durch periodisch oszillierende, in sich geschlossene Trajektorien charakterisiert sind. Ähnlich wie die schon diskutierten Fixpunkte können auch Grenzyklen als *Attraktoren* der Bewegung wirken, vgl. Kap. 21.2. Es gibt dann einen mehr oder weniger großen Bereich im Phasenraum (das „Einzugsbecken“ des Attraktors) von dem aus die Trajektorien zu dem Grenzyklus hinlaufen, dem sie sich für $t \rightarrow \infty$ immer mehr anschmiegen. Auch für Grenzyklen läßt sich wie für Fixpunkte eine mathematische Stabilitätsanalyse durchführen, die naturgemäß etwas schwieriger ist.

Wir werden uns hier auf ein spezielles aber typisches Beispiel konzentrieren, nämlich einen *harmonischen Oszillator mit nichtlinearem Reibungsterm*. Die zugehörige Differentialgleichung lautet, zunächst noch in allgemeiner Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0. \quad (34)$$

Ohne den mittleren Term handelt es sich um einen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz ω . Der Fall eines konstanten Koeffizienten, $f(x) = \alpha = \text{const}$, führt auf eine leicht zu lösende lineare Differentialgleichung. Der Charakter der Lösung wird durch einen Exponentialfaktor $\exp(-\alpha t/2)$ bestimmt. Sie fällt also exponentiell ab gegen den Fixpunkt bei $x = \dot{x} = 0$ wenn α positiv ist. Ein negativer Wert von α bedeutet, daß eine Kraft in gleicher Richtung wie die augenblickliche Geschwindigkeit wirkt, was zu einem unbeschränkten Aufschaukeln der Lösung führt („negative Dämpfung“). Physikalisch handelt es sich in diesem Fall natürlich

nicht mehr um eine Reibung, sondern es muß eine äußere Quelle vorhanden sein, die Energie in das System pumpt.

Läßt man allgemeinere Funktionen $f(x)$ zu, dann kann es vorkommen, daß der Dämpfungskoeffizient in Abhängigkeit von der Auslenkung teils positive, teils negative Werte annimmt. Besonders interessant wird es, wenn $f(x)$ für betragsmäßig kleine Werte von x negativ und für große Auslenkungen positiv ist. Der einfachste Ansatz der dies leistet ist ein quadratisches Polynom

$$f(x) = \alpha(x^2 - x_0^2) \quad (35)$$

wobei α die Stärke der Dämpfung/Anfachung bestimmt und zwei Nullstellen bei $x = \pm x_0$ liegen. Durch Umskalierung der Variablen auf $x' = x/x_0$ mit $\alpha' = \alpha x_0^2$ können wir die Nullstellen ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Wert 1 legen. Der Bequemlichkeit halber läßt sich auch für die Frequenz der Wert 1 wählen, indem man die Zeit umskaliert: $t' = \omega_0 t$ mit $\alpha'' = \alpha'/\omega$. Die Standardform der Bewegungsgleichung lautet dann (die Striche werden wieder weggelassen)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (36)$$

Diese Differentialgleichung wurde im Jahr 1926 von dem niederländischen Ingenieur *B. van der Pol* aufgestellt und diskutiert. Sie diene zunächst zur Beschreibung einer rückgekoppelten elektronischen Oszillatorschaltung (damals noch mit Röhren), jedoch war schon dem Autor klar, daß seine Gleichung auf eine Vielzahl von Schwingungsprozessen anwendbar ist. Tatsächlich reichen die Wurzeln der Gleichung noch weiter zurück, denn schon um 1880 studierte *Lord Rayleigh* folgende Differentialgleichung im Zusammenhang mit der Beschreibung nichtlinearer Vibrationen

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \alpha \left[\frac{1}{3} \left(\frac{dv}{dt} \right)^3 - \frac{dv}{dt} \right] + v = 0. \quad (37)$$

Es ist nicht schwer zu erkennen, wie (36) und (37) zusammenhängen. Wir müssen nur die Rayleigh-Gleichung (37) nach der Zeit differenzieren und dann

$$\frac{dv}{dt} = x \quad (38)$$

ersetzen, um die van der Pol-Gleichung (36) zu erhalten. Beide Gleichungen sind also im wesentlichen zueinander äquivalent.

Wir diskutieren nun die Lösungen der van der Pol-Gleichung (36). Sie läßt sich wie üblich in die Standardform (1) zweier gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung für den Vektor $\vec{x}(t) = (x, y)^T$ bringen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \alpha(x^2 - 1)y. \end{aligned} \quad (39)$$

Es ist nun vorteilhaft, auf Polarkoordinaten im (x, y) -Phasenraum umzutransformieren:

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta . \quad (40)$$

Die Zeitableitungen von r und θ lassen sich durch diejenigen von x und y ausdrücken. Für die Radiuskoordinate folgt der Zusammenhang sofort aus der Differentiation von $r^2 = x^2 + y^2$:

$$r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} . \quad (41)$$

Eine analoge Beziehung für den Winkel läßt sich aus den Zeitableitungen von (40) gewinnen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta , \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta , \end{aligned} \quad (42)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit y und die zweite mit x und subtrahiert beide, dann folgt

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} . \quad (43)$$

Mit (41) und (43) lautet daher das van der Pol-Gleichungssystem in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\alpha(r^2 \cos^2 \theta - 1)r \sin^2 \theta , \\ \frac{d\theta}{dt} &= -1 - \alpha(r^2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \cos \theta . \end{aligned} \quad (44)$$

Die nichtlinearen Terme auf der rechten Seite haben eine recht komplizierte Gestalt, jedoch läßt sich qualitativ einiges über die zu erwartenden Lösungen aussagen. Im Grenzfall $\alpha = 0$ liegt natürlich ein normaler harmonischer Oszillator vor. Die Bahnen im Phasenraum sind Kreise die mit der Frequenz 1 gleichmäßig durchlaufen werden, sodaß

$$x(t) = \rho \sin(t - t_0) \quad (45)$$

mit beliebigem ρ und t_0 . Durch die Nichtlinearität in (44) ändert sich das Verhalten der Lösung. Solange $\alpha \ll 1$ ist bleibt der Einfluß auf die Umlauffrequenz nur gering: Da die Funktion $\sin \theta \cos \theta$ in jeder Periode zweimal ihr Vorzeichen wechselt, hebt sich der Einfluß des nichtlinearen Terms in (44b) im Mittel weg. Ganz anders hingegen für die Radialbewegung: Hier ist $\sin^2 \theta$ positiv definit und kleine Änderungen des Radius können sich von Periode zu Periode akkumulieren. In welcher Richtung

dieser Effekt geht wird durch das Vorzeichen von $-\alpha(r^2 \cos^2 \theta - 1)$ bestimmt. Wir diskutieren im folgenden den (interessanteren) Fall $\alpha > 0$ (die Lösungsschar für $\alpha < 0$ kann durch Invertieren der Zeitkoordinate $t \rightarrow -t$ gewonnen werden).

Für *kleine Auslenkungen* $r < 1$ ist dann der Faktor $-\alpha(r^2 \cos^2 \theta - 1)$ immer *positiv* und der Radius wächst langsam aber monoton an. Für *große Auslenkungen* $r \gg 1$ ist der Faktor hingegen überwiegend *negativ* (außer in der Nähe der Nullstellen von $\cos \theta$) und der mittlere Radius schrumpft von Umlauf zu Umlauf. Eine genauere Untersuchung wie sie in Aufgabe 21.3 durchgeführt wird, zeigt, daß sich die Trajektorie mit der Zeit unabhängig von den Anfangsbedingungen einer periodischen Bahn annähert, die bei gegebenem α eindeutig bestimmt ist. Dies ist der *Grenzzzyklus* des Systems.

Solange α sehr klein ist ähnelt der Grenzzzyklus einer harmonischen Schwingung wie in (45). Der entscheidende Unterschied ist aber, daß die Amplitude ρ jetzt einen fest bestimmten Wert hat, nämlich $\rho = 2$. Startet man von einem kleineren oder größerem Wert, dann ist die Trajektorie eine Spirale die zum Grenzzzyklus hinführt. Das Ergebnis einer numerischen Rechnung für den Wert $\alpha = 0.1$ ist in Abb. VII.6 dargestellt. Man sieht das Spiralisieren hin zum Grenzzzyklus. Außerdem zeigen sich erste Abweichungen von der rein harmonischen Schwingung die von der Nichtlinearität herrühren.

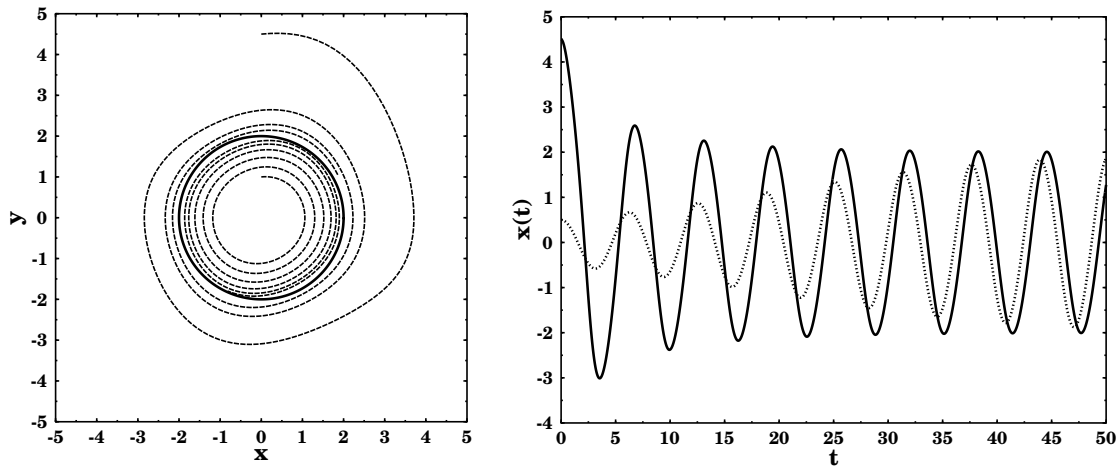


Abb. VII.6: (a) Die Lösungen des Differentialgleichungssystems (39) in der x - y -Ebene nähern sich unabhängig von der Anfangsbedingung dem Grenzzzyklus (fette Kurve), einem leicht deformierten Kreis. Der Nichtlinearitätsparameter ist $\alpha = 0.1$. (b) Die Lösungen $x(t)$ des van der Pol-Oszillators gleichen nach einem Einschwingvorgang einer annähernd harmonischen Schwingung

Noch interessanter verhält sich die Lösung im entgegengesetzten Grenzfall $\alpha \gg 1$ in dem die Nichtlinearität eine dominierende Rolle spielt. Auch hier bildet sich aus den gleichen Gründen wieder ein Grenzzzyklus aus, dessen Form aber stark von

einer harmonischen Schwingung abweicht. Abbildung VII.7 zeigt das Phasenraumportrait und den Amplitudenverlauf des Grenzzyklus für den Fall $\alpha = 10$. Es fällt auf, daß die Auslenkung im Bereich der maximalen Amplitude $x = 2$ verharrt und langsam nach $x = 1$ absinkt. Anschließend setzt ein plötzliches „Umkippen“ ein und die Auslenkung fällt bis zum Wert $x = -2$. Dann wiederholt sich das Spiel mit umgekehrtem Vorzeichen. Die Periodenlänge dieser Art Schwingung ist nicht mehr durch die Oszillatorfrequenz (hier $\omega = 1$) bestimmt sondern hat einen viel größeren Wert. Eine analytische Untersuchung (siehe Aufgabe 21.4) zeigt, daß sie proportional zum „Reibungs“parameter α anwächst:

$$T \simeq (3 - 2 \ln 2)\alpha . \quad (46)$$

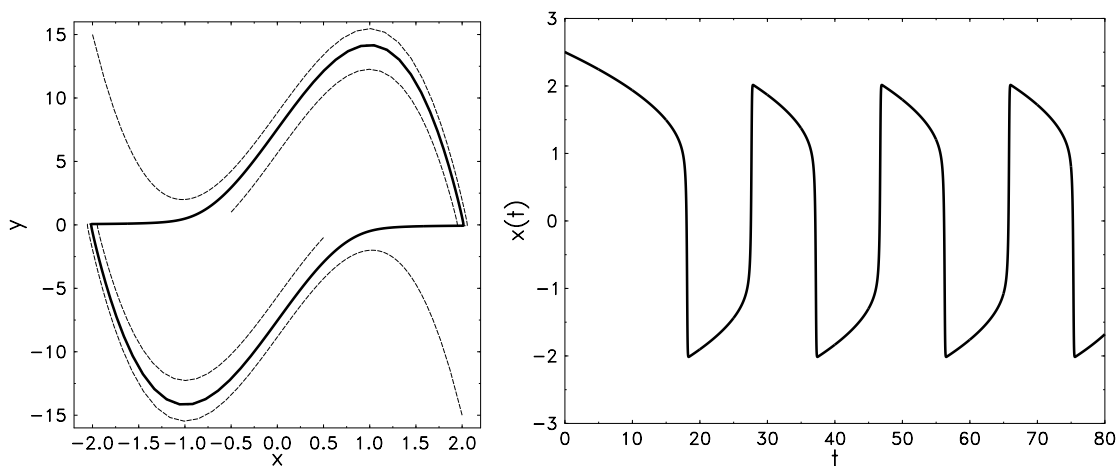


Abb. VII.7: Lösungen des van der Pol-Oszillators mit starker Nichtlinearität, $\alpha = 10$. Bedeutung der Kurven wie in Abb. VII.6.

Eine Bewegung wie sie der van der Pol- bzw. Rayleigh-Oszillator bei großem α ausführt wird auch als *Relaxationsschwingung* bezeichnet. Der Name soll andeuten, daß sich langsam „eine Spannung aufbaut“ die dann durch einen plötzlichen Relaxationsvorgang ausgeglichen wird. Derartige Relaxationsschwingungen sind in der Natur sehr verbreitet. So lassen sich etwa die Schwingung einer vom Bogen angestrichenen Saite, das Quietschen einer Bremse, und sogar der Rhythmus des Herzschlags und das zeitliche Schwanken von Tierpopulationen in diesen Rahmen einordnen.

Eine wichtige und auch praktisch nützliche Eigenschaft nichtlinearer Oszillatoren mit einem Grenzzyklus besteht darin, daß *selbsterregte* Schwingungen auftreten, die wohldefiniert und von den Anfangsbedingungen unabhängig sind. Als ein etwas nostalgisches Beispiel läßt sich hier die Unruhe einer mechanischen Uhr anführen, deren Schwingungen von der Stärke der Antriebskraft weitgehend unabhängig sind.

Zum Abschluß führen wir ohne Beweis einen mathematischen Satz an*, aus dem hervorgeht, daß die möglichen Bewegungstypen eines zweidimensionalen Systems (entsprechend einem mechanischen System mit einem Freiheitsgrad: eine Koordinate plus eine Geschwindigkeit) durch Fixpunkte und Grenzzyklen vollständig erfaßt werden.

Der Satz von Poincaré und Bendixson

Ein zweidimensionales dynamisches System $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))^T$ werde durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x})$$

mit einer stetigen Funktion \vec{F} beschrieben. Sei B ein abgeschlossener und beschränkter Bereich der (x, y) -Ebene. Wenn eine Trajektorie für alle Zeiten $t > 0$ in B liegt, $\vec{x}(t) \in B$, dann gibt es drei Möglichkeiten:

- (i) $\vec{x}(t)$ ist eine periodische Funktion;
- (ii) $\vec{x}(t)$ nähert sich asymptotisch einem stationären Gleichgewichtspunkt;
- (iii) $\vec{x}(t)$ nähert sich asymptotisch einer periodischen Funktion (Grenzzyklus).

Über Anzahl und Gestalt der Fixpunkte und Grenzzyklen sagt der allgemeine Satz natürlich nichts aus. Er schließt jedoch die Existenz komplizierterer nichtperiodischer Lösungstypen aus! Wichtig ist hierbei, daß dies *nur für zweidimensionale Systeme* gilt. Zwei Trajektorien dürfen sich ja im Phasenraum nicht schneiden und das führt in der zweidimensionalen Ebene zu erheblichen Einschränkungen. In mehr als zwei Dimensionen können die Bahnen jedoch „einander ausweichen“ und es sind komplexere Bewegungsmuster möglich. In diesem Fall können auch die schon erwähnten *seltsamen Attraktoren* mit komplizierter Gestalt auftreten. Dies wird in den nächsten Kapiteln behandelt.

21.3 Aufgabe: Der van der Pol-Oszillator mit schwacher Nichtlinearität

Zeigen Sie, daß die Lösungen des van der Pol-Oszillators für kleine Werte von α Spiralen sind, die sich einem Kreis (dem Grenzzyklus) mit Radius 2 annähern. *Hinweis:* Es empfiehlt sich, neue Variablen einzuführen, die über eine Oszillationsperiode gemittelt sind.

Lösung: Wir gehen von der plausiblen Annahme aus, daß sich im Fall $\alpha \ll 1$ die Lösung des Differentialgleichungssystems (44) nur geringfügig von der des harmonischen Oszillators unterscheidet, wenn man sie für kurze Zeitintervalle betrachtet. Um eine langfristige Drift der Variablen zu berechnen ist es dann sinnvoll, über jeweils eine Schwingungsperiode zu mitteln. Wir definieren die *gemittelte Amplitude* $\bar{r}(t)$ als

$$\bar{r}(t) := \frac{\oint d\tau r(t + \tau)}{\oint dt} . \tag{1}$$

*Siehe hierzu etwa J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer (1983)

Die Integration erstreckt sich dabei über einen vollen Umlauf des Winkels, also von θ nach $\theta - 2\pi$ (das Minuszeichen tritt auf wegen $d\theta/dt \simeq -1$). Das zugehörige Zeitintervall läuft von t bis näherungsweise (für $\alpha = 0$ wäre das exakt) zum Wert $t + 2\pi$.

Von Interesse ist die zeitliche Änderung der gemittelten Amplitude, für die gemäß (44a) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dt} &= -\alpha \frac{1}{2\pi} \oint d\theta r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= -\alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} r \left(r^2 \frac{1}{4} \sin^2 2\theta - \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \quad \underline{2}$$

Für kleine α variiert $r(t)$ über eine Periode betrachtet nur langsam, kann also vor das Integral gezogen und durch $\bar{r}(t)$ ersetzt werden. Die verbleibende Winkelintegration ist trivial, denn der Mittelwert von $\sin^2 \theta$ wie auch von $\sin^2 2\theta$ ist natürlich gerade $1/2$. Also genügt die gemittelte Amplitude der Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{2} \alpha \bar{r} \left(1 - \frac{1}{4} \bar{r}^2 \right) \quad \underline{3}$$

die bis zur Ordnung $O(\alpha^2)$ genau ist. Die Umlauffrequenz ändert sich in erster Ordnung hingegen nicht:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left[-1 - \alpha (r^2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \cos \theta \right] = -1. \quad \underline{4}$$

Das Winkelintegral verschwindet hier, da der Integrand eine bezüglich $\theta = \pi$ ungerade Funktion ist. Die Differentialgleichung 3 für die gemittelte Amplitude läßt sich geschlossen lösen. Wir schreiben abkürzend

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = a\bar{r} - b\bar{r}^3 \quad \underline{5}$$

und transformieren auf die neue Variable

$$u = \frac{1}{\bar{r}^2} \quad \text{soda\ss} \quad du = -2 \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^3}. \quad \underline{6}$$

Offensichtlich wird dann 5 zu der einfachen linearen Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2} \frac{du}{dt} = au - b \quad \underline{7}$$

als deren Lösung man sofort eine verschobene Exponentialfunktion erkennt:

$$u(t) = \frac{b}{a} + c e^{-2at}, \quad \underline{8}$$

wobei die freie Konstante c aus der Anfangsbedingung zu bestimmen ist: $c = u(0) - b/a$. Einsetzen von $a = \alpha/2$ und $b = \alpha/8$ liefert schließlich

$$\bar{r}(t) = \frac{2r(0)}{\sqrt{r^2(0) + (4 - r^2(0))e^{-at}}}. \quad \underline{9}$$

Damit ist bewiesen, daß die Trajektorien Spiralen sind, die sich von innen ($r(0) < 2$) oder außen ($r(0) > 2$) einem Kreis mit dem Radius 2 annähern. Dies ist der Grenzyklus des van der Pol-Oszillators für kleine Werte von α .

21.4 Aufgabe: Relaxationsschwingungen

Diskutieren Sie qualitativ die Lösungen des Rayleigh-Oszillators (37) für große Werte des Parameters $\alpha \gg 1$. Finden Sie eine Näherungslösung für die Periodenlänge der resultierenden Relaxationsschwingung.

Lösung: In Standardform geschrieben lautet die Differentialgleichung (37) des Rayleigh-Oszillators

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= x, \\ \frac{dx}{dt} &= -v - \alpha \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Will man das Verhalten für große Werte von α diskutieren erweist es sich als günstig, die Amplitude auf eine neue Variable $z = v/\alpha$ umzuskalieren:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{\alpha}x, \\ \frac{dx}{dt} &= -\alpha[z + f(x)] \end{aligned} \tag{2}$$

mit der Abkürzung $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Für jeden Punkt der (z, x) -Ebene läßt sich daraus die Richtung der Trajektorie ablesen:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx/dt}{dz/dt} = -\alpha^2 \frac{z + f(x)}{x}. \tag{3}$$

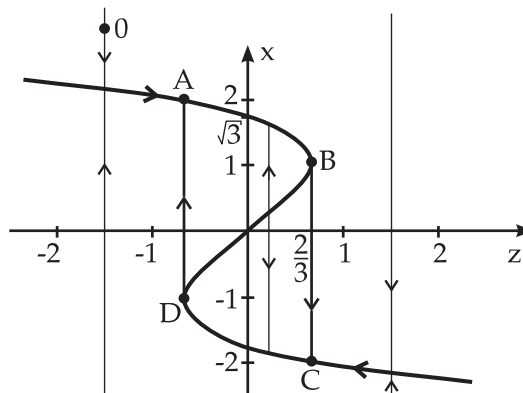
Das bedeutet, daß im Fall $\alpha \gg 1$ die Trajektorien beinahe senkrecht verlaufen. Nur in der Nähe der Kurve $z(x) = -f(x)$ ist eine andere Richtung möglich. Diese kubische Grenzkurve teilt die (z, x) -Ebene in zwei Hälften (siehe die Abb. VII.8). In der rechten Hälfte ist gemäß 2b die Ableitung dx/dt negativ und die Trajektorien verlaufen (nahezu) senkrecht nach unten. In der linken Hälfte weisen sie entsprechend nach oben.

Mit diesen Kenntnissen läßt sich der Bewegungsablauf für große α graphisch konstruieren. Beginnend von einem beliebigen Anfangspunkt, etwa dem Punkt O in der Abbildung, „stürzt“ die Trajektorie zunächst beinahe senkrecht ab bis zur Kurve $z(x) = -f(x)$. Die weitere Bewegung verläuft mit wesentlich kleinerer Geschwindigkeit in der Nähe dieser Kurve (direkt auf der Kurve wäre $dx/dt = 0$). Schließlich wird jedoch der Umkehrpunkt B bei $(z, x) = (2/3, 1)$ erreicht.

Wegen $dz/dt > 0$ kann die Trajektorie dem zurücklaufenden Ast der Kurve nicht folgen sondern „stürzt ab“ bis zum Punkt C bei $(2/3, -2)$. Nun wiederholt sich das Spiel mit umgekehrtem Vorzeichen. Der Kurvenverlauf ABCD bildet den *Grenzzyklus* des Rayleigh-Oszillators. Er besteht aus zwei langsam durchlaufenen Teilen ($x = 2 \dots 1$ bzw. $-2 \dots -1$) und zwei schnellen Sprüngen ($x = 1 \dots -2$ bzw. $-1 \dots 2$).

Diese Diskussion überträgt sich natürlich sofort auch auf den van der Pol-Oszillator, denn gemäß (38) entspricht dessen Auslenkung ja gerade der in 1a eingeführten Geschwindigkeit x des Rayleigh-Oszillators.

Abb. VII.8: Die kubische Grenzkurve $z(x)$ bestimmt das asymptotische Verhalten der Relaxationsschwingungen des van der Pol-Oszillators.



Die *Periodenlänge* T der Relaxationsschwingung läßt sich leicht ausrechnen:

$$T = \oint dt = \alpha \oint \frac{dz}{x} \quad \underline{4}$$

wobei sich das Integral über eine volle Periode erstreckt. Da die Bewegung auf den Teilstücken BC und DA sehr schnell erfolgt genügt es, den Beitrag von AB zu berechnen:

$$\begin{aligned} T &\simeq \alpha \int_{AB} \frac{dz}{x} + \alpha \int_{CD} \frac{dz}{x} \\ &= 2\alpha \int_{AB} \frac{dz}{x} = 2\alpha \int_2^1 dx \frac{dz/dx}{x} . \end{aligned} \quad \underline{5}$$

Die Ableitung dz/dx ist dabei auf der Kurve AB zu bilden, also $dz/dx = -df/dx$:

$$\begin{aligned} T &\simeq 2\alpha \int_2^1 dx \frac{-df/dx}{x} = 2\alpha \int_1^2 dx \frac{x^2 - 1}{x} = 2\alpha \left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x \right) \Big|_1^2 \\ &= (3 - 2 \ln 2) \alpha \simeq 1.614 \alpha . \end{aligned} \quad \underline{6}$$

Die in der Abbildung VII.7b numerisch berechnete Periodenlänge für $\alpha = 10$ beträgt etwa 19, der asymptotische Bereich ist also noch nicht ganz erreicht.

22 Stabilität zeitabhängiger Bahnen

Hatten wir in Kap. 21.1 die Stabilität eines Gleichgewichtspunkts \vec{x}_0 betrachtet, indem wir das Verhalten der Trajektorien in seiner Nähe untersuchten, so interessieren wir uns nun für die Umgebung einer *zeitabhängigen* Referenztrajektorie $\vec{x}_r(t)$. Natürlich ist der frühere Fall eines stationären Fixpunkts $\vec{x}_r(t) = \vec{x}_0 = \text{const}$ mit eingeschlossen. Man kann wieder verschiedene Arten der Stabilität unterscheiden. *Stabilität im Sinne von Lyapunov* liegt vor, wenn ein Punkt auf einer benachbarten Trajektorie $\vec{x}(t)$ für alle Zeiten in der Nähe von $\vec{x}_r(t)$ bleibt. Die formale Umsetzung dieses Konzepts lautet:

Eine Bahn $\vec{x}_r(t)$ heißt *Lyapunov-stabil* wenn sich für jedes $\epsilon > 0$ ein Wert $\delta(\epsilon) > 0$ finden läßt, sodaß gilt:

Jede Lösung mit $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)| < \delta$ erfüllt für alle Zeiten $t > t_0$ die Bedingung $|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)| < \epsilon$.

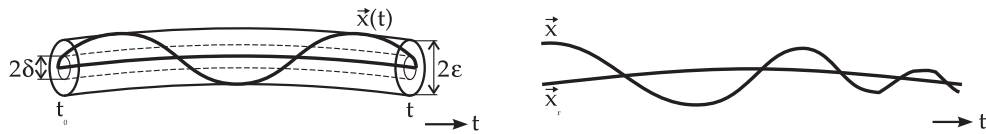


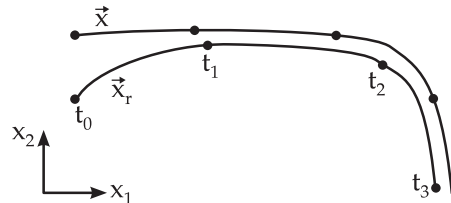
Abb. VII.9: (a) Die Nachbarbahnen $\vec{x}(t)$ einer Lyapunov-stabilen Bahn $\vec{x}_r(t)$ bleiben in deren Nähe. (b) Im Fall asymptotischer Stabilität werden Nachbarbahnen angezogen so daß der Abstand mit der Zeit gegen Null geht.

Figur VII.9(a) zeigt, daß sich die „gestörten“ Bahnen im Inneren einer $N+1$ -dimensionalen Röhre vom Radius ϵ um die Referenztrajektorie bewegen. Damit ist noch nicht gesagt, daß sich die Trajektorien mit der Zeit einander annähern. Wenn dies der Fall ist spricht man wie früher (siehe Gl. (21.31)) von asymptotischer Stabilität, siehe Figur VII.9(b).

Eine Bahn $\vec{x}_r(t)$ heißt *asymptotisch stabil* wenn sie Lyapunov-stabil ist und wenn für die Nachbartrajektorien zusätzlich gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)| = 0.$$

Abb. VII.10: Beispiel für eine Bahn die nicht asymptotisch stabil aber orbital stabil ist. Benachbarte Bahnen werden unterschiedlich schnell durchlaufen.



Interessanterweise gibt es für zeitabhängige Trajektorien $\vec{x}_r(t)$ noch einen weiteren Stabilitätsbegriff, der für stationäre Fixpunkte \vec{x}_0 nicht benötigt wurde. Es kann nämlich geschehen, daß die Form zweier Bahnen im Phasenraum zwar sehr ähnlich ist, daß diese aber unterschiedlich schnell durchlaufen werden, siehe Figur VII.10(c).

Dadurch kann sich eine Zeitverschiebung entwickeln, $|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)|$ wächst an und die bisherigen Stabilitätsdefinitionen greifen nicht. Man führt daher eine abgeschwächte Variante ein:

Eine Bahn $\vec{x}_r(t)$ heißt *orbital stabil* wenn sich für jedes $\epsilon > 0$ ein Wert $\delta(\epsilon) > 0$ finden läßt sodaß gilt:
 Jede Lösung mit $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)| < \delta$ liegt für alle Zeiten $t > t_0$ innerhalb einer Röhre vom Radius ϵ um die Bahn $\vec{x}_r(t)$.

Bei dieser Definition wird also der geometrische Ort $\vec{x}(t)$ betrachtet, die Zeit als Parameter dieser Kurve spielt hingegen keine Rolle.

22.1 Periodische Lösungen

Die Untersuchung der Stabilität zeitabhängiger Lösungen ist naturgemäß schwieriger als im Fall stationärer Fixpunkte. Wir wollen hier auf den wichtigen Spezialfall *periodischer Lösungen* eingehen. Dabei läßt sich ein Formalismus anwenden, der auf den französischen Mathematiker Floquet (1883) zurückgeht. Wir setzen also voraus, daß sich die Referenztrajektorie $\vec{x}_r(t)$ nach einer Periodendauer T wiederholt

$$\vec{x}_r(t + T) = \vec{x}_r(t) . \tag{1}$$

Dies kann auf zwei verschiedene Arten zustande kommen. Zum einen können in einem *autonomen System* von selbst Schwingungen auftreten, wie etwa beim harmonischen Oszillator. Hier ist die rechte Seite der Bewegungsgleichung nicht explizit von der Zeit abhängig, $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Andererseits gibt es auch *periodisch fremderregte Systeme* bei denen ein zeitabhängiger äußerer Antrieb wirksam ist dessen Periodizität $\vec{F}(\vec{x}, t + T) = \vec{F}(\vec{x}, t)$ sich in der Trajektorie niederschlägt. Ein Vorteil ist hier, daß die Periodendauer T von außen vorgegeben ist, während man die Schwingungsfrequenz eines autonomen Systems nicht von vornherein kennt und sie, außer in simplen Spezialfällen, durch numerische Lösung der Bewegungsgleichung ermitteln muß.

Zur Diskussion der Stabilität von $\vec{x}_r(t)$ untersucht man wie in Kap. 21.1, Gl. (23) Nachbartrajektorien

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_r(t) + \vec{\xi}(t) , \tag{2}$$

wobei die Abweichung $\vec{\xi}(t)$ als klein angenommen wird. Aus den Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}, t) \quad \text{und} \quad \dot{\vec{x}}_r(t) = \vec{F}(\vec{x}_r, t) \tag{3}$$

folgt

$$\dot{\vec{x}}_r + \dot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{x}_r + \vec{\xi}, t) = \vec{F}(\vec{x}_r, t) + \dot{\vec{\xi}} . \tag{4}$$

oder

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{x}_r + \vec{\xi}, t) - \vec{F}(\vec{x}_r, t) \equiv \vec{G}(\vec{\xi}, t) . \tag{5}$$

Diese Gleichung kann man *linearisieren* indem man die rechte Seite Taylor-entwickelt und höhere Terme vernachlässigt:

$$\dot{\vec{\xi}}(t) = \mathbf{M}(t) \vec{\xi}(t) \quad (6)$$

mit der Jacobimatrix (hier abstrakt geschrieben, ohne Angabe der Indizes)

$$\mathbf{M}(t) = \left. \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{\xi}} \right|_{\vec{\xi}=0} = \left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_r(t)} . \quad (7)$$

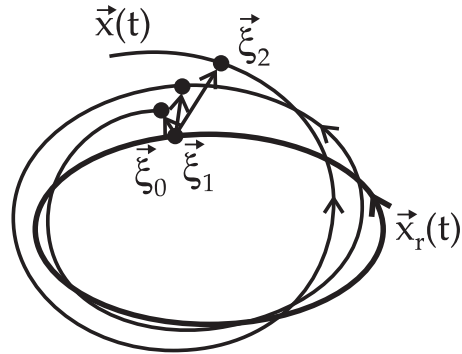
Gleichung (6) ist wie früher, Gl. (24) in Kap. 21, ein lineares System von Differentialgleichungen, jedoch ist nunmehr die Koeffizientenmatrix *periodisch zeitabhängig*, $\mathbf{M}(t+T) = \mathbf{M}(t)$, während sie früher konstant war. Diese Periodizität gilt auch für autonome Systeme: Wenn auch die Funktion $\vec{F}(\vec{x})$ die Zeit nicht explizit enthält, so induziert doch die Referenztrajektorie $\vec{x}_r(t)$ selbst eine periodische Zeitabhängigkeit.

22.2 Diskretisierung und Poincaré-Schnitte

Es gibt ein mathematisches Hilfsmittel, das bei der Stabilitätsanalyse zeitabhängiger Bahnen wie auch allgemein für das qualitative Verständnis dynamischer Systeme gute Dienste leistet. Die Grundidee besteht darin, eine *Diskretisierung der Zeitabhängigkeit* einer Trajektorie vorzunehmen. Dies kann auf zwei etwas unterschiedlichen Wegen erfolgen.

Eine naheliegende Möglichkeit ist die *stroboskopische Abbildung*. Anstelle der kontinuierlichen Funktion $\vec{x}(t)$ wird eine diskrete Folge von „Momentaufnahmen“ $\vec{x}_n = \vec{x}(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ betrachtet. Die zeitlichen Stützpunkte wählt man bei der stroboskopischen Methode äquidistant, also $t_n = t_0 + nT$ mit einem Abtastintervall T . Natürlich sollte man einen dem Problem angemessenen Wert von T wählen. Wirkt eine oszillierende Antriebskraft, dann wird man deren Periodenlänge für T verwenden. Besonders einfach wird die stroboskopische Abbildung, wenn die Trajektorie $\vec{x}(t)$ selbst *periodisch* ist und T mit der Periodenlänge übereinstimmt, denn dann sind natürlich alle \vec{x}_n identisch. Die stroboskopische Abbildung der Bahn besteht aus einem *einzigsten Punkt* $\vec{x}_n = \vec{x}_0$ im Phasenraum. Man beachte, daß die Lage des Punkts \vec{x}_0 natürlich vom gewählten Referenzzeitpunkt t_0 abhängt und dadurch beliebig auf dem Orbit verschoben werden kann.

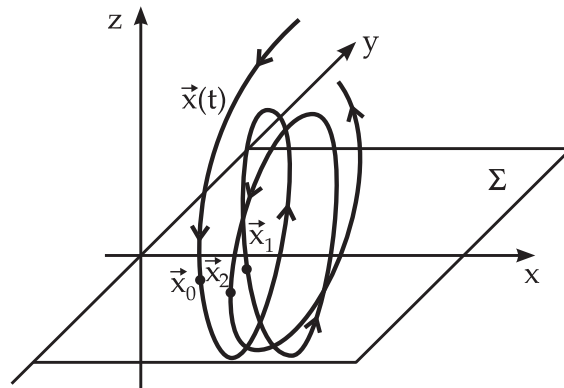
Abb. VII.11: Die stroboskopische Abtastung des Abstands $\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)$ gibt Auskunft über die Stabilität einer Bahn.



Für die Stabilitätsanalyse wird man, wie im letzten Abschnitt beschrieben, Nachbartrajektorien $\vec{x}(t)$ untersuchen, die im allgemeinen nicht mehr streng periodisch sind. Die dünne Linie in Abb. VII.11 zeigt ein solches Beispiel. Die ersten drei Stroboskopaufnahmen $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ sind durch Punkte markiert, außerdem sind die Abstandsvektoren $\vec{\xi}_n = \vec{x}_n - \vec{x}_{r0}$ eingetragen.

Eine alternative Methode der Diskretisierung von Trajektorien, die sich nicht an der Periodizität orientiert und insbesondere für autonome Systeme ohne feste Eigenfrequenz Vorteile aufweist, ist der *Poincaré-Schnitt*. Beim Übergang zur diskretisierten Folge \vec{x}_n wählt man wieder Momentaufnahmen des kontinuierlichen Orbits $\vec{x}(t)$. Als Kriterium dienen jetzt jedoch nicht fest vorgegebene äquidistante Zeitabstände sondern eine geometrische Eigenschaft des Orbits selbst, nämlich das *Durchstoßen einer vorgegebenen Hyperfläche* Σ . Man wählt also eine $N - 1$ -dimensionale Hyperfläche im Phasenraum und markiert alle Punkte x_n , an denen die Trajektorie die Hyperfläche schneidet. Dabei fordert man noch, daß Σ nicht nur berührt sondern echt durchstoßen wird. Mathematisch heißt das, daß die Fläche transversal zum dynamischen Fluß stehen soll, $\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x}) \neq 0$ überall auf Σ , wobei \vec{n} die Flächennormale ist. Man spricht daher auch von einem *Transversalschnitt*. Üblicherweise markiert man beim Transversalschnitt nur Punkte mit einem bestimmten Vorzeichen von $\vec{F} \cdot \vec{n}$, also Durchstoßungen von Σ , die in gleicher Richtung erfolgen.

Abb. VII.12: Die Durchstoßungspunkte einer Trajektorie durch eine vorgegebene Fläche bilden den Poincaré-Schnitt.



Dieses Verfahren zur Diskretisierung von Trajektorien wurde von Henri Poincaré eingeführt und wird als *Poincaré-Schnitt* bezeichnet. Abbildung VII.12 zeigt als

Beispiel eine Trajektorie in einem $N = 3$ -dimensionalen Raum, wobei als Schnittfläche Σ die $x-y$ -Ebene gewählt wurde. Drei Durchstoßungen in negativer z -Richtung sind als $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ markiert. Die Benutzung von Poincaré-Schnitten ist nur sinnvoll, wenn sich die Trajektorie großenteils oder gänzlich in einem beschränkten Bereich des Phasenraums bewegt, so daß die Schnittfläche immer wieder durchstoßen wird. Sehr viele Systeme mit annähernd periodischer oder auch chaotischer Bewegung erfüllen diese Bedingung. Beispiele für nichttriviale Poincaré-Schnitte werden wir in Kap. 25 sehen.

Ein Vorteil des Poincaré-Schnitts ist zunächst die *Reduktion der Dimension* des Phasenraums von N auf $N - 1$, was für die qualitative Diskussion sehr hilfreich sein kann. Für detaillierte Studien möchte man nicht nur Gesamtheit der Punkte \vec{x}_n kennen, sondern auch deren detaillierte Abfolge. Mathematisch wird dieser Zusammenhang durch eine Abbildung

$$P : \vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_{n+1} \quad \text{mit} \quad \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1} \in \Sigma \quad (8)$$

vermittelt. Diese *Poincaré-Abbildung* verknüpft also jeden Punkt der Folge $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ mit seinem Nachfolger. Man beachte, daß P keinen Index trägt. Es handelt sich um eine einzige Abbildung der Ebene Σ auf sich selbst, die gemäß (8) an einzelnen Punkten "abgetastet" wird. Die einzelnen Punkte des Poincaré-Schnitts entstehen durch sukzessive *Iteration der Poincaré-Abbildung*

$$\vec{x}_1 = P(\vec{x}_0) \quad , \quad \vec{x}_2 = P(\vec{x}_1) = P^2(\vec{x}_0) \quad , \dots \quad , \quad \vec{x}_n = P^n(\vec{x}_0) . \quad (9)$$

Das Langzeitverhalten einer Trajektorie läßt sich daher aus den Eigenschaften der iterierten Poincaré-Abbildung $P^n, n \rightarrow \infty$ erschließen. Wenn die Zeitentwicklung des dynamischen Systems durch eine Differentialgleichung $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t)$ bestimmt wird, dann ist die Poincaré-Abbildung *eindeutig* und auch *umkehrbar* (ggf. bis auf singuläre Punkte), da sich Trajektorien nicht schneiden dürfen.

Mit der Definition der Poincaré-Abbildung ist das Problem der Beschreibung eines dynamischen Systems natürlich noch nicht gelöst sondern nur verschoben, denn P muß auch explizit konstruiert werden. Dies ist in den allermeisten Fällen nicht analytisch möglich und man ist letztlich auf die numerische Integration der Differentialgleichung des Systems angewiesen. Dabei erweist es sich aber, daß die exakte Poincaré-Abbildung P häufig verblüffende Gemeinsamkeiten mit sehr einfach konstruierten analytischen diskreten Abbildungen aufweist. Als Beispiel dafür werden wir in Kap. 25 die „logistische Abbildung“ diskutieren.

Kehren wir zurück zur Frage nach der *Stabilität periodischer Bahnen*. Wie im letzten Abschnitt dargestellt, genügt es, die kleinen Abweichungen $\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)$ von der Referenztrajektorie in linearer Näherung zu betrachten. In dieser Näherung vereinfacht sich auch die Poincaré-Abbildung zu einer *linearen Abbildung*, also der Multiplikation mit einer Matrix \mathbf{C} :

$$\vec{\xi}_{n+1} = \mathbf{C}\vec{\xi}_n \quad \text{also} \quad \vec{\xi}_n = \mathbf{C}^n\vec{\xi}_0 . \quad (10)$$

Entscheidend für das Langzeitverhalten der Abweichung $\vec{\xi}(t)$ sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ der Matrix \mathbf{C} . Wenn alle Eigenwerte die Bedingung $|\lambda_i| < 1$ erfüllen, dann handelt es sich um eine kontrahierende Abbildung, und die Folge konvergiert gegen Null. In diesem Fall ist die periodische Lösung $\vec{x}_r(t)$ also asymptotisch stabil. Ist mindestens einer der Eigenwerte $|\lambda| > 1$, dann wachsen Störungen in Richtung des zugehörigen Eigenvektors an, und die Bahn ist instabil.

Im nachfolgenden Beispiel wird die mathematische Theorie der Stabilität periodischer Lösungen, die, wie schon erwähnt, von Floquet entwickelt wurde, etwas genauer vorgestellt.

22.1 Beispiel: Die Stabilitätstheorie von Floquet

Wie am Anfang dieses Kapitels beschrieben interessieren wir uns für das Langzeitverhalten der Bahnabweichungen $\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)$, die näherungsweise einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi}(t) = \mathbf{M}\vec{\xi}(t) \tag{1}$$

mit periodischer Koeffizientenmatrix $\mathbf{M}(t + T) = \mathbf{M}(t)$ genügen. Da es sich um ein lineares Problem handelt, kann man jede Lösung in ein Fundamentalsystem von linear unabhängigen Basislösungen $\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_N(t)$ entwickeln. Die Basislösungen sind nicht eindeutig bestimmt und wir wählen sie der Übersichtlichkeit halber so, daß sie zum Zeitpunkt $t = 0$ (wir könnten auch $t = t_0$ wählen) gerade mit den Einheitsvektoren im N -dimensionalen Raum übereinstimmen:

$$\vec{\phi}_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^T \quad \text{bis} \quad \vec{\phi}_N(0) = (0, 0, \dots, 1)^T, \tag{2}$$

wobei das Transpositionszeichen T andeutet, daß es sich um Spaltenvektoren handeln soll. Geometrisch liegen diese Vektoren also alle auf einer (Hyper-) Kugeloberfläche vom Radius eins. Die Superposition einer allgemeinen Lösung $\vec{\xi}(t)$ lautet

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \vec{\phi}_i(t) \tag{3}$$

was sich auch in Matrixform schreiben läßt:

$$\vec{\xi}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\vec{c}. \tag{4}$$

Dabei ist \vec{c} ein Spaltenvektor, der aus den Entwicklungskoeffizienten gebildet wird, und $\mathbf{\Phi}$ eine $N \times N$ -Matrix die in jeder Spalte einen der Basisvektoren enthält

$$\mathbf{\Phi}(t) = [\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)] \quad \text{und} \quad \vec{c} = (c_1, \dots, c_N)^T. \tag{5}$$

Wegen 2 erfüllt die Matrix $\mathbf{\Phi}$ die Anfangsbedingung

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}. \tag{6}$$

Wie schlägt sich nun die Periodizität der Differentialgleichung 1 in der Matrix $\mathbf{\Phi}$ nieder? Dazu muß man sich klarmachen, daß jede Lösung $\vec{\xi}$ von 1 zum Zeitpunkt $t + T$ dieselbe Differentialgleichung wie zum Zeitpunkt t erfüllt. Das heißt natürlich nicht, daß die Lösung

periodisch wäre, im allgemeinen wird $\vec{\xi}(t+T) \neq \vec{\xi}(t)$ sein. Sie kann aber sowohl nach den Basislösungen $\vec{\phi}_i(t+T)$ wie auch $\vec{\phi}_i(t)$ entwickelt werden

$$\vec{\xi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t+T)\vec{c} \quad \text{und auch} \quad \vec{\xi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t)\vec{c}' . \quad \underline{7}$$

Dies impliziert einen linearen Zusammenhang

$$\mathbf{\Phi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} . \quad \underline{8}$$

Die konstante $N \times N$ -Matrix \mathbf{C} wird *Monodromiematrix* genannt. Sie ist es, die darüber bestimmt, wie sich die Lösungen von einer Periode zur nächsten entwickeln. Unter Benutzung der Anfangsbedingung 6 liest man aus 8 sofort den Wert der Monodromiematrix ab:

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}(T) . \quad \underline{9}$$

Die Monodromiematrix läßt sich also berechnen, indem man N mal die Differentialgleichung 1 mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen über eine Periode von 0 bis T aufintegriert und die resultierenden Lösungsvektoren $\phi_i(T)$ in die Spalten einträgt. Die Entwicklung der Matrix $\mathbf{\Phi}(t)$ für beliebig große Zeiten erhält man einfach durch Iteration von 8. Insbesondere gilt für volle Perioden

$$\mathbf{\Phi}(2T) = \mathbf{\Phi}(T)\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{C}\mathbf{C} = \mathbf{C}^2 \quad \underline{10}$$

und allgemein

$$\mathbf{\Phi}(nT) = \mathbf{\Phi}^n(T) = \mathbf{C}^n . \quad \underline{11}$$

Gemäß 4 und 11 wird also die Entwicklung der Lösungen $\vec{\xi}(t)$ für große Zeiten durch die Potenzen der Monodromiematrix \mathbf{C} bestimmt. Was dabei geschieht, kann man an den N *Eigenwerten* λ_i dieser Matrix ablesen, die als charakteristische Multiplikatoren oder auch als *Floquet-Multiplikatoren* bezeichnet werden

$$\mathbf{\Phi}(T)\vec{u}_i = \lambda_i(T)\vec{u}_i . \quad \underline{12}$$

Ist \vec{u}_i ein Eigenvektor der Matrix $\mathbf{\Phi}(T)$ so behält er diese Eigenschaft auch für die iterierte Abbildung, z.B.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(2T)\vec{u}_i &= \mathbf{\Phi}(T)\mathbf{\Phi}(T)\vec{u}_i = \mathbf{\Phi}\lambda_i(T)\vec{u}_i = \lambda_i^2(T)\vec{u}_i \\ &= \lambda_i(2T)\vec{u}_i \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad \underline{13}$$

Dies führt auf folgende Funktionalgleichung für die Eigenwerte der iterierten Abbildung

$$\lambda_i(nT) = \lambda_i^n(T) . \quad \underline{14}$$

Dieses Verhalten ist charakteristisch für die Exponentialfunktion, d.h. Gl. 14 wird gelöst durch

$$\lambda_i(T) = e^{\sigma_i T} \quad \underline{15}$$

mit einer (im allgemeinen komplexen) Konstanten σ_i die als *Floquet-Exponent* bezeichnet wird. Wir bemerken noch, daß auch 11 als Funktionalgleichung wie 14 betrachtet werden kann, mit der gleichen Art Lösung

$$\mathbf{\Phi}(T) = e^{\mathbf{S}T} . \quad \underline{16}$$

Hier steht jetzt eine Matrix \mathbf{S} im Argument der Exponentialfunktion und der resultierende Funktionswert ist auch wieder eine Matrix. Mathematisch ist eine derartige Matrixfunktion einfach über ihre Potenzreihenentwicklung definiert. Man kann zeigen, daß die Eigenwerte der durch 16 eingeführten Matrix \mathbf{S} gerade die Floquet-Exponenten σ_i aus 15 sind. Interessiert man sich für die Entwicklungsmatrix zu beliebige Zeiten (nicht nur Vielfache der Periode T), dann muß 16 noch verallgemeinert werden:

$$\Phi(t) = \mathbf{U}(t)e^{\mathbf{S}t} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{I} . \quad \underline{17}$$

Die Matrix $\mathbf{U}(t)$ kann eine komplizierte Zeitabhängigkeit aufweisen, muß aber periodisch sein. Wegen 8 gilt nämlich

$$\mathbf{U}(t+T)e^{\mathbf{S}(t+T)} = \Phi(t)\Phi(T) = \mathbf{U}(t)e^{\mathbf{S}t}e^{\mathbf{S}T} . \quad \underline{18}$$

Das Produkt der Exponentialfunktionen auf der rechten Seite kann kombiniert werden zu $\exp \mathbf{S}t \exp \mathbf{S}T = \exp \mathbf{S}(t+T)$ (für nichtkommutierende Matrizen im Exponenten wäre dies im allgemeinen nicht richtig) und wir finden

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t) . \quad \underline{19}$$

Für das Langzeitverhalten der Lösungen $\vec{\xi}(t)$ spielt \mathbf{U} demnach keine Rolle. Dieses wird allein durch die Größe der Floquet-Multiplikatoren λ_i bestimmt. Beginnt man mit einem Eigenvektor $\vec{\xi}(0) = \vec{u}_i$ so wird diese Lösung gemäß 14 wie $\vec{\xi}(nT) = \vec{u}_i \exp(\sigma_i nT)$ anwachsen. Daraus schließen wir:

Die Trajektorie $\vec{x}_r(t)$ ist *asymptotisch stabil* wenn für alle Floquet-Multiplikatoren gilt $|\lambda_i| < 1$ d.h. $\text{Re } \sigma_i < 0$.

Sie ist *instabil* wenn für mindestens einen Eigenwert gilt $|\lambda_i| > 1$ d.h. $\text{Re } \sigma_i > 0$.

Diese Aussagen, die durch Linearisierung der Bewegungsgleichung gewonnen wurden, übertragen sich auch auf das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems. Der Grenzfall marginaler Stabilität $|\lambda_i| = 1$ läßt sich nur durch zusätzliche Untersuchungen klären.

Wenn ein *autonomes* periodisch schwingendes System vorliegt, tritt eine Besonderheit auf: Einer der Eigenwerte hat in diesem Fall immer den Werte $\lambda = 1$ und braucht bei der Stabilitätsanalyse nicht berücksichtigt zu werden. Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die Funktion $\vec{x}_r(t)$. Die in Frage stehende Mode ist nämlich die Bewegung *tangential* zur Referenzbahn. Im Fall eines autonomen Systems findet man durch Differenzieren der nichtlinearen Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{x}}_r(t) = \vec{F}(\vec{x}_r) \quad \longrightarrow \quad \ddot{\vec{x}}_r(t) = \left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_r} \dot{\vec{x}}_r = \mathbf{M}(t)\dot{\vec{x}}_r , \quad \underline{20}$$

was mit der linearisierten Bewegungsgleichung 6 übereinstimmt. Wir wissen, daß die Zeitentwicklung der Lösungen dieser Differentialgleichung durch die Matrix $\Phi(t)$ bestimmt wird, also

$$\dot{\vec{x}}_r(t) = \Phi(t)\dot{\vec{x}}_r(0) . \quad \underline{21}$$

Die Referenzbahn $\vec{x}_r(t)$ und damit auch deren Ableitung $\dot{\vec{x}}_r(t)$ sind aber (im Gegensatz zu allgemeinen Störungen $\vec{\xi}(t)$) periodisch, also

$$\dot{\vec{x}}_r(T) = \Phi(T)\dot{\vec{x}}_r(0) = \dot{\vec{x}}_r(0) , \quad \underline{22}$$

was beweist, daß die Monodromiematrix einen Eigenvektor, nämlich $\dot{\vec{x}}_r(0)$, mit dem Eigenwert $\lambda = 1$ aufweist. Anschaulich ist das ganz klar: Eine in tangentialer Richtung verschobene Vergleichsbahn entspricht einfach einer Verschiebung der Zeitkoordinate $t \rightarrow t + \delta t$. Da der Absolutwert der Zeit bei autonomen Systemen keine Rolle spielt, laufen $\vec{x}_r(t)$ und $\vec{x}(t) = \vec{x}_r(t + \delta t)$ immer in unverändertem Abstand hintereinander her. Also muß der zugehörige Floquet-Multiplikator den Wert eins haben.

22.2 Aufgabe: Stabilität eines Grenzzykus

Ein nichtlineares System werde durch folgende Bewegungsgleichungen beschrieben

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\rho - (x^2 + y^2)), \\ \dot{y} &= x + y(\rho - (x^2 + y^2)). \end{aligned} \quad \underline{1}$$

Untersuchen Sie die stabilen Lösungen und bestimme die Floquet-Multiplikatoren des Grenzzykus.

Lösung: Es existiert ein stationärer *Fixpunkt* bei $\vec{x}_0 = (0, 0)^T$. Über dessen Stabilität entscheidet die Jacobimatrix (7)

$$\mathbf{M}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \rho - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \rho - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix} \quad \underline{2}$$

die am Fixpunkt \vec{x}_0 die Form

$$\mathbf{M}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix} \quad \underline{3}$$

annimmt. Die beiden Eigenwerte sind nach Beispiel 21.1

$$\mu_{1/2} = s \pm \sqrt{s^2 - d} = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + 1)} = \rho \pm i. \quad \underline{4}$$

Es handelt sich also für $\rho < 0$ um einen stabilen und für $\rho > 0$ um einen instabilen Strudel; $\rho = 0$ bildet den Spezialfall eines Wirbels.

Durch Inspektion von 1 findet man für $\rho > 0$ sofort eine periodische Lösung, da sich das System für konstantes $x^2 + y^2 = \rho$ auf einen harmonischen Oszillator reduziert:

$$\vec{x}_r(t) = (\sqrt{\rho} \cos t, \sqrt{\rho} \sin t)^T. \quad \underline{5}$$

Die Jacobimatrix 2, ausgewertet am Grenzzyklus 5, lautet

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(\vec{x}_r) = \begin{pmatrix} -2\rho \cos^2 t & -1 - 2\rho \sin t \cos t \\ 1 - 2\rho \sin t \cos t & -2\rho \sin^2 t \end{pmatrix} \quad \underline{6}$$

Für das linearisierte Gleichungssystem 1 mit dieser Matrix $M(t)$ lassen sich die normierten Fundamentallösungen 2 aus Beisp. 22.1 explizit angeben. Man findet

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{-2\rho t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad \underline{7}$$

Zusammenfassung dieser Vektoren zur Matrix $\Phi(t)$ und Auswertung bei $T = 2\pi$ führt auf die Monodromiematrix

$$C = \Phi(T) = \begin{pmatrix} e^{-4\pi\rho} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \underline{8}$$

Also sind die Basislösungen 7 auch schon Eigenvektoren der Monodromiematrix, mit den Eigenvektoren

$$\lambda_1 = e^{-4\pi\rho} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1. \quad \underline{9}$$

Wie erwartet hat einer der Floquet-Multiplikatoren den Wert eins (die zugehörige Eigenlösung $\vec{\phi}_2(t)$ ist tangential zu $\vec{x}_r(t)$). Der Werte λ_1 entscheidet über die Stabilität des Grenzzyklus: Er ist asymptotisch stabil, denn $\lambda_1 < 1$ für $\rho > 0$. Im Fall $\rho < 0$ gibt es keinen Grenzzyklus.

Das nichtlineare System 1 ist so einfach, daß es auch eine geschlossene analytische Lösung erlaubt. Dazu gehen wir zu Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ über. Die Differentialgleichungen 1 führen auf das entkoppelte System

$$\dot{r} = r(\rho - r^2) \quad , \quad \dot{\varphi} = 0. \quad \underline{10}$$

Der Winkel wächst also einfach linear mit der Zeit an, $\varphi(t) = t + \varphi_0$. Die Radialgleichung kann wie folgt integriert werden:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r(\rho - r^2)} = \int_0^t dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2\rho} \ln \frac{r^2}{\rho - r^2} \Big|_{r_0}^r = t \quad \underline{11}$$

oder nach r aufgelöst

$$r(t) = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{r_0^2} - 1\right)e^{-2\rho t} + 1}}. \quad \underline{12}$$

Für $\rho > 0$ geht die Lösung also asymptotisch gegen den Grenzzyklus $r(t) \rightarrow \sqrt{\rho}$. Im Fall $\rho < 0$,

$$r(t) = \frac{\sqrt{|\rho|}}{\sqrt{\left(\frac{|\rho|}{r_0^2} + 1\right)e^{2|\rho|t} - 1}}, \quad \underline{13}$$

spiralisiert jede Trajektorie asymptotisch zum stabilen Fixpunkt $r_0 = 0$.

23 Bifurkationen

Das Verhalten dynamischer Systeme wird in der Regel durch den Wert eines oder mehrerer Kontrollparameter μ beeinflusst. Dabei kann es sich um die Stärke einer Wechselwirkung, die Größe der Reibung, um Amplitude und Frequenz einer periodischen Störung oder um vieles mehr handeln. Häufig beobachtet man dann, daß sich beim Überschreiten eines kritischen Werts $\mu > \mu_c$ das Langzeitverhalten der Trajektorien qualitativ ändert. Zum Beispiel können statt einer stabilen Gleichgewichtslage plötzlich deren zwei auftreten, oder ein vorher in Ruhe befindliches System kann anfangen zu oszillieren. Das Phänomen neu auftretender oder plötzlich ihren Charakter ändernder Lösungen nennt man *Verzweigung* oder *Bifurkation*, der Wert μ_c heißt *Verzweigungswert*.

Die allgemeine Theorie der Bifurkationen ist schwierig und zum Teil noch nicht vollständig mathematisch erschlossen. Wir wollen uns hier auf einfach zu behandelnde aber wichtige Fälle beschränken. Das heißt zunächst, daß wir nur *lokale* Bifurkationen betrachten, bei denen sich das Verhalten des Systems in der Umgebung einer Gleichgewichtslösung verändert. Es gibt auch *globale* Bifurkationen; hier wird die topologische Struktur der Lösungen „im Großen“ modifiziert, z.B. die Gestalt der Einzugsbereiche von Attraktoren. Weiterhin betrachten wir nur den *eindimensionalen* Fall, das heißt die Bifurkation soll bei Variation eines einzelnen Kontrollparameters auftreten. (Der Phasenraum des dynamischen Systems hingegen darf mehrdimensional sein.) Auch unter diesen einschränkenden Bedingungen sind noch eine Reihe verschiedenartiger Bifurkationen möglich. Diese sollen im folgenden klassifiziert und anhand von einfachen Beispielen illustriert werden.

23.1 Statische Bifurkationen

Zunächst konzentrieren wir uns auf die Stabilität von stationären Fixpunkten \vec{x}_0 , gekennzeichnet durch

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}_0, \mu) = 0. \quad (1)$$

Dies kann man als eine implizite Gleichung für die Lage des Fixpunkts in Abhängigkeit vom Parameter μ interpretieren, $\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\mu)$. Voraussetzung für die Existenz und Stetigkeit dieser Funktion ist nach dem Satz über implizite Funktionen aus der Analysis eine nichtsinguläre Jacobimatrix $\mathbf{M} = \partial \vec{F} / \partial \vec{x} \Big|_{\vec{x}_0}$. Unstetiges Verhalten, also Bifurkationen, kann man daher erwarten, wenn die Determinante von \mathbf{M} verschwindet, das heißt wenn einer der Eigenwerte dieser Matrix in Abhängigkeit von μ den Wert Null annimmt. Die Bedeutung der Eigenwerte der Jacobimatrix für die Stabilität haben wir bereits in Kap. 22 kennengelernt.

Betrachten wir nun die typischen Fälle in der einfachst möglichen Form, nämlich für ein eindimensionales System. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird der Fixpunkt auf $x_0 = 0$ gelegt und auch der Verzweigungswert soll $\mu_c = 0$ sein. Durch

geeignete Koordinatentransformationen läßt sich dies immer erreichen. Auch ist es möglich, die eindimensionale Bifurkation in einen höherdimensionalen Raum einzubetten.

a) Die Sattelknoten-Verzweigung

Sie tritt auf bei dem dynamischen System

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu - x^2 . \tag{2}$$

Diese System hat Fixpunkte bei

$$x_{01} = +\sqrt{\mu} \quad , \quad x_{02} = -\sqrt{\mu} . \tag{3}$$

Da x aber reell sein soll, gibt es für negative μ keinen Fixpunkt. Durchläuft μ den kritischen Wert $\mu_c = 0$ dann springt die Zahl der Fixpunkte von 0 auf 2. Der untere Fixpunkt ist jedoch *instabil* wie man der linearen Stabilitätsanalyse gemäß Kap. 21 entnimmt. Der Eigenwert γ der Jacobi-„Matrix“

$$M = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} = -2x_0 \quad \text{also} \quad \gamma = -2x_0 \tag{4}$$

ist nämlich für die Lösung $x_{02} = -\sqrt{\mu}$ positiv. Abb. VII.13 zeigt die beiden stabilen (durchgezogen) und instabilen (gestrichelt) Fixpunkte als Funktion des Kontrollparameters μ . Die Pfeile zeigen die Bewegungsrichtung an, die man sofort aus (2) abliest. Man kann sagen, daß am kritischen Punkt eine stabile und eine instabile Lösung zusammentreffen und sich vernichten.

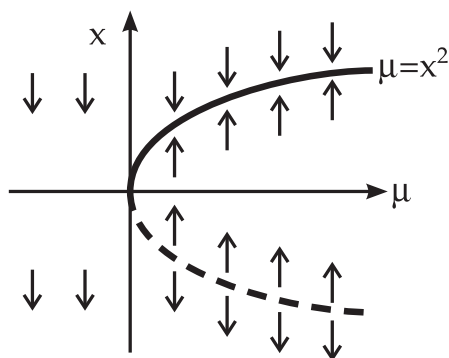


Abb. VII.13: Stabile (durchgezogen) und instabile (gestrichelt) Fixpunkte bei der Sattelknoten-Verzweigung.

Zu klären ist noch der Ursprung des Namens Sattelknoten-Verzweigung. Dazu bettet man die Verzweigung in einen zweidimensionalen Raum ein, was zum Beispiel durch

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 , \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{5}$$

geschehen kann. Die Variablen x und y sind entkoppelt und die Lösungen $y(t)$ streben asymptotisch gegen Null. Die Fixpunkte sind $\vec{x}_{01} = (+\sqrt{\mu}, 0)$ und $\vec{x}_{02} =$

$(-\sqrt{\mu}, 0)$. Die Jacobimatrix hat die Form

$$M = \left(\begin{array}{cc} \partial F_1 / \partial x & \partial F_1 / \partial y \\ \partial F_2 / \partial x & \partial F_2 / \partial y \end{array} \right) \Big|_{\vec{x}_0} = \left(\begin{array}{cc} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \Big|_{\vec{x}_0} \quad (6)$$

und ist natürlich diagonal, mit den Eigenwerten $\gamma_1 = -2x_0$, $\gamma_2 = -1$. Die beiden Eigenwerte für die Lösung \vec{x}_{02} sind $2\sqrt{\mu}$ und -1 , haben also unterschiedliche Vorzeichen, was nach der Nomenklatur aus Beispiel 21.1 einem *Sattelpunkt* entspricht. Für $x_0 = +\sqrt{\mu}$ sind beide Eigenwerte negativ und es liegt ein *stabiler Knoten* vor. Sattel und Knoten verschmelzen am kritischen Punkt. Die unterschiedlichen dynamischen Flüsse bei $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$ sind in Abb. VII.14 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß nach Verschmelzen von Sattel und Knoten kein Fixpunkt mehr besteht und der Fluß ins Unendliche läuft (linkes Bild).

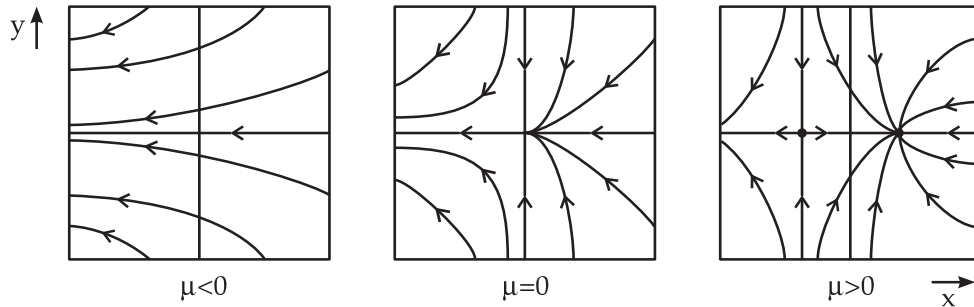


Abb. VII.14: Der dynamische Fluß bei einer Sattelnoden-Verzweigung, eingebettet im zweidimensionalen Raum.

b) Die Heugabel-Verzweigung Das einfachste Beispiel dieser Art Verzweigung entsteht, wenn man für $F(x, \mu)$ ein kubisches Polynom verwendet:

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^3 . \quad (7)$$

Da dieses Polynom aus (2) durch Multiplikation mit dem Faktor x hervorgeht, kommt zu den bisherigen Fixpunkten einfach noch Null als Lösung hinzu

$$x_{01} = +\sqrt{\mu} \quad , \quad x_{02} = -\sqrt{\mu} \quad , \quad x_{03} = 0 . \quad (8)$$

Am kritischen Punkt $\mu_c = 0$ springt die Zahl der Fixpunkte daher von 1 auf 3, wobei sich von den letzteren Lösungen eine als instabil erweist. Die Jacobimatrix

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x_0} = \mu - 3x_0^2 \quad (9)$$

hat für die drei Fixpunkte die Eigenwerte

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -2\mu \quad , \quad \gamma_3 = \mu . \quad (10)$$

Also ist unterhalb von μ_c die Lösung x_{03} stabil, verliert diese Eigenschaft aber am kritischen Punkt an die beiden Zweige x_{01} und x_{02} der „Gabel“, wie in Abb. VII.15 dargestellt. Verglichen mit Abb. VII.13 haben sich die Pfeile, also die Flußrichtung, in der unteren Halbebene $x < 0$ umgekehrt. Das ist offensichtlich, weil $F(x, \mu)$ den zusätzlichen Faktor x enthält.

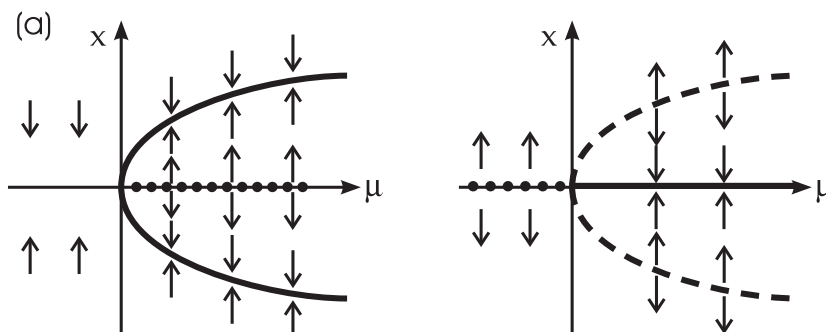


Abb. VII.15: Stabile (durchgezogen) und instabile (gestrichelt) Fixpunkte bei der Heugabel-Verzweigung. Links eine superkritische und rechts eine subkritische Verzweigung.

Die Heugabel-Bifurkation kann noch in einer zweiten Variante auftreten, bei der die Stabilitätseigenschaften genau vertauscht sind. Ein Beispiel dafür ist

$$\dot{x} = F(x, \mu) = -\mu x + x^3, \quad (11)$$

was sich von (7) durch das Vorzeichen unterscheidet. Da sich die Flußrichtung und die Vorzeichen der Eigenwerte umkehren, ändert sich das Verzweigungsbild wie in Abb. VII.15(b) dargestellt. Es gibt in diesem Fall nur noch einen einzigen stabilen Zweig. Man bezeichnet die Heugabel-Bifurkation aus Abb. VII.15(a) als *superkritisch* und jene aus Abb. VII.15(b) als *subkritisch*. Die beiden verbleibenden Vorzeichenkombinationen des linearen und kubischen Terms in $F(x, \mu)$ bringen nichts qualitativ Neues, sie entsprechen der Spiegelung $\mu \rightarrow -\mu$.

c) Die transkritische Verzweigung

In diesem Fall betrachten wir ein Polynom mit linearem und quadratischen Term

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^2 \quad (12)$$

mit den Fixpunkten.

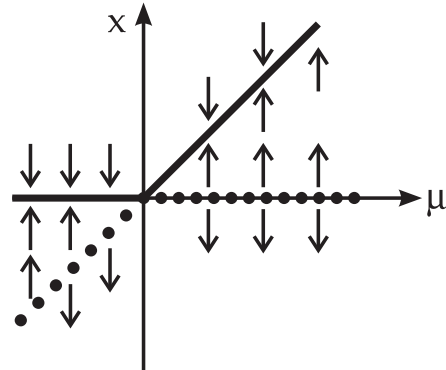
$$x_{01} = \mu \quad , \quad x_{02} = 0 \quad . \quad (13)$$

Also liegen im gesamten Parameterraum immer zwei Fixpunkte vor. Die Eigenwerte der Stabilitätsmatrix sind

$$\gamma_1 = -\mu \quad , \quad \gamma_2 = \mu \quad . \quad (14)$$

Jeweils eine der Lösungen ist stabil, die andere instabil. Am Verzweigungspunkt vertauschen die beiden Lösungen ihre Rolle, siehe Abb. VII.16.

Abb. VII.16: Stabile (durchgezogen) und instabile (gestrichelt) Fixpunkte bei der transkritischen Verzweigung.



d) Die Hopfsche Verzweigung

Die bisher betrachteten Verzweigungen waren dadurch gekennzeichnet, daß ein *reeller Eigenwert* der Jacobimatrix bei Variation des Kontrollparameters den Wert Null annimmt. Verzweigungen sind aber auch bei *komplexen Eigenwerten* möglich. Da die Eigenwerte immer in Form zueinander komplex konjugierter Paare auftreten, muß das System mindestens die Dimension 2 besitzen. Als Beispiel betrachten wir das Gleichungssystem

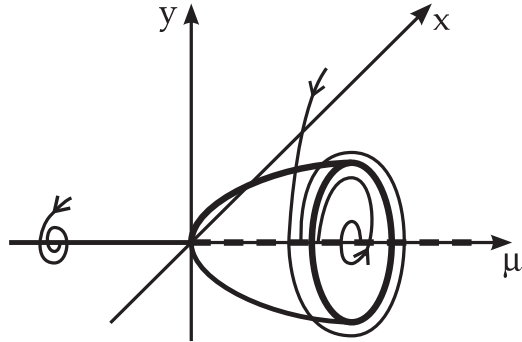
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \quad , \\ \dot{y} &= x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

Dieses System wurde schon in Aufgabe 22.2 in Zusammenhang mit der Stabilität von Grenzzyklen betrachtet. Für alle Werte von μ ist der Ursprung ein Fixpunkt, $\vec{x}_0 = (0, 0)$. Die Jacobimatrix hat an dieser Stelle den Wert

$$\mathbf{M}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \quad (16)$$

mit den Eigenwerten $\gamma_1 = \mu + i$, $\gamma_2 = \mu - i$. Das bedeutet, daß der Fixpunkt für $\mu < 0$ ein stabiler und für $\mu > 0$ ein instabiler Strudel ist. Das Schicksal der stabilen Lösung am kritischen Punkt ist anders als in den bisher betrachteten Fällen. Aus dem stationären Attraktor \vec{x}_0 entwickelt sich nämlich für $\mu > 0$ eine periodisch oszillierende Lösung $\vec{x}_r(t) = (\sqrt{\mu} \cos t, \sqrt{\mu} \sin t)$ die sich als ein stabiler Grenzzyklus erweist.

Abb. VII.17: Bei der Hopfschen Verzweigung wandelt sich ein Fixpunkt in einen Grenzzyklus.



Wie Abb. VII.17 zeigt, hat das Bifurkationsdiagramm Ähnlichkeiten mit der Heugabel-Verzweigung, Abb. VII.15. Tatsächlich läßt sich das Gleichungssystem (15) entkoppeln, indem man zu Polarkoordinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ übergeht. Die Bewegungsgleichung für den Radius $r(t)$ stimmt dann genau mit (7) überein, siehe Gl. 10 in Aufgabe 22.2. Der neue Zustand ist aber nur in einem „mitrotierenden“ Koordinatensystem zeitunabhängig, denn der Phasenwinkel wächst linear, $\phi(t) = t$. Im ursprünglichen Phasenraum ändert sich daher das Verhalten des Attraktors qualitativ: Aus einer *statischen* wird eine *dynamische* Lösung. Derartige Verzweigungen wurden erstmals 1942 von dem Mathematiker Eberhard Hopf* systematisch untersucht.[†]

Wie bei der Heugabel-Verzweigung gibt es auch die Hopf-Verzweigung in zwei Varianten. Zusätzlich zu dem hier dargestellten *superkritischen* Fall gibt es auch eine *subkritische Hopf-Bifurkation* mit umgekehrten Stabilitätseigenschaften. In der Praxis ist diese Variante dadurch weniger interessant, daß kein stabiler Grenzzyklus als Attraktor entsteht.

Man könnte die in a) bis d) vorgestellten Verzweigungen für besonders einfach gewählte spezielle Beispiele halten. Unter recht allgemeinen Voraussetzungen ist jedoch gezeigt worden, daß der Stabilitätswechsel (gekennzeichnet durch den Nulldurchgang von Eigenwerten der Jacobi-Matrix) bei Variation eines einzelnen Kontrollparameters immer nach einem dieser vier Szenarien erfolgt. Auf die genaue-

*Eberhard Friedrich Ferdinand Hopf, geb. 17.4.1902 in Salzburg, gest. 24.7.1983 in Bloomington, Indiana. H. studierte Mathematik in Berlin und lehrte am MIT (1932-36), an den Universitäten von Leipzig (1936-44) und München (1944-48) sowie an der Indiana University, Bloomington (seit 1948). Hauptarbeitsgebiete: Differential- und Integralgleichungen, Variationsrechnung, Ergodentheorie, Himmelsmechanik.

[†]E. Hopf, *Abh. der Sächs. Akad. der Wiss., Math. Naturwiss. Klasse* **94**, 1 (1942)

re mathematische Begründung können wir hier nicht eingehen und verweisen zur Einführung z.B. auf J. Argyris, G. Faust, M. Haase: *Die Erforschung des Chaos*, Vieweg, 1995, Kapitel 6.

23.2 Bifurkationen zeitabhängiger Lösungen

Auch bei periodischen Trajektorien kann es geschehen, daß sich ihr Charakter bei Variation eines Parameters μ sprunghaft ändert. Wir wollen die Bifurkationstheorie periodischer Lösungen hier nur kurz streifen und einige interessante Aspekte anschaulich erläutern. Mathematisches Hilfsmittel ist dabei die in Kap. 22 eingeführte Poincaré-Abbildung. Eine periodische Bahn $\vec{x}_r(t)$ wird durch einen festen Punkt \vec{x}_{r0} im Poincaré-Schnitt gekennzeichnet. Die Diskretisierung der Nachbarbahn $\vec{x}(t)$ besteht aus einer Folge von Punkten $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$. Für den Abstand der beiden Orbits gilt gemäß Gl. (10) in Kap. 22

$$\vec{x}_n - \vec{x}_{r0} = \mathbf{C}^n(\vec{x}_0 - \vec{x}_{r0}), \tag{17}$$

wobei die Matrix \mathbf{C} die linearisierte Näherung der Poincaré-Abbildung P darstellt. Solange alle Eigenwerte λ_i von \mathbf{C} innerhalb des komplexen Einheitskreises liegen, $|\lambda_i| < 1$, werden die benachbarten Bahnen angezogen und die Lösung $\vec{x}_r(t)$ ist ein *stabiler Grenzzyklus*.

Die Annäherung $\vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_{r0}$ kann auf verschiedene Weise geschehen, wie wir für einen ausgewählten Eigenwert, etwa λ_1 , illustrieren. Ist der Eigenwert reell und positiv, $0 < \lambda_1 < 1$, dann nähern sich die \vec{x}_n dem Fixpunkt \vec{x}_{r0} monoton an, wie Abb. VII.18(a) zeigt. Die Achse in diesem Bild entspricht der Richtung des zu λ_1 gehörigen Eigenvektors von \mathbf{C} . Ist der Eigenwert reell und negativ, $-1 < \lambda_1 < 0$, so bilden die \vec{x}_n eine alternierende Folge, siehe Abb. (b). Im Fall eines Paares komplexer Eigenwerte schließlich, $\lambda_1 = \lambda_2^*$, $|\lambda_1| < 1$, liegen die \vec{x}_n auf einer gegen \vec{x}_{r0} konvergierenden Spirale, siehe (c).

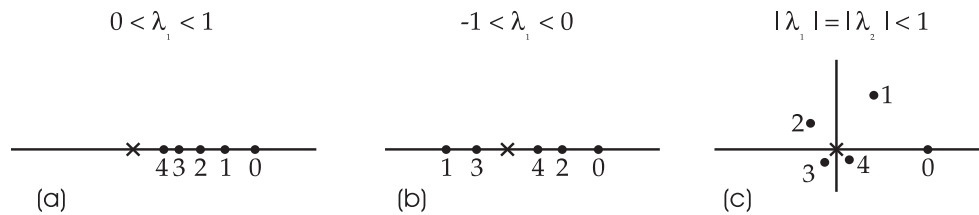


Abb. VII.18: Verschiedene Arten der Annäherung an einen Fixpunkt.

Verzweigungen treten auf, wenn bei einem kritischen Wert des Kontrollparameters μ_c ein Eigenwert λ den Einheitskreis verläßt. Wir unterscheiden dabei drei mögliche Fälle.

a) $\lambda_1 = +1$

Gemäß (17) ändert sich in diesem Fall der Abstand einer Nachbartrajektorie von der Referenztrajektorie nicht (Eine Abweichung in Richtung des Eigenvektors ξ_1 der Matrix \mathbf{C} wird ja bei jedem Umlauf mit $\lambda_1 = 1$ multipliziert.) Dies deutet darauf hin, daß für $\mu > \mu_c$ neue Grenzzyklen entstehen können, die die gleiche Periodenlänge T wie die Referenzbahn \vec{x}_r aufweisen. Ähnlich wie bei der Bifurkation eines stabilen Fixpunkts kann auch eine periodische Lösung eine Heugabel-Bifurkation durchmachen und sich in zwei getrennte Lösungen aufspalten. Dies ist in Abb. VII.19(a) skizziert. Auch die anderen Bifurkations aus dem letzten Abschnitt sind möglich. Welcher der Fälle vorliegt, kann man aus dem Kriterium $\lambda_1 = +1$ allein nicht ablesen.

b) $|\lambda_1| = |\lambda_2^*| = 1$

Auch hier bleibt die Folge der Punkte \vec{x}_n der Poincaré-Abbildung in konstantem Abstand von \vec{x}_{r0} , dreht sich nun aber auf einem Kreis. Im Poincaré-Schnitt selbst bildet sich dabei ein Grenzzyklus aus. Geometrisch bedeutet dies, daß sich die Topologie der periodischen Bahn ändert: Sie liegt nun auf einem *Torus* der die ursprüngliche geschlossene Bahn umhüllt, wie in Abb. VII.19(b) gezeigt. Sind die beiden Umlauffrequenzen auf dem Torusmantel inkommensurabel, d.h. bilden sie kein rationales Verhältnis $p/q, p, q \in \mathbb{N}$, dann spricht man von einer *quasiperiodischen Bewegung*, da sich die Bahn auch für beliebig große Zeiten niemals schließt. Sie kommt dabei jedem Punkt auf der Torusoberfläche beliebig nahe.

c) $\lambda_1 = -1$

Dieser Fall ist besonders interessant, da der Abstand der Punkte \vec{x}_n konstant bleibt, die Richtung jedoch alterniert. Dies bedeutet, daß die Nachbarbahn \vec{x} nach jedem zweiten Durchlauf zu ihrem alten Punkt zurückkehrt. Es entsteht also wie in Abb. VII.19(c) angedeutet eine periodische Bahn mit der doppelten Periodenlänge $2T$! Man nennt dieses Phänomen daher eine *periodenverdoppelnde* oder auch eine *subharmonische Bifurkation*. Derartige Bifurkationen spielen eine wichtige Rolle beim Übergang von periodischer zu chaotischer Bewegung. Ein explizites Beispiel werden wir in Beisp. 25.1 anhand der logistischen Abbildung kennenlernen.

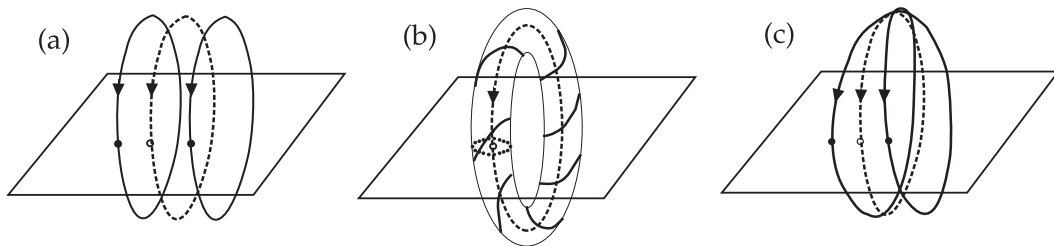


Abb. VII.19: Typische Verzweigungen einer periodischen Trajektorie (gestrichelt).

24 Lyapunov-Exponenten und Chaos

In Kap. 22 wurde der Begriff der Stabilität zeitabhängiger Bahnen diskutiert und in Beispiel 22.1 haben wir die Stabilitätstheorie von Floquet näher besprochen, die auf *periodische* Bahnen anwendbar ist. Basierend auf den Arbeiten von Floquet und Poincaré veröffentlichte der russische Mathematiker Lyapunov[¶] im Jahr 1892 eine noch allgemeinere Studie des Stabilitätsproblems, in der beliebige, auch nicht-periodische Bewegungen zugelassen wurden. Die von Lyapunov eingeführten charakteristischen Exponenten spielen seitdem eine zentrale Rolle in der Theorie nichtlinearer Systeme.

24.1 Eindimensionale Systeme

Wir betrachten zunächst den Fall einer *eindimensionalen diskreten Abbildung*

$$x_{n+1} = f(x_n) . \quad (1)$$

Physikalisch kann es sich dabei z.B. um die Poincaré-Abbildung eines dynamischen Systems handeln. Wir fragen nun: Wie unterscheidet sich die Punktfolge x_0, x_1, x_2, \dots von der Punktfolge $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots$, die sich aus einer leicht veränderten Anfangsbedingung $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$ entwickelt. Wir haben allgemein

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n &= x_n + \delta x_n = f(x_{n-1} + \delta x_{n-1}) \\ &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})\delta x_{n-1} + \dots , \end{aligned} \quad (2)$$

also ist die Abweichung im n -ten Schritt in linearer Näherung

$$\delta x_n = f'(x_{n-1})\delta x_{n-1} . \quad (3)$$

Diese Gleichung läßt sich n mal rekursiv anwenden, mit dem Resultat

$$\begin{aligned} \delta x_n &= f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \cdots f'(x_0) \delta x_0 \\ &= \prod_{l=0}^{n-1} f'(x_l) \delta x_0 . \end{aligned} \quad (4)$$

Offenbar sind die Werte $f'(x_l)$ ein Maß dafür, wie schnell sich die benachbarten Lösungen x_n und \tilde{x}_n voneinander entfernen (oder aufeinander zulaufen). Im Spezialfall einer periodischen Bewegung, wie sie von Floquet studiert wurde, ist die

[¶]Alexander Mikhailovich *Lyapunov*, russischer Mathematiker, geb. 6.6.1857 in Yaroslavl, gest. 3.11.1918 in Odessa. L. war Schüler von Chebyshev. Er befaßte sich mit der Stabilität von Gleichgewicht und Bewegung mechanischer Systeme und der Stabilität rotierender Flüssigkeiten. Außerdem arbeitete L. auf dem Gebiet der Potentialtheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Punktfolge x_l (als Poincaré-Abbildung interpretiert) konstant und alle Faktoren in (4) haben den gleichen Wert. Dies führt auf die exponentielle Abhängigkeit

$$|\delta x_n| = |f'(x_0)|^n |\delta x_0| = e^{n\sigma} |\delta x_0| \quad \text{mit} \quad \sigma = \ln |f'(x_0)|, \quad (5)$$

vergleiche 15 in Beisp. 22.1. (Ein Unterschied in der Definition von σ besteht darin, daß in (5) Beträge betrachtet werden. Das führt dazu daß σ hier immer reell ist.) Der charakteristische Exponent σ bestimmt die „Wachstumsgeschwindigkeit“ einer Störung. Auch wenn die Punkte x_l voneinander verschieden sind (nichtperiodische Bahn) läßt sich der Exponent σ weiterhin verwenden, indem man einen *Mittelwert* bildet. Die mathematische Definition des *Lyapunov-Exponenten* einer Punktfolge x_n lautet

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right|. \quad (6)$$

Mit (4) und der Multiplikationsregel für den Logarithmus läßt sich dies auch schreiben als

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \ln |f'(x_l)|. \quad (7)$$

Wenn alle x_l gleich sind, reduziert sich die Größe σ aus (6) bzw. (7) offensichtlich auf den Spezialfall (5).

Der Lyapunov-Exponent ist ein logarithmisches Maß für die mittlere Ausdehnungsrate pro Iteration (d.h. pro Zeiteinheit) des Abstands zweier infinitesimal benachbarter Trajektorien.

Besonders interessant ist der Fall $\sigma > 0$. Ein dynamisches System mit *positivem Lyapunov-Exponenten* wird als *chaotisch* bezeichnet. Die Bahnen eines solchen Systems sind extrem *sensitiv auf Änderungen der Anfangsbedingungen*. Wegen der exponentiellen Abhängigkeit muß man nicht lange warten und eine anfangs kleine Abweichung δx_0 explodiert zu beliebiger Größe. Genauer gesagt genügt es, wenn das Produkt $n\sigma$ eine Zahl nicht allzuviel größer als eins ist, vgl. (5).

Diese Eigenschaft chaotischer Systeme ist von großer Bedeutung, sowohl in praktischer wie in konzeptioneller Hinsicht. Das Verhalten eines chaotischen Systems ist *nicht vorhersagbar*, zumindest nicht auf lange Sicht. Da physikalische Größen immer nur mit einer begrenzten Genauigkeit bestimmbar sind, hat δx_0 zwangsläufig einen von Null verschiedenen Wert. Daher ist es hoffnungslos, den Zustand eines chaotischen Systems für Zeiten deutlich größer als $1/\sigma$ vorhersagen zu wollen. Der Versuch, dies durch immer genauere Festlegung der Anfangsbedingung zu erreichen ist zum Scheitern verurteilt. Letztlich gewinnt immer der exponentielle Anstieg der Abweichung.

Das Faszinierende daran ist, daß dieser Effekt in einem vollständig *deterministischen* System auftritt. Die Dynamik eines solchen Systems wird durch die zugrunde liegende Bewegungsgleichung – sei es eine Differentialgleichung oder eine diskrete

Abbildung wie in (1) „im Prinzip“ mathematisch eindeutig festgelegt. Dennoch hilft uns auch eine exakte Kenntnis der Bewegungsgleichung nicht weiter beim Versuch, die Lösungen zu ermitteln. Auf diese Weise wird eine neue Art von Unbestimmtheit in die Physik hineingetragen, zusätzlich zu den vertrauteren Quellen der statistischen Fluktuationen (Rauschen) und der Quantenfluktuationen (Unschärferelation). Der erste, der dies klar erkannt und ausgesprochen hat war Henri Poincaré gegen Ende des 19. Jahrhunderts. In Anbetracht der stürmischen Entwicklung anderer Gebiete der Physik hat die nichtlineare Dynamik lange Zeit ein Schattendasein geführt. Das gegenwärtige starke Interesse an der „Chaostheorie“ wurde wesentlich beflügelt durch die Verbreitung elektronischer Rechenanlagen, die es ermöglichen, durch Computerexperimente die Dynamik von Systemen zu erkunden, die sich der analytischen Behandlung widersetzen.

Ein wichtiger Anstoß für die Beschäftigung mit chaotischen Systemen wurde von dem Meteorologen Edward Lorenz gegeben, dessen Arbeit* allerdings lange Zeit wenig beachtet wurde. Im Jahr 1963 leitete er aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik unter stark vereinfachenden Annahmen ein System von drei gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen zur Beschreibung eines meteorologischen Systems her. Bei deren numerischer Lösung stieß er auf das Kennzeichen des deterministischen Chaos: Nichtvorhersagbarkeit aufgrund sensitiver Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Daß die Meteorologie hierfür ein geeignetes Beispiel liefert, wird niemanden verwundern. Schließlich läßt sich das Wetter auch mit massivem Computereinsatz verläßlich höchstens für wenige Tage vorhersagen. Der Versuch, diese Spanne zu verlängern fordert einen exponentiell wachsenden Aufwand.

E. Lorenz hat in diesem Zusammenhang auch den Begriff des „Schmetterlingseffekts“ geprägt, der ins öffentliche Bewußtsein eingegangen ist: Das Flügelschlagen eines Schmetterlings in Brasilien entscheidet darüber, ob Texas einige Tage später von einem Tornado getroffen wird. Natürlich sollte man dieses Bild auch nicht überstrapazieren. Auch alle Schmetterlinge zusammen können mit ihrem Flattern nicht die Struktur des „Klimaattraktors“ ändern. Zur Ausbildung tropischer Wirbelstürme wird es immer kommen, zumindest solange kein globaler Klimaumschwung eintritt. Zu welcher Zeit und an welchem Ort ein Unwetter eintritt hängt aber so sensitiv von subtilen Details ab, daß auch der Schmetterling darauf Einfluß hat.

24.2 Mehrdimensionale Systeme

Die hier für eindimensionale Systeme mit diskreter Dynamik gegebene Definition des Lyapunov-Exponenten läßt sich auch auf mehrere Dimensionen und kontinuierliche Zeitentwicklung verallgemeinern. Als Ausgangspunkt kann die Diskussion der Stabilität periodischer Bahnen in Kap. 22 dienen. Dort wurden Trajektorien

*E.N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963)

$\vec{x}(t) = \vec{x}_5(t) + \vec{\xi}(t)$ diskutiert, die sich von einer Referenzbahn $\vec{x}_r(t)$ durch eine kleine Störung $\vec{\xi}(t)$ unterscheiden. In erster Näherung genügt die Störung einer linearen Differentialgleichung, vgl. Gl. (6) in Kap. 22

$$\dot{\vec{\xi}}(t) = \mathbf{M}(t) \vec{\xi}(t) \quad (8)$$

mit der Jacobi-Matrix $\mathbf{M} = \partial \vec{F} / \partial \vec{x} |_{\vec{x}_r(t)}$. In Übereinstimmung mit (6) kann man als Maß für die zeitliche Entwicklung der Störung definieren

$$\sigma_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\vec{\xi}(t)|}{|\vec{\xi}(t_0)|} . \quad (9)$$

Diese Definition des Lyapunov-Exponenten wirft einige mathematische Probleme auf, die wir hier nur streifen können. Zunächst hängt $\sigma_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$ von der Referenztrajektorie $\vec{x}_r(t)$ ab und damit von der Lage des Startpunkts. Besitzt das System aber einen Attraktor, dann ist der Wert von σ im Einzugsbereich des Attraktors von der Referenzbahn unabhängig. Darüber hinaus gibt es die wichtige Klasse der *ergodischen Systeme*, bei denen zeitliche Mittelwerte (entlang einer Bahn genommen) durch Mittelwerte im Phasenraum ersetzt werden können. Auch für ergodische Systeme kann man zeigen, daß die gemäß (9) definierten Lyapunov-Exponenten existieren und von der speziellen Referenztrajektorie unabhängig sind. (Genauer gesagt kann es „pathologische“ Bahnen mit abweichendem σ geben, diese bilden aber eine Menge vom Maß Null).*

Weiterhin hängt der Wert von $\sigma_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$ auch von der Richtung der Störung $\vec{\xi}_0 = \vec{\xi}(t_0)$ ab. In einem N -dimensionalen Raum kann man N linear unabhängige Vektoren \vec{e}_i konstruieren, die zu einem Satz von N Lyapunov-Exponenten

$$\sigma_i = \sigma_{\vec{x}_r, \vec{e}_i} \quad (10)$$

führen. Die Indizes sollen so gewählt werden, daß die σ_i in absteigender Reihenfolge geordnet sind

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \quad (11)$$

wobei Entartungen (Gleichheit mehrerer Werte) möglich sind.

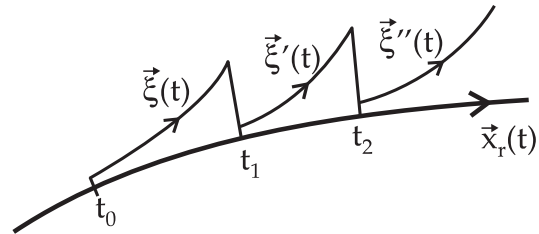
Der Wert des *größten Lyapunov-Exponenten* σ_1 ist am leichtesten zu bestimmen. Dazu integriert man die linearisierte Bewegungsgleichung (8) mit einer zufällig gewählten Anfangsstörung $\vec{\xi}(t_0)$. Ein solcher Vektor kann zerlegt werden gemäß

$$\vec{\xi}(t_0) = \sum_{i=1}^N c_i \vec{e}_i \quad (12)$$

*Nähere Informationen zu diesen Fragen findet man z.B. in D. Ruelle: *Chaotic evolution and strange attractors*, Cambridge University Press, Cambridge (1989)

und wird immer auch einen Anteil in Richtung des Vektors \vec{e}_1 aufweisen. Verfolgt man die Lösung über einen hinreichend langen Zeitraum, dann wird die am schnellsten wachsende Komponente der Störung (oder, wenn alle σ_i negativ sind, die am langsamsten fallende) dominieren. Die Limesbildung in (9) sorgt dann dafür, daß die Rechnung den *maximalen Lyapunov-Exponenten* liefert. In der Praxis muß man bei einer solchen Rechnung darauf achten, daß sich die Trajektorie $\vec{x}(t)$ bei chaotischen Systemen sehr schnell von der Referenztrajektorie $\vec{x}_r(t)$ entfernt. Deshalb empfiehlt es sich, in regelmäßigen Zeitabständen eine *Reskalierung* der Störung $\vec{\xi}'(t_n) = c\vec{\xi}(t_n)$ mit einer Konstanten $c \ll 1$ vorzunehmen, siehe Figur VII.20. Der Wert von σ wird dann durch Mittelung über viele solcher Intervalle gebildet.

Abb. VII.20: Bei der numerischen Berechnung von Lyapunov-Exponenten nimmt man wegen des Auseinanderlaufens der Trajektorien in regelmäßigen Abständen eine Reskalierung vor.



Der volle Satz der N Lyapunov-Exponenten läßt sich berechnen, indem man die zeitliche Entwicklung aller N linear unabhängigen Störungen $\vec{\xi}_i$ mit $\vec{\xi}_i(t_0) = \vec{e}_i$ verfolgt. Aus den N Volumina $V^{(p)}$ der von $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_p$ aufgespannten Parallelepipeda (dies muß für alle Werte $p = 1, 2, \dots, N$ berechnet werden) lassen sich dann sukzessive alle σ_i gewinnen.^{||}

Wir bemerken noch, daß im Falle *periodischer* Bahnen $\vec{x}_r(t + T) = \vec{x}_r(t)$ die Lyapunov-Koeffizienten mit dem Realteil der in Beisp. 22.1 eingeführten Floquet-Exponenten übereinstimmen. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung dieses Begriffs.

Die Lyapunov-Exponenten sind entscheidend für die Langzeitentwicklung eines dynamischen Systems. Wie schon diskutiert, haben positive σ schnelles Auseinanderlaufen benachbarter Trajektorien und Unvorhersagbarkeit zur Folge. Besonders interessant sind Trajektorien, die benachbarte Lösungen anziehen und (mindestens) einen positiven Lyapunov-Exponenten aufweisen. Sie werden als *chaotische Attraktoren* bezeichnet.

Betrachten wir zur Illustration ein autonomes System mit *drei Freiheitsgraden*. Je nach der Vorzeichenkombination von $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sind verschiedene Arten von

^{||}G. Bennettin, C. Froeschle, J.P. Scheidecker: *Phys. Rev.* **A19**, 2454 (1979); T.S. Parker, L.O. Chua: *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, New York (1989)

Attraktoren möglich:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \begin{cases} (-, -, -) & \text{Fixpunkt} \\ (0, -, -) & \text{Grenzzyklus} \\ (0, 0, -) & \text{Torus} \\ (+, 0, -) & \text{Chaotischer Attraktor} \end{cases} \quad (13)$$

Diese Fälle sind in Abb. VII.21 illustriert.

(a) Sind alle Lyapunov-Exponenten negativ, dann liegt ein stabiler Fixpunkt vor, in den Nachbartrajektorien aus allen Richtungen hineinlaufen.

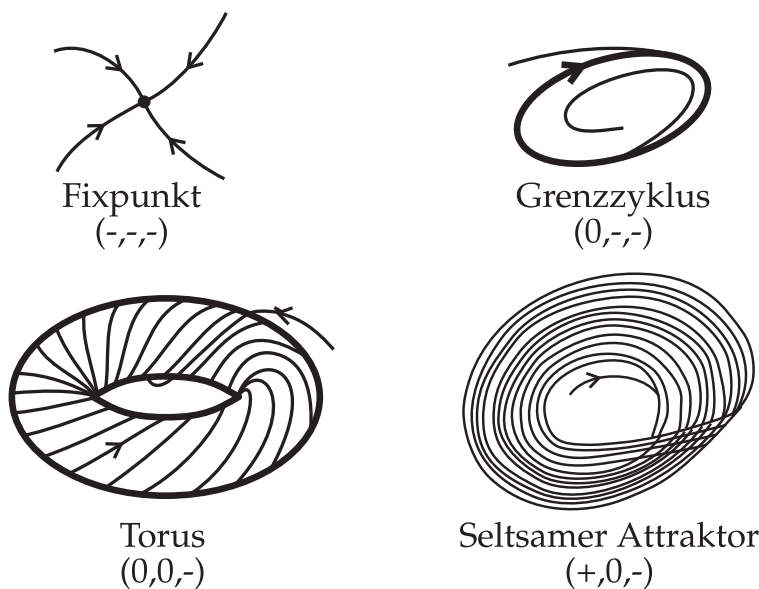


Abb. VII.21: Verschiedene Attraktortypen in einem dynamischen System mit drei Freiheitsgraden. Die Bilder unterscheiden sich durch die Vorzeichen der Lyapunov-Exponenten.

(b) Das Verschwinden eines Lyapunov-Exponenten, $\sigma_1 = 0$, weist darauf hin, daß eine *periodische Bewegung* vorliegt. In Kap. 22 wurde dies anhand der Bewegungsgleichung explizit demonstriert. Der zu σ_1 gehörende Vektor \vec{e}_1 zeigt in die Tangentialrichtung der Bahn. Der Attraktor ist ein *Grenzzyklus*, also ein eindimensionales Gebilde mit der Topologie (aber nicht notwendig der geometrischen Form) eines Kreises.

(c) Verschwinden zwei der Lyapunov-Exponenten, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, dann liegt eine periodische Bewegung in zwei Richtungen vor. Deshalb ist der entstehende Attraktor zweidimensional und hat die Topologie eines *Torus* um den sich die Trajektorie herumwindet. Von den Umlauffrequenzen ω_1 und ω_2 für die beiden Freiheitsgrade des Torus hängt es ab, ob die Bahn im Ganzen periodisch ist. Sind die Werte ω_1 und ω_2 inkommensurabel, ist also das Verhältnis ω_1/ω_2 kein Bruch aus ganzen Zahlen sondern eine irrationale Zahl, dann wird sich die Bahn nie schließen. Eine

solche Bahn, die im Lauf der Zeit den Torus immer dichter überdeckt, wird als *quasiperiodisch* bezeichnet.

(d) Ist der größte Lyapunov-Exponent positiv, $\sigma_1 > 0$, dann liegt ein *chaotischer Attraktor* vor, mit den schon besprochenen Eigenschaften der irregulären, stark von den Anfangsbedingungen abhängigen Bewegung. Die typische Kombination ist $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$, es sind aber auch chaotische Attraktoren mit mehreren positiven Lyapunov-Exponenten möglich. Geometrisch sind chaotische in den meisten Fällen auch *seltene Attraktoren*, wie schon in Kap. 21.3 angesprochen wurde. Sie haben die eigenartige Eigenschaft, Gebilde mit einer *gebrochenen Dimension* zu sein. Es handelt sich also weder um Linien noch um Flächen (oder höherdimensionale Hyperflächen) sondern um „etwas dazwischen“. Daß solche Objekte nicht reine mathematische Gespinste sind, sondern auch in der Natur auftreten wurde erst spät bemerkt, insbesondere von B. Mandelbrot**, der ihnen den Namen *Fraktale* gab.†† Ein schönes Beispiel für einen fraktalen Attraktor werden wir in Beisp. 25.4 bei einem periodisch angetriebenen Pendel kennenlernen, vgl. Abb. VII.46

24.3 Strecken und Falten im Phasenraum

Wie kann ein seltsamer Attraktor mit unendlich verästelter innerer Struktur in einem dynamischen System entstehen? Die Antwort liegt im Mechanismus des *Streckens* und *Faltens* im Phasenraum, den man sich wie folgt veranschaulichen kann.

Wir betrachten ein dynamisches System mit einem positiven Lyapunov-Exponenten σ_1 . Außerdem sei das System so beschaffen, daß der erreichbare Teil des Phasenraums beschränkt ist (in Kap. 21.3 war diese Eigenschaft in die Definition von Attraktoren eingeflossen). Man betrachtet nun einen kleinen zusammenhängenden Bereich ΔV im Phasenraum, z.B. einen Würfel, und verfolgt dessen Verformung unter dem Phasenfluß Φ_t . In der zum Lyapunov-Exponenten σ_1 gehörenden Richtung werden benachbarte Punkte schnell auseinanderstreben. Da das Phasenraumvolumen in konservativen Systemen erhalten bleibt oder in dissipativen Systemen

**Benoit B. *Mandelbrot*, geb. 1924 in Warschau. Nach der Emigration seiner Familie nach Frankreich (1936) studierte M. in Lyon, am California Institute of Technology und in Paris, wo er 1952 promovierte. Er arbeitete am CRNS, in Genf und an der École Polytechnique bevor er im Jahr 1958 in die USA ans IBM Watson Research Center ging, wo er zum Research Fellow berufen wurde. Gastprofessor war er unter anderem an den Universitäten Harvard und Yale. M.'s Interessen sind ungewöhnlich breitgefaßt und interdisziplinär orientiert. Basierend auf der Arbeit von G.M. Julia (1893-1978) über iterierte rationale Funktionen demonstrierte M. unter Benutzung von Computergrafik die Eigenschaften von Fraktalen und wies auf deren vielfältiges Auftreten in der Natur hin. Neben vielen anderen Ehrungen erhielt M. 1993 den Wolf-Preis in Physik.

††Näheres hierzu siehe beispielsweise

B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman (1982);

H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: *Chaos and Fractals – New Frontiers of Science*, Springer (1992)

sogar schrumpft (siehe Kap. 21.2) muß in den anderen Richtungen eine Kontraktion stattfinden. Da andererseits der zur Verfügung stehende Phasenraumbereich beschränkt ist, müssen sich die Trajektorien wieder zurückbiegen. Das zunächst gestreckte Probevolumen ΔV wird also zurückgefaltet, wie in Abb. VII.22 schematisch dargestellt.

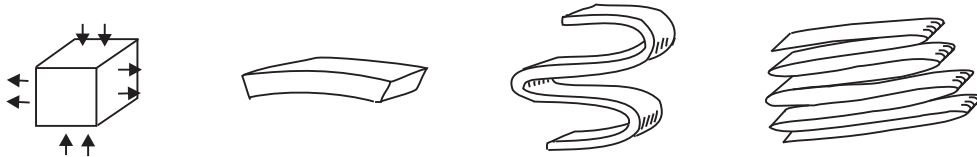


Abb. VII.22: Ein seltsamer Attraktor kann entstehen, wenn der dynamische Fluß einen Bereich im Phasenraum fortgesetzt streckt und wieder zurückfaltet.

Verfolgt man das Schicksal von ΔV noch länger, wird sich dieses Spiel von Strecken und Falten immer weiter fortsetzen. Man kann sich vorstellen, daß auf diese Weise eine unendlich fein unterteilte blätterteigartige Struktur entsteht, mit den geometrischen Eigenschaften eines Fraktals. Zwei anfänglich eng benachbarte Punkte landen nach einer Weile auf zwei verschiedenen Schichten des „Teigs“, danach geht jede erkennbare Korrelation zwischen ihren Positionen verloren. Ein simples mathematisches Modell für den hier beschriebenen Mechanismus ist die *Bäckerttransformation* (so genannt nach der Analogie zum Teigkneten), siehe Aufgabe 24.1.

24.4 Fraktale Geometrie

Das Langzeitverhalten der Trajektorien dissipativer Systeme ist durch die Annäherung an Attraktoren gekennzeichnet, die als geometrische Gebilde niedrigerer Dimension in den Phasenraum eingebettet sind. Die einfachsten Fälle umfassen Fixpunkte (Dimension $D = 0$), Grenzzyklen ($D = 1$) und Tori ($D = 2$) bei quasiperiodischer Bewegung mit zwei inkommensurablen Frequenzen. Als neuartiger Typus können in nichtlinearen Systemen aber auch *seltsame Attraktoren* mit kompliziertere geometrischer Struktur auftreten, die durch eine *gebrochene Dimension* gekennzeichnet sind. Die ersten derartigen *Fraktale* wurden, noch ohne diesen Namen, von Mathematikern als abstrakte Konstruktionen eingeführt. Lange schienen sie ins mathematische Kuriositätenkabinett zu gehören, bis man entdeckte, daß fraktale Strukturen tatsächlich in der Natur häufig anzutreffen sind.

Der geometrischen Konstruktion eines Fraktals liegt gewöhnlich eine (meist einfache) *Iterationsvorschrift* zugrunde, die wiederholt angewandt wird. Im Grenzfall unendlich vieler Iterationsschritte entsteht das Fraktal, das also eine unendlich fein aufgelöste innere Struktur besitzt. Wir wollen kurz einige bekannte Beispiele betrachten.

1. Die Cantor-Menge

Die Konstruktion beginnt mit einer Linie, nämlich der Menge aller reellen Zahlen im Einheitsintervall $I_0 = [0, 1]$. Die Iterationsvorschrift lautet: Entferne bei jedem Intervall das mittlere (offene) Drittel. Im ersten Iterationsschritt entstehen also zwei disjunkte Teilintervalle $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, die sich anschließend weiter aufspalten in $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ und so weiter. Die ersten Iterationsschritte sind in Abb. VII.23a dargestellt. Im Limes $n \rightarrow \infty$ entsteht aus den I_n die Cantor-Menge* als eine Art von fein verteiltem Staub von Punkten im Einheitsintervall.

Maß für die Ausdehnung der Cantor-Menge zu erhalten, betrachten wir die Größe ihres Komplements, also die Gesamtlänge aller herausgeschnittenen Teile. Dies führt auf eine geometrische Reihe:

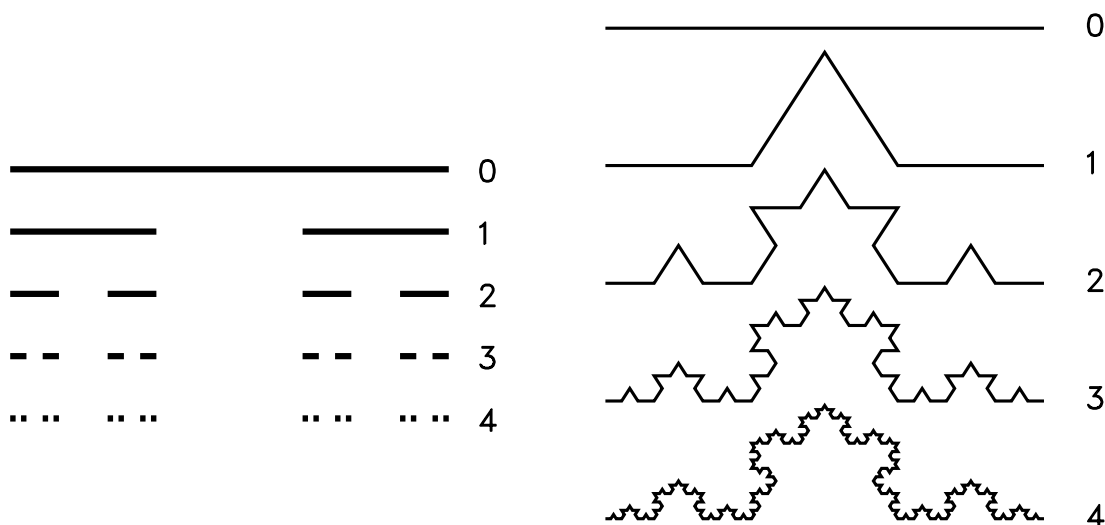


Abb. VII.23: a) Iterative Konstruktion der Cantor Menge: In jedem Schritt wird das mittlere Drittel eines Intervalls herausgeschnitten. b) Iterative Konstruktion der Kochschen Kurve. Sie entsteht durch fortgesetztes Anstückeln von Dreiecken.

$$L = 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - 2/3}\right) = 1 . \quad (14)$$

*Georg *Cantor*, deutscher Mathematiker, geb. 3.3.1845 in St. Petersburg, Russland, gest. 6.1.1918 in Halle. C. studierte an den Universitäten von Zürich und Berlin bei Weierstraß, Kummer und Kronecker. Von 1869 bis 1913 war er Professor an der Universität Halle. C. ist der Begründer der Mengenlehre. Er führte den Begriff der Kardinalzahl und das Konzept unendlicher (transfiniten) Zahlen ein und befaßte sich mit der Definition des Kontinuums. Er bewies die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen. Weiterhin lieferte er Beiträge zur Theorie der geometrischen Reihen.

Die herausgeschnittenen Teile addieren sich also zur Gesamtlänge des Einheitsintervalls, die Länge der Cantor-Menge beträgt daher Null! Sie besteht aber aus unendliche vielen Punkten und man kann zeigen, daß ihre Kardinalzahl (Mächtigkeit) dieselbe ist wie die der reellen Zahlen.[†]

2. Die Kochsche Kurve

Diese Konstruktion beginnt wieder mit einer Geraden der Länge Eins. Anstatt Teile herauszuschneiden wird nun aber etwas hinzugefügt und die Gerade zu einer gezackten Kurve in der zweidimensionalen Ebene aufgebläht. Die Iterationsvorschrift lautet: Entferne in jedem geraden Teilstück das mittlere Drittel und ersetze es durch die Schenkel eines gleichzeitigen Dreiecks. Die ersten Schritte der Iteration sind in Abb. VII.23b dargestellt (sie erinnern an die Bastionen alter Festungsbauwerke). Das Besondere an der Kochschen[‡] Kurve und ihren Verwandten ist, daß sie zwar überall stetig, aber *nirgends differenzierbar* ist. Man kann wegen der unendlich vielen Knickstellen keine Tangente an die Kurve legen. Auch die Berechnung der Länge der Kochschen Kurve führt zu einem bemerkenswerten Ergebnis: In jedem Teilschritt werden jeweils 3 Teilstücke durch 4 gleichlange ersetzt. Die Gesamtlänge L ist daher

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty, \quad (15)$$

divergiert also. Dies ist dem Graphen der Kurve nicht ohne weiteres anzusehen, liegt es doch an der „Verkrümpelung“ auf immer kleineren Längenskalen. Hier macht sich die *Selbstähnlichkeit* bemerkbar, die ein typisches Merkmal von Fraktalen ist: Auf jeder Längenskala ähnelt eine Ausschnittsvergrößerung des Objekts wieder dem Ganzen[§].

3. Das Sierpinski-Dreieck

Beim Sierpinski-Dreieck[¶] (engl.: S. gasket = Dichtung) ist der Grundbaustein eine

[†]Dies kann man recht einfach verstehen: Jeder Punkt der Cantor-Menge läßt sich durch eine unendliche Folge von „Links-Rechts-Entscheidungen“ charakterisieren, d.h. bei jedem Iterationsschritt in Abb. VII.23 muß angegeben werden, in welchem der beiden Teilintervalle der Punkt liegt. Diese Folge kann man aber auch als die Binärdarstellung einer reellen Zahl im Einheitsintervall $[0, 1]$ interpretieren, wodurch die Behauptung klar wird.

[‡]Niels Fabian Helge *von Koch*, schwedischer Mathematiker, geb. 25.1.1870 in Stockholm, gest. ebd. 11.3.1924. K. war Schüler und Nachfolger von Mittag-Leffler an der Universität von Stockholm. Sein Hauptarbeitsgebiet waren lineare Gleichungssysteme von unendlicher Dimension und mit unendlich vielen Unbekannten. Sein Name ist hauptsächlich bekannt durch die nach ihm benannte Kurve.

[§]Selbstähnlichkeit allein ist aber kein hinreichendes Kriterium für Fraktale. So ist z.B. auch eine gerade Linie auf triviale Weise selbstähnlich.

[¶]Wacław *Sierpinski*, polnischer Mathematiker, geb. 20.8.1882 in Warschau, gest. ebd. 14.5.1969. S. war Professor der Mathematik in Lwow (heute Ukraine, 1908-14), Moskau (1915-18) und danach in Warschau. Seine Hauptarbeitsgebiete waren die Mengenlehre (hier insbesondere das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese), die Topologie von Punktmengen und die Zahlentheorie.

zweidimensionale Fläche, nämlich ein gleichseitiges Dreieck. Iterationsvorschrift: Zerlege jedes Dreieck in 4 kongruente Teile und entferne das mittlere Dreieck. Abb. VII.24 zeigt die ersten Schritte dieser Iteration. Das entstehende Objekt ist ein Mittelding zwischen Fläche und Kurve. Es besitzt wieder die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit.



Abb. VII.24: Iterative Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks. Es wird jeweils das mittlere von vier Teildreiecken entfernt.

Selbstähnlichen fraktalen Objekten begegnet man in der Natur vielerorts. Beispiele in der organischen Welt sind die Verästelungen von Pflanzen (Bäume, Blumenkohl, besonders schön auch Farne) oder Blutgefäßen. Anorganische fraktale Formen findet man bei Wolken, Gebirgen, Schneeflocken, Blitzentladungen usw.

Ein klassisches von Mandelbrot studiertes Beispiel, das an die Kochsche Kurve erinnert, sind Küstenlinien. Für die Länge ein und derselben Küste können von den Geographen ganz unterschiedliche Werte angegeben werden. Dies hängt davon ab, auf welcher Längenskala die Messung vorgenommen wird. Je kleiner der Maßstab, desto besser können die Buchten und Windungen der Küste abgetastet werden, entsprechend den höheren Iterationen L_n der Kochschen Kurve. Konsequentermaßen müßte sich die Küstenlinie um jedes einzelne Sandkorn am Strand schlängeln, was die Länge enorm aufblähen würde. Hier zeigt sich aber auch, daß die Anwendung der fraktalen Geometrie auf natürliche Objekte nur in einem bestimmten Bereich sinnvoll ist. Allerspätestens auf der atomaren Skala, wenn sich die Granularität der Materie bemerkbar macht, verliert der mathematische Limes $n \rightarrow \infty$ seinen Sinn. Dennoch kann man fraktales Skalenverhalten (siehe unten) häufig über viele Größenordnungen verfolgen.

Die fraktale Dimension

Ein wichtiges Werkzeug zur Charakterisierung geometrischer Objekte ist deren Dimension. Bei herkömmlichen Objekten (glatte Kurven, Flächen, Kugeln, ...) ist die Dimension klar und stimmt mit der Anschauung überein. Fraktale jedoch verhalten sich anders. Um sie zu charakterisieren wurde der Begriff der *fraktalen Dimension* geprägt, den wir hier kurz skizzieren wollen. Wir beschränken uns dabei hauptsächlich auf die sogenannte *Kapazitätsdimension* (engl. auch: box counting dimension). ^{||}

^{||}Die Situation wird dadurch kompliziert, daß es eine Vielzahl unterschiedlicher mathematischer

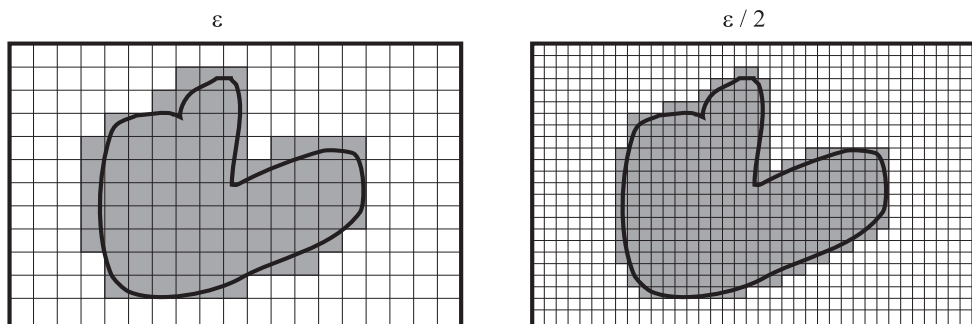


Abb. VII.25: Zur Bestimmung der Kapazitätsdimension eines Objekts wird abgezählt, wieviele Kästchen eines Gitternetzes es berührt. Die Abhängigkeit der Anzahl $N(\epsilon)$ von Kästchengröße ϵ bestimmt die Dimension D_f . Dies ist hier für ein „normales“ zweidimensionales Objekt illustriert.

Die Dimension soll ein Maß dafür sein, wie dicht eine Punktmenge den Raum, in den sie eingebettet ist, ausfüllt. Wir gehen davon aus, daß dies ein metrischer (im Normalfall euklidischer) Raum ist, in dem man Abstände messen kann. Dieser Raum wird nun, wie in Abb. VII.25 illustriert, von einem Gitternetz der Seitenlänge ϵ überzogen (also Teilstrecken für $n = 1$, Kästchen für $n = 2$, Würfel für $n = 3$, Hyperwürfel für $n > 3$) und man zählt ab, wieviele der Kästchen einen oder mehrere Punkte aus der zu untersuchenden Punktmenge enthalten. Diese Zahl $N(\epsilon)$ wird im allgemeinen von der Kästchengröße ϵ abhängen. Bei verfeinerter Auflösung verteilt sich das Objekt sicher auf mehr Kästchen, doch die Frage ist, wie schnell das geschieht. Findet man im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ ein Skalierungsverhalten mit einem Potenzgesetz

$$N(\epsilon) = V(\epsilon) \epsilon^{-D_f} \quad \text{mit} \quad V(\epsilon) \rightarrow \text{const} \quad \text{für} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (16)$$

dann definiert der Wert des Exponenten die *fraktale Dimension* oder *Kapazitätsdimension* D_f . Aufgelöst ergibt sich

$$D_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon) - \ln V(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \quad (17)$$

weil $V(\epsilon)$ im Grenzfall endlich bleibt und daher nicht beiträgt.

Für nicht-fraktale geometrische Objekte stimmt die so ermittelte Dimension mit der normalen euklidischen Dimension überein und $V(0)$ entspricht dem euklidischen Volumen. So überlappt eine Kreisscheibe vom Radius R bei hinreichend feiner Auflösung $N(\epsilon) \simeq \pi R^2/\epsilon^2$ Kästchen und jede weitere Verdopplung der Auflösung

Dimensionsbegriffe gibt. Die errechneten Dimensionswerte stimmen, abhängig vom betrachteten Objekt, teils überein, teils aber auch nicht. Für Details siehe K. Falconer: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, New York (1990)

führt zu einer Vervierfachung der Kästchenzahl. Entsprechend findet man für den Kreis $N(\epsilon) \simeq 2\pi R/\epsilon$, und so weiter.

Bei Fraktalen hingegen unterscheidet sich die Potenz des Skalierungsgesetzes (16) vom naiv erwarteten Wert und ist im allgemeinen eine nicht-ganze Zahl. Besonders einfach ist D_f für die Cantor-Menge zu ermitteln. Hier genügt als Einbettungsraum das Einheitsintervall ($n = 1$). Am bequemsten betrachtet man eine Folge von Unterteilungen der Länge ϵ_i die sich jeweils um einen Faktor 3 unterscheiden, also $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = 1/3$, $\epsilon_2 = 1/9$, etc. Die Cantor-Menge ist so konstruiert, daß sich dann die Zahl der „belegten“ Kästchen (Teilintervalle) jeweils verdoppelt, also $N(\epsilon_0) = 1$, $N(\epsilon_1) = 2$, $N(\epsilon_2) = 4$ etc. Daher ist nach Gl. (17) die fraktale Dimension der Cantor-Menge

$$\begin{aligned} D_f &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\epsilon_n)}{\ln(1/\epsilon_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0.6309. \end{aligned} \quad (18)$$

Das Ergebnis ist unabhängig davon, auf welche Weise der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ durchgeführt wird.

Ähnlich erhält man die Dimension der Kochschen Kurve. Um sie zu überdecken braucht man im ersten Schritt $N(\epsilon_1) = 4$ Intervalle der Länge $\epsilon_1 = 1/3$, anschließend $N(\epsilon_2) = 16$ Intervalle der Länge $\epsilon_2 = 1/9$ usw. Analog zu (18) impliziert dies

$$D_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1.2618. \quad (19)$$

Schließlich folgt für das Sierpinski-Dreieck

$$D_f = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1.5850, \quad (20)$$

da sich hier bei jeder Halbierung der Kästchengröße die Zahl der Teilobjekte verdreifacht.

Die Ergebnisse (18) bis (20) sind nicht unplausibel. Sie quantifizieren, daß die betrachteten Fraktale mit ihren Eigenschaften zwischen den vertrauten Objekten Punkt, Linie, Fläche, ... stehen. Der Vergleich von (19) und (20) zeigt, daß das Sierpinski-Dreieck „raumfüllender“ als die Kochsche Kurve ist, aber nicht an eine normale Fläche heranreicht. Ein extremes Beispiel in dieser Hinsicht ist die 1890 von G. Peano** entdeckte und in modifizierter Form von D. Hilbert untersuchte

**Giuseppe *Peano*, italienischer Mathematiker, geb. 27.8.1858 in Cuneo (Provinz Piemont), gest. 20.4.1932 in Turin. P. studierte Mathematik an der Universität Turin, wo er ab 1880 als Dozent und ab 1890 als Professor lehrte. Seine frühen Arbeiten befaßten sich mit Analysis, dem Anfangswertproblem bei Differentialgleichungen und mit rekursiven Funktionen. Bekannt wurde P. vor allem als Begründer der mathematischen Logik (neben G. Frege). Die Peano-Axiome

flächenfüllende Kurve. Die Peano-Kurve kann man ebenfalls iterativ erhalten, wobei bei einer Drittelung der Skalenlänge neun gleichgroße Teilstrecken entstehen, siehe Abb. VII.26. Demgemäß ist die Dimension

$$D_f = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2 . \quad (21)$$

Dies ist die Dimension $n = 2$ des einbettenden Raums und damit der größte Wert, den die Kapazitätsdimension D_f annehmen kann ($N(\epsilon)$ ist maximal, da sämtliche Kästchen Teile des Objekts enthalten).

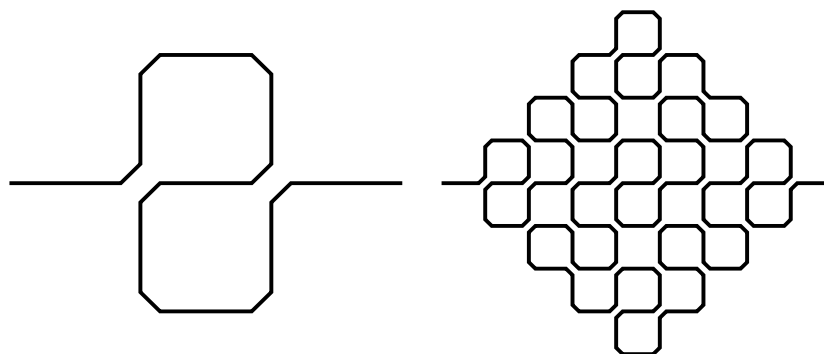


Abb. VII.26: Die ersten beiden Iterationsschritte zur Konstruktion der flächenfüllenden Kurve von Peano. Im Grenzfall ergibt sich eine stetige Abbildung des Einheitsquadrats auf das Intervall $[0, 1]$. Um die Konstruktion zu verdeutlichen wurden in der Zeichnung die rechtwinkligen Ecken abgeschnitten.

Die Definition der Kapazitätsdimension ist sehr anschaulich und hat den Vorteil, daß sie sofort eine operative Rechenvorschrift liefert. Man muß nur Gitternetze aufspannen und die Kästchen abzählen, was sich leicht auf dem Computer realisieren läßt. Wenn die Funktion $N(\epsilon)$ in doppeltlogarithmischer Darstellung eine Gerade liefert (zumindest in einem größeren Skalenbereich) kann man an deren Steigung sofort D_f ablesen. Eine verwandte subtilere Definition der Dimension, die auf das äquidistante Gitternetz verzichtet und mit Überdeckungen variabler Größe arbeitet, wurde 1918 von dem Bonner Mathematiker Felix Hausdorff* entwickelt. Wir

(1889) definieren die natürlichen Zahlen über die Eigenschaften von Mengen. Sein Ziel war die Axiomatisierung der gesamten Mathematik. Später überschritt P. den Rahmen der Mathematik und entwickelte eine universale Weltsprache (Interlingua), die sich jedoch nicht durchsetzen konnte.

*Felix *Hausdorff*, deutscher Mathematiker, geb. 8.11.1869 in Breslau, gest. 26.1.1942 in Bonn. H. studierte und lehrte Mathematik in Leipzig und ab 1910 in Bonn, bis zu seiner Zwangspensionierung im Jahr 1935. Er wurde wegen seiner jüdischen Abstammung verfolgt und wählte 1942 kurz vor der bevorstehenden Deportation ins Konzentrationslager gemeinsam mit seiner Frau den Freitod. Die Hauptarbeitsgebiete von H. waren Topologie und Gruppentheorie. Er führte das Konzept teilgeordneter Mengen ein und befaßte sich mit Cantors Kontinuumshypothese. H. begründete eine Theorie topologischer und metrischer Räume und definierte um 1919 die nach ihm benannten Begriffe von Dimension und Maß.

wollen hier auf die Details nicht eingehen und erwähnen nur, daß die Hausdorff-Dimension D_H in den meisten Fällen mit D_f übereinstimmt[†], es gibt aber auch Ausnahmefälle. Allgemein gilt $D_H \leq D_f$.

Gerade zur Klassifizierung seltsamer Attraktoren können auch noch andere Dimensionsmaße sinnvoll sein. Die Poincaré-Abbildung liefert eine womöglich sehr *inhomogen verteilte Punktwolke* im Phasenraum. Bei der Berechnung der Kapazitätsdimension fällt die Information über die Häufigkeitsverteilung der Punkte unter den Tisch. Es spielt keine Rolle, ob in einem Kästchen ein einzelner Punkt sitzt oder Tausende. Um dies zu berücksichtigen, definiert man eine *Informationsdimension*, bei der die Dichteverteilung der Punkte Verwendung findet.

Die Konstruktion ist ähnlich wie bei der Kapazitätsdimension D_f . Der Einbettungsraum wird wieder in Kästchen eingeteilt, aber nun wird der Beitrag jeder Zelle mit der Wahrscheinlichkeit p_i gewichtet, dort Punkte anzutreffen. Praktisch wird dieser Wert bestimmt, indem man eine sehr große Anzahl N von Punkten generiert und nachzählt, wieviele davon in Zelle Nummer i liegen, also $p_i = N_i/N$ mit $\sum_i N_i = N$. Die Gewichtung erfolgt mit einem logarithmischen Maß. Die Informationsdimension D_I ist definiert als

$$D_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i \ln(1/p_i)}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (22)$$

Der Faktor $f(p) = p \ln(1/p)$ hat dabei folgende Bedeutung: Man nehme einen beliebigen Punkt aus der Verteilung und stelle die Frage „Liegt der Punkt in Zelle i ?“. Die Beantwortung auf diese Frage liefert die Informationsmenge $f(p_i)$. Diese Funktion verschwindet für $p_i \rightarrow 0$ und $p_i \rightarrow 1$, denn in diesen Fällen ist die Antwort trivial (immer „nein“ oder immer „ja“). Der Informationsgewinn ist maximal für $p_i = 1/2$, dann ist die Antwort auf jeden Fall eine Überraschung.

Die genaue Begründung für die Funktion $f(p)$ wird in der statistischen Mechanik geliefert, bzw. in der Informationstheorie (Shannons Informationsmaß[‡]). Wir können uns aber zumindest leicht klarmachen, daß (22) in die Formel (17) übergeht, wenn die Punktverteilung homogen ist, wenn also alle Wahrscheinlichkeiten in den insgesamt $N(\epsilon)$ überdeckten Zellen den gleichen Wert $p_i = p = 1/N(\epsilon)$ haben. Für die restlichen Zellen ist $p_i = 0$. Damit reduziert sich (22) auf

$$D_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(\epsilon)p \ln(1/p)}{\ln(1/\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} = D_f. \quad (23)$$

Bei einer weniger gleichmäßigen Punktverteilung ist der Informationsgehalt geringer und man kann zeigen, daß dann $D_I < D_f$ gilt.[§]

[†]J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke: *Physica* **7D**, 153 (1983)

[‡]C.E. Shannon, W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, Univ. of Ill. Press, Urbana (1949)

[§]Siehe z.B. Peitgen, Jürgens, Richter, op. cit. S. 735.

24.1 Aufgabe: Die Bäckertransformation

Der für den Phasenfluß in chaotischen Systemen charakteristische Prozeß des Streckens und Faltens kann durch eine einfache zweidimensionale diskrete Abbildung illustriert werden. Der Phasenraum sei das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Die Bewegung eines Punkts erfolgt gemäß der Transformation

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \bmod 1 \\ y_{n+1} &= \begin{cases} ay_n & \text{für } \begin{cases} 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases} \\ \frac{1}{2} + ay_n & \end{cases} \end{aligned} \quad \underline{1}$$

mit einem Parameter $0 < a \leq 1/2$. Interpretieren sie diese Transformation und berechnen sie die fraktale Dimension der durch Anwendung von $\underline{1}$ auf das Einheitsquadrat entstehenden Menge.

Lösung: Die Wirkung der Transformation kann man sich geometrisch leicht veranschaulichen. Alle Längen in x -Richtung werden um den Faktor 2 gestreckt. Läuft ein Punkt dabei über den rechten Rand des Einheitsintervalls hinaus, dann wird er um eine Längeneinheit nach links zurückgeschoben. Diese Abbildung wird auch als Bernoulli-Shift bezeichnet, vgl. Aufg. 25.2. Gleichzeitig werden alle Längen in y -Richtung um den Faktor a gestaucht. Punkte aus der rechten Hälfte des Einheitsintervalls werden zusätzlich um $1/2$ in y -Richtung nach oben geschoben. Dies erinnert an die Arbeit eines Bäckers: Der Teig wird auf die doppelte Länge ausgewalzt. Dann wird der überstehende Teil abgeschnitten und als zweite Schicht auf den Teig gelegt. (Wenn $a < 1/2$ ist, liegt noch ein „Luftpolster“ der Dicke $1/2 - a$ zwischen den Schichten.)

Die Volumenänderung eines Phasenraumbereichs ΔV unter $\underline{1}$ setzt sich aus dem Produkt der Streckungs- und Stauchungsfaktoren in x - bzw. y -Richtung zusammen, also

$$\Delta V_{n+1} = 2a \Delta V_n. \quad \underline{2}$$

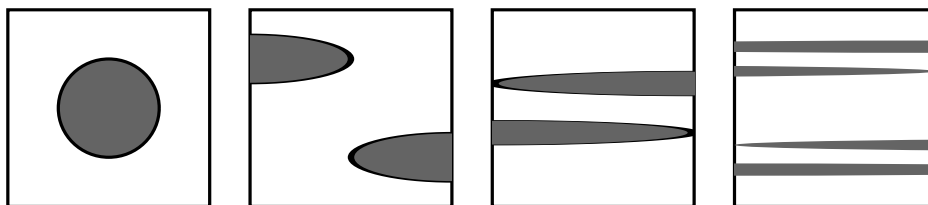


Abb. VII.27: Illustration der Bäckertransformation.

Für $a = \frac{1}{2}$ gilt Volumenerhaltung. Allerdings wird ein zusammenhängender Bereich im Phasenraum durch das wiederholte „Zurückfalten“ (hier ist es eher ein Zurückschieben) sehr schnell zerrissen und bis zur Unkenntlichkeit verzerrt. Dies ist in der Abbildung für die ersten Schritte der Transformation eines Kreises vom Radius $1/2$ dargestellt.

Im Fall $a < 1/2$ schrumpft das Volumenelement bei jedem Iterationsschritt und geht asymptotisch gegen Null. Im Sinne von Kap. 21.1 spricht man auch von der *dissipativen* Bäckertransformation. Das entstehende geometrische Gebilde ist ein Fraktal, das in y -Richtung die Struktur einer Cantor-Menge aufweist. Genau wie bei dieser kann man gemäß Gl. (17) die fraktale Dimension ausrechnen. In y -Richtung entstehen beim ersten Transformationsschritt aus dem Einheitsintervall 2 Teile der Länge a , dann 4 Teile der Länge a^2 , allgemein 2^n Teile der Länge a^n . Wählen wir eine Folge von Überdeckungen der Seitenlänge $\epsilon_n = a^n$ dann ist $N(\epsilon_n) = 2^n(1/\epsilon^n)$, wobei der zweite Faktor von der Überdeckung der x -Achse herrührt. Die fraktale Dimension ist demnach

$$\begin{aligned} D_f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\epsilon_n)}{\ln(1/\epsilon_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n/\epsilon_n)}{\ln(1/\epsilon_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(2/a)}{\ln(1/a)} = \frac{\ln 2 - \ln a}{-\ln a} \\ &= 1 + \frac{\ln 2}{|\ln a|} . \end{aligned} \quad \underline{3}$$

25 Systeme mit chaotischer Dynamik

In diesem Kapitel werden wir verschiedene dynamische Systeme kennenlernen, bei denen trotz ihrer sehr einfachen, ja teilweise trivialen Struktur höchst komplexe Bewegungsformen auftreten können. Wir werden dabei anhand einer Reihe von konkreten Beispielen schon diskutierten Begriffen wie Bifurkationen, periodischen und seltsamen Attraktoren (Grenzzyklen und chaotische Trajektorien) begegnen. Der Einfachheit halber beginnen wir mit der Untersuchung von Systemen mit diskreter Dynamik. Die betrachteten Beispiele werden zunehmend physikalisch realistischer werden.

25.1 Dynamik diskreter Systeme

Bisher haben wir uns für dynamische Systeme interessiert, die durch kontinuierliche Differentialgleichungen in der Zeit beschrieben werden. In der Poincaré-Abbildung haben wir eine Möglichkeit kennengelernt, ein kontinuierliches auf ein zeitdiskretes System zu reduzieren. Da sich die Poincaré-Abbildung eines realistischen physikalischen Systems aber normalerweise nicht geschlossen angeben läßt, ist es lehrreich, stattdessen einfache mathematische Modellabbildungen zu untersuchen. Wie sich zeigt, teilen solche Modelle viele Eigenschaften mit vom physikalischen Standpunkt aus interessanteren Systemen.

Betrachten wir eine Folge von Vektoren $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ die durch eine einfache *iterative Abbildung*, das heißt durch wiederholte Anwendung einer stetigen Funktion $\vec{f}(\vec{x})$ erzeugt wird

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) . \quad (1)$$

Das asymptotische Verhalten der Folge der \vec{x}_n kann, wie schon in Kap. 22, durch das Auftreten von *Fixpunkten* oder *periodischen Grenzzyklen* gekennzeichnet sein. Über die Stabilität eines Fixpunktes \vec{x}^p geben wieder die Eigenwerte der Jacobi-Matrix $\mathbf{D} = \partial \vec{f} / \partial \vec{x} |_{\vec{x}^p}$ Auskunft. Wir wollen darauf nicht noch einmal detailliert eingehen, bemerken aber noch einen interessanten Zusammenhang zwischen stationären und periodischen Lösungen. Betrachten wir zum Beispiel eine periodische Lösung die zwischen zwei Werten alterniert: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$. Dann gilt offenbar $\vec{x}_2 = \vec{f}(\vec{x}_1)$ und $\vec{x}_1 = \vec{f}(\vec{x}_2)$ woraus folgt $\vec{x}_1 = \vec{f}(\vec{f}(\vec{x}_1)) \equiv \vec{f}^2(\vec{x}_1)$ und auch $\vec{x}_2 = \vec{f}^2(\vec{x}_2)$. Hier darf $\vec{f}^2(\vec{x})$ nicht mit der Potenz $(\vec{f}(\vec{x}))^2$ verwechselt werden. Dieses Vorgehen läßt sich natürlich auch auf periodische Lösungen der Länge m übertragen, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$. Dementsprechend reduziert sich eine periodische Lösung der Iterationsfunktion \vec{f} auf einen Satz von m konstanten *Fixpunkten der m -fach iterierten Funktion \vec{f}^m* . Für kontinuierliche (nicht zeitdiskretisierte) Lösungen $\vec{x}(t)$ gibt es keinen solchen Zusammenhang.

25.2 Eindimensionale Abbildungen

Zur weiteren Vereinfachung konzentrieren wir uns jetzt auf eindimensionale Abbildungen $x_{n+1} = f(x_n)$. Die Folge der x_n läßt sich dann ganz einfach graphisch konstruieren. Die Funktion $f(x)$ wird in ein zweidimensionales Koordinatensystem mit x_n als Abszisse und x_{n+1} als Ordinate eingezeichnet, zusammen mit der Winkelhalbierenden $x_{n+1} = x_n$. Startend mit dem ersten Punkt $x_n = x_1$ wird er zugehörige Funktionswert $x_{n+1} = f(x_1) = x_2$ markiert. Da dieser als Ausgangswert für den nächsten Iterationsschritt dienen soll, muß er auf die x_n -Achse übertragen werden. Das geschieht, indem man eine horizontale Linie zur Winkelhalbierenden zieht. Der Schnittpunkt $x_n = x_2$ dient als Grundlage, nun wieder den Funktionswert $x_{n+1} = f(x_2) = x_3$ zu markieren, und immer so weiter.

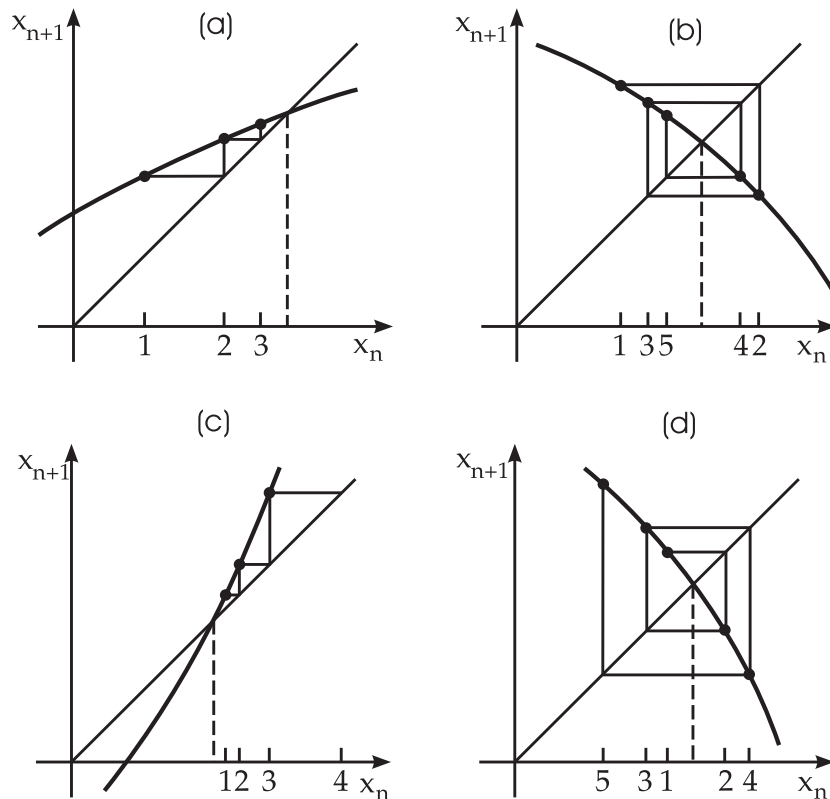


Abb. VII.28: Verschiedenartige Fixpunkte einer eindimensionalen Abbildung. In Abhängigkeit von der Steigung der Funktion $f(x)$ ist der Fixpunkt stabil (a) und (b) oder instabil (c) und (d).

Diese geometrische Konstruktion ist in Fig. VII.28 dargestellt, wobei gleichzeitig auch noch die verschiedenen Möglichkeiten der Stabilität eines Fixpunkts $x_s = f(x_s)$ der Abbildung illustriert werden. Wie wir wissen, gibt darüber die Ableitung der Funktion am Fixpunkt, $\lambda = f'(x_s)$, Auskunft (Eigenwert der Jacobi-Matrix).

Für $|\lambda| < 1$ handelt es sich um einen *stabilen* Fixpunkt (Punktattraktor). Dabei nähert sich die Punktfolge entweder *monoton* (für $0 < \lambda < 1$, (a)) oder *alternierend* (für $-1 < \lambda < 0$, (b)) dem Fixpunkt an. Ein Wert $|\lambda| > 1$ hingegen führt auf einen *instabilen* Fixpunkt, wobei die Punktfolge wieder *monoton* (für $\lambda > 1$, (c)) oder *alternierend* (für $\lambda < -1$, (d)) entweichen kann. Im Grenzfall $\lambda = -1$ ergibt sich eine periodische Folge der Länge 2 während bei $\lambda = +1$ auch jeder Punkt ein Fixpunkt in der Umgebung von x_s ist. Um bei $|\lambda| = 1$ über die Stabilität zu entscheiden, reicht die erste Ableitung (lineare Näherung) nicht aus.

In den Beispielen 25.1 bis 25.3 werden verschiedene diskrete eindimensionale Abbildungen vorgestellt und ihre Dynamik im Detail studiert.

25.1 Beispiel: Die logistische Abbildung

Eines der einfachsten aber darum nicht weniger eindrucksvollen Beispiele einer iterativen Abbildung wird durch die *logistische Funktion* erzeugt.* Diese ist als invertierte Parabel

$$f(x) = \alpha x(1 - x) \quad , \quad x \in [0, 1] \quad \underline{1}$$

definiert, mit Nullstellen am Rand des Einheitsintervalls und einem Maximum bei $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\alpha$. Die logistische Funktion hängt von einem reellen Parameter α ab, dessen Wert im Bereich $1 < \alpha \leq 4$ liegen soll, da andernfalls die Abbildung aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$ herausführen ($\alpha < 0$, $\alpha > 4$) oder trivial würde ($0 < \alpha < 1$, alle Lösungen konvergieren nach $x = 0$).

Die Abbildung 1 hat die zwei Fixpunkte

$$x_{s1} = 0 \quad \text{und} \quad x_{s2} = 1 - \frac{1}{\alpha} \quad \underline{2}$$

mit den Ableitungen

$$f'(x_{s1}) = \alpha \quad \text{und} \quad f'(x_{s2}) = 2 - \alpha \quad \underline{3}$$

Da $\alpha > 1$ sein soll, ist der erste Fixpunkt immer *instabil*. Der zweite ist *stabil* (Punktattraktor) falls $1 < \alpha < 3$. In diesem Parameterbereich sehen alle Lösungen so aus wie in Fig. VII.29 für $\alpha = 2.8$ dargestellt, d.h. x_n konvergiert gegen den Fixpunkt x_{s2} , bei kleinem Startwert anfangs *monoton* anwachsend, später *alternierend*. Überschreitet α den Wert $\alpha_1 = 3$, dann wird gemäß 3 auch der Fixpunkt x_{s2} instabil.

*Die logistische Abbildung läßt sich mit einiger Mühe als Modellgleichung eines speziellen physikalischen Systems interpretieren, siehe die Bemerkung am Ende von Beisp. 25.3, hat aber auch Bezug zu anderen Wissenschaftsgebieten. Zuerst eingeführt wurde die logistische Abbildung im Jahr 1845 in der biologischen Populationsdynamik von dem belgischen Biomathematiker P.F. Verhulst. Sie beschreibt dort die Entwicklung einer Tier- oder Pflanzenpopulation in einer beschränkten Umwelt, wobei jede Iteration einer neuen Generation entspricht (die alte stirbt dabei ab). Bei kleiner Populationsdichte ist die Vermehrungsrate positiv (wenn $\alpha > 1$). Nähert man sich jedoch der Sättigungsdichte $x = 1$, dann sinkt durch Überbevölkerung die Reproduktionsrate sodaß $x_{n+1} < x_n$. Der simple Parabelansatz reicht aus, um eine komplexe Dynamik zu erzeugen.

Die geometrische oder numerische Konstruktion der Lösung zeigt, daß sich stattdessen ein stabiler Grenzzyklus der Periode 2 ausbildet., wie in Abb.VII.29(b) für den Fall $\alpha = 3.3$ illustriert. Bei $\alpha = \alpha_1$ kommt es also zu einer *Periodenverdopplung* der Lösung. Es liegt eine Heugabel-Bifurkation vor, wie sie in der Abbildung VII.15 in Kap. 32.1b) dargestellt wurde: Die alte Lösung wird instabil und es entsteht eine Paar neuer stabiler Lösungsäste. (Allerdings gehören hier beide Äste gleichzeitig zur Lösung, da diese zwischen den beiden periodisch hin- und herspringen. Dies unterscheidet sich von dem in Kap. 23 untersuchten Fall, wo beide Lösungsäste voneinander unabhängig waren.)

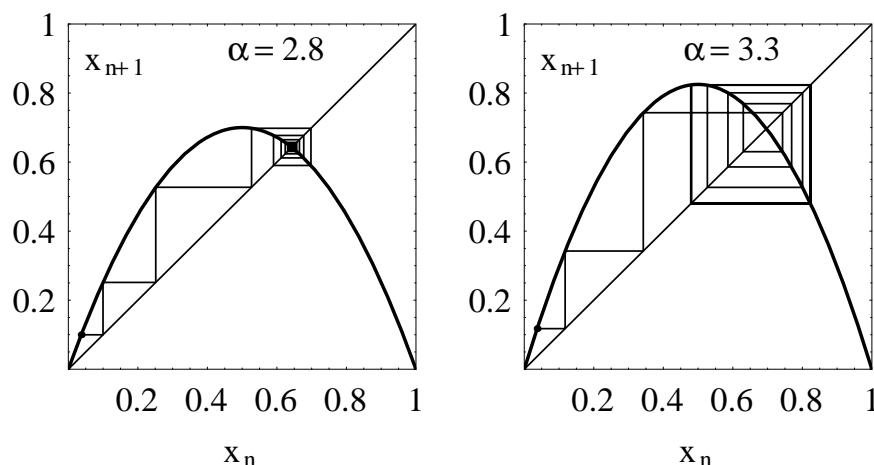


Abb. VII.29: Typische Trajektorien der logistischen Abbildung. Für $\alpha = 2.8$ ist der Attraktor ein Fixpunkt und bei $\alpha = 3.3$ ein Grenzzyklus der Periode 2.

Die Periodenverdopplung läßt sich auch verstehen, wenn man die iterierte Abbildung $f^2(x) = f(f(x))$ betrachtet, denn für diese reduziert sich ja wie schon besprochen eine periodische Lösung auf zwei getrennte stationäre Fixpunkte. Die iterierte Funktion

$$f^2(x) = \alpha^2 x(1-x)(1-\alpha x + \alpha x^2) \quad \underline{4}$$

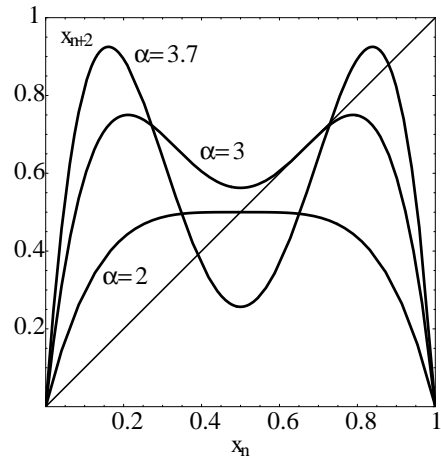
ist ein Polynom vierter Ordnung mit Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$. Die Abbildung VII.30 zeigt diese Funktion für verschiedene Werte des Parameters α . Für $\alpha < \alpha_1$ schneidet die Funktion f^2 die Winkelhalbierende x genauso wie f nur an den zwei Stellen x_{s1} und x_{s2} die in 2 angegeben wurden. Als Polynom vierter Ordnung erlaubt 4 aber vier Schnittstellen mit einer Geraden, und genau dies geschieht im Fall $\alpha > \alpha_1$. Wie in Fig. VII.30 gezeigt, hat f^2 für $\alpha > 2$ ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ und zwei Maxima bei $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha}}$. Ohne größere Rechnung sieht man das anhand von

$$f^{2'}(x) = f'(f(x)) f'(x) . \quad \underline{5}$$

Eine Nullstelle der Ableitung (Extremum von f^2) folgt aus $f'(x) = 0$, also $x = \frac{1}{2}$. Für die beiden anderen findet man

$$x = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{denn} \quad f'(f(x)) = f'(f(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right))) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 , \quad \underline{6}$$

Abb. VII.30: Die iterierte logistische Funktion $f(f(x))$ weist für $\alpha > 0$ zwei Maxima auf



was als quadratische Gleichung die beiden oben genannten Wurzeln liefert. Die Steigung von $f^2(x)$ an der Position des Fixpunkts x_{s2} ergibt sich zu

$$f^{2'}(x_{s2}) = (\alpha - 2)^2 . \quad \underline{7}$$

Für $\alpha < \alpha_1 = 3$ ist diese Steigung kleiner als 1, also ist x_{s2} ein stabiler Fixpunkt auch von f^2 . Das muß natürlich so sein, denn f^2 greift sich ja einfach jeden zweiten Wert aus der Reihe der x_n heraus, erbt also von der Lösung der Abbildung f die Stabilität. Bei $\alpha = \alpha_1$ berührt $f^2(x)$ die Winkelhalbierende und für $\alpha > \alpha_1$ bilden sich zwei neue Schnittpunkte x_1, x_2 aus. Es handelt sich um zwei stabile Fixpunkte der iterierten Abbildung f^2 , also $f^2(x_1) = x_1, f^2(x_2) = x_2$, die durch $x_2 = f(x_1)$ und $x_1 = f(x_2)$ miteinander zusammenhängen.

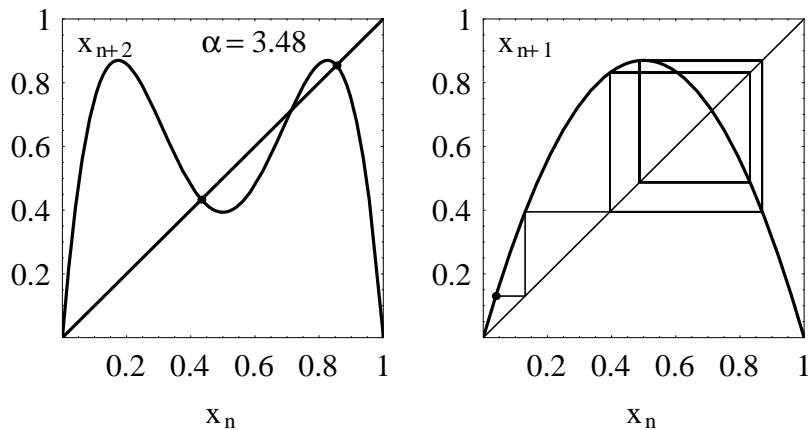


Abb. VII.31: (a) Bei $\alpha = 3.48$ besitzt die iterierte logistische Funktion $f(f(x))$ einen instabilen und zwei stabile Fixpunkte bei $x \simeq 0.43298$ und $x \simeq 0.85437$. (b) Die Trajektorie zeigt eine Periode der Länge 4.

Wächst der Parameter α weiter an, dann werden auch diese Fixpunkte bei einem kritischen Wert $\alpha = \alpha_2$ wieder instabil und das Spiel wiederholt sich für die Abbildung $f^2(x)$. Es tritt eine weitere Bifurkation mit Periodenverdopplung auf und die neue stabile Lösung hat eine *Periodenlänge von 4*. Abb. VII.31 zeigt diese Lösung für das Beispiel $\alpha = 3.48$.

Der kritische Wert α_2 läßt sich mit einiger Mühe noch analytisch angeben. Dazu muß man zunächst die Position der Fixpunkte x_1 und x_2 herausfinden. Die Bedingung $f^2(x) = x$ führt mit 4 auf eine quartische Gleichung. Allerdings kennen wir zwei der Nullstellen schon, nämlich die Fixpunkte x_{s1} und x_{s2} aus 2, die wir durch Polynomdivision abspalten können:

$$f^2(x) - x = x(x - 1 + 1/\alpha)(\alpha^3 x^2 - \alpha(1 + \alpha)x + \alpha + 1) = 0. \quad \underline{7}$$

Nullsetzen der letzten Klammer liefert eine quadratische Gleichung aus der sich die beiden neuen Fixpunkte bestimmen, nämlich

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{3}{\alpha}\right)}. \quad \underline{8}$$

Die zweite Bifurkation tritt ein, wenn diese Fixpunkte instabil werden. Entscheidend dafür ist der Betrag der Steigung der Funktion $f^2(x)$ an den Punkten $x_{1,2}$. Die Steigung beginnt mit dem Wert $+1$ bei $\alpha = \alpha_1$ und sinkt dann stetig auf -1 ab. An dieser Stelle tritt die nächst Bifurkation auf. Also ist die Gleichung

$$f^{2'}(x_{1,2}, \alpha_2) = -1 \quad \underline{9}$$

zu lösen. Unter Berücksichtigung von 5 und 8 scheint 9 eine sehr kompliziert Abhängigkeit von α aufzuweisen. Nach einigen elementaren Umformungen reduziert sich 9 aber auf eine einfache quadratische Gleichung, und zwar für beide Fixpunkte gemeinsam

$$\alpha_2^2 - 2\alpha_2 - 5 = 0. \quad \underline{10}$$

Also ist der kritische Bifurkationsparameter an dem der 2-Zyklus in den 4-Zyklus übergeht

$$\alpha_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.4495\dots \quad \underline{11}$$

Daß beide Fixpunkte gleichzeitig instabil werden ist plausibel und folgt auch sofort aus 5, denn die Steigung von $f^2(x)$ ist an beiden Punkten gleich groß:

$$f^{2'}(x_1) = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_2)f'(f(x_2)) = f^{2'}(x_2). \quad \underline{12}$$

Es ist nicht überraschend, daß bei wachsendem α auch der Zyklus der Periode 4 instabil wird. Es tritt eine ganze *Kaskade von Periodenverdopplungen* bei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ auf. Im Intervall $\alpha_k < \alpha < \alpha_{k+1}$ existiert dabei ein stabiler Grenzyklus der Periode 2^k . Mathematisch kann man statt des Grenzyklus die iterierte Funktion $f^{2^k}(x)$ betrachten, die einen Satz von 2^k verschiedenen stationären Fixpunkten aufweist.

Interessant ist, daß die kritischen Punkte α_k immer dichter beieinander liegen. Wie zunächst empirisch festgestellt wurde und dann auch analytisch begründet werden konnte, genügen die α_k dem Gesetz einer geometrischen Folge die zu einem Häufungspunkt α_∞ konvergiert:

$$\alpha_k \simeq \alpha_\infty - \frac{1}{\delta^k}. \quad \underline{13}$$

Die Zahl δ ist eine Konstante, die sich aus dem Verhältnis

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \quad \underline{14}$$

bestimmen läßt. Für ihren Zahlenwert findet man numerisch

$$\delta = 4.669201 \dots \quad 15$$

und der Häufungspunkt liegt bei

$$\alpha_\infty = 3.569944 \dots \quad 16$$

Die Kaskade von Periodenverdopplungen wurde erstmals von Großmann und Thomae untersucht.[†] Mitchell Feigenbaum[‡] konnte zeigen, daß das Verhalten 13 nicht auf die logistische Abbildung beschränkt ist, sondern *universelle Gültigkeit* hat für eine große Klasse iterativer Abbildungen[§].

Überraschenderweise gilt auch der Zahlenwert 15 universell, δ wird daher als die *Feigenbaum-Konstante* bezeichnet. Im wesentlichen genügt es, daß die iterierte Funktion glatt ist und ein quadratisches Maximum aufweist. Die mathematischen Eigenschaften der Bifurkationskaskade wurden ausführlich studiert, für einen Überblick siehe z.B. H. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH Verlag, 1989.

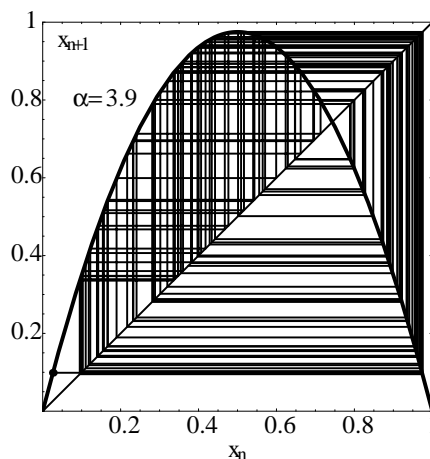


Abb. VII.32: Eine chaotische Trajektorie der logistischen Abbildung für $\alpha = 3.9$.

Besonders interessant ist die Frage, was jenseits von α_∞ geschieht. Bei $\alpha = \alpha_\infty$ liegt offenbar ein Zyklus mit „Periode unendlich“ vor, also eine aperiodische, sich niemals wiederholende Lösung. $\alpha > \alpha_\infty$ ist der Bereich des *Chaos*, der gekennzeichnet ist durch irregulär und ungeordnet erscheinende Trajektorien. Fig. VII.32 zeigt exemplarisch einen Ausschnitt aus einer solchen chaotischen Lösung, berechnet für $\alpha = 3.9$.

[†]S. Großmann und S. Thomae, *Z. Naturforsch.* **32a**, 1353 (1977)

[‡]Mitchell *Feigenbaum*, amerik. Physiker und Mathematiker, geb. 1945 in Philadelphia. F. studierte Elektrotechnik am City College of New York und Physik am MIT, wo er 1970 mit einer Arbeit aus der Hochenergiephysik promovierte. 1974 ging er zum Los Alamos National Laboratory, wo er sich mit Fragen der Turbulenz und der nichtlinearen Dynamik befasste. F. wurde 1982 Professor an der Cornell Universität und leitet heute das Labor für Mathematische Physik an der Rockefeller University in New York. Um 1976 entdeckte F., zunächst in numerischen Experimenten zur logistischen Abbildung, die Universalität der Periodenverdopplungs-Kaskade und die heute nach ihm benannte Konstante. 1986 wurde F. (gemeinsam mit dem Albert Libchaber, der die Periodenverdopplungen bei Flüssigkeitsströmungen experimentell nachwies) der Wolf-Preis in Physik verliehen.

[§]M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978)

Das Attraktordiagramm der logistischen Abbildung

Sehr aufschlußreich und von beeindruckender Komplexität ist das in Abb. VII.33 dargestellte Attraktordiagramm der logistischen Abbildung. Zu jedem Wert von α auf der Abszisse werden die von einer Trajektorie besuchten Werte in Ordinatendirection als Punktwolke eingetragen. Dabei werden die ersten Iterationsschritte (hier 500) weggelassen, um „Einschwingvorgänge“ (Transienten) auszublenden und den asymptotischen Attraktor selbst darzustellen. Die nachfolgenden jeweils 200 Iterationen sind dann in das Bild eingetragen.

Im linken Teil des Bildes erkennt man die ersten Segmente der Bifurkationskaskade: Bei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ spaltet der Attraktor in 2, 4, 8 Äste auf. Die weiteren kritischen Punkte α_k folgen gemäß 13 so dicht aufeinander, daß sie in der Abbildung nicht mehr aufgelöst werden. Jenseits von α_∞ sieht man kontinuierliche Bänder, die mehr oder minder gleichmäßig grau gefärbt sind. Die grauen Bereiche werden von einer Art „Narben“ durchzogen. Offenbar werden diese Stellen häufiger von der Trajektorie aufgesucht, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P(x)$ des Attraktors ist also hier erhöht.

Man findet, daß im chaotischen Bereich $\alpha > \alpha_\infty$ die Bahnen auf ein Teilintervall von $[0, 1]$ beschränkt sind. Dessen Grenzen erhält man als $x_{\max}(\alpha) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\alpha$ und $x_{\min}(\alpha) = f^2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}\alpha^2(4 - \alpha)$. Im Grenzfall $\alpha = 4$ wird demnach das volle Einheitsintervall durchlaufen. Der Attraktor hat dabei die Eigenschaft, daß er das Intervall vollständig überdeckt. Genauer: Zu jedem Punkt $x \in [0, 1]$ und jedem $\epsilon > 0$ läßt sich ein $n(\epsilon)$ finden sodaß gilt $|x_n - x| < \epsilon$. Die Trajektorie kommt also jedem Punkt beliebig nahe, wenn man lange genug wartet.

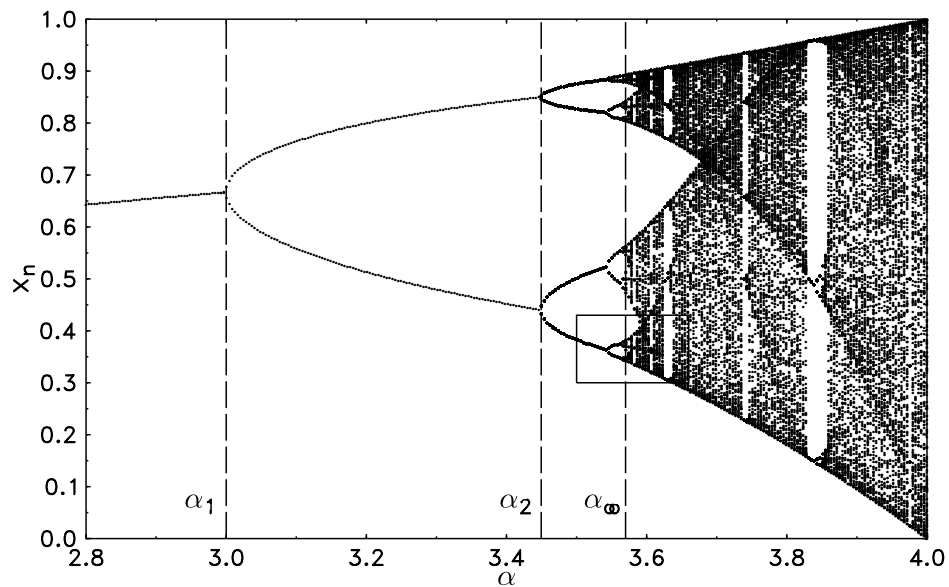


Abb. VII.33: Das Attraktordiagramm der logistischen Abbildung (Feigenbaum-Diagramm) zeigt die iterierten Werte x_n in Abhängigkeit vom Parameter α . Zu sehen ist eine Kaskade von Periodenverdopplungen und oberhalb von $\alpha_\infty \simeq 3.569944$ ein chaotischer Bereich, der aber wieder von Fenstern mit regulären Lösungen durchsetzt ist. Der Bereich des Kästchens ist in Abb. VII.34 vergrößert dargestellt.

Reduziert man, von $\alpha = 4$ kommend, den Parameter, so treten verschiedene interessante Phänomene auf. So findet man bei Unterschreitung von $\alpha'_1 \simeq 3.6785$ eine *Bandaufspaltung*. Hatte der chaotische Attraktor vorher ein zusammenhängendes Intervall ausgefüllt, so spaltet dieses bei $\alpha = \alpha'_1$ in zwei disjunkte Bereiche auf, wie in Abb. VII.33 deutlich zu sehen ist. Die Trajektorie springt dabei alternierend zwischen den beiden „Teilbändern“ hin und her. Bei weiterer Reduktion von α spalten auch die Teilbänder ihrerseits wieder auf, in 4 Teile bei $\alpha'_2 \simeq 3.5926$, und so weiter. Ähnlich der Bifurkationskaskade $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\infty$ des regulären Attraktors gibt es also auch eine Art von gegenläufiger Bifurkationskaskade $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_\infty$ des chaotischen Attraktors. Beide Kaskaden treffen sich in einem gemeinsamen Grenzpunkt $\alpha_\infty = \alpha'_\infty$.

Weiter fällt bei Betrachten des Attraktordiagramms Abb. VII.33 auf, daß eingebettet in den chaotischen Bereich auch *Fenster periodischer Lösungen* auftreten. Besonders markant ist der Bereich mit Lösungen der Periode 3, die oberhalb von $\alpha \simeq 3.8283$ auftreten. Dies hängt zusammen mit einem Fixpunkt der dreifach iterierten Abbildung der an der Stelle des Maximums von $f(x)$, also bei $x = \frac{1}{2}$ auftritt:

$$f^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad 17$$

Man bestätigt leicht, daß dies bei $\alpha_{s3} = 1 + \sqrt{8} \simeq 3.8284$ geschieht. Der Punkt $x = \frac{1}{2}$ hat deshalb eine besondere Bedeutung, weil hier die Ableitung verschwindet, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Wegen

$$\frac{d}{dx}f^3(x) = f'(f^2(x))f'(f(x))f'(x) \quad 18$$

überträgt sich diese Eigenschaft auch auf alle iterierten Abbildungen. Damit ist sichergestellt, daß der Fixpunkt 17 stabil ist. Man spricht hier sogar von einem *superstabilen Zyklus*, da der Betrag der Ableitung von $f^n(x)$, die über die Stabilität entscheidet, den kleinstmöglichen Wert, nämlich Null annimmt. Wegen der Stetigkeit der Abbildung als Funktion des Parameters ist der Periode-3-Zyklus auch in einer endlichen Umgebung von α_{s3} noch stabil. Nach unten hin grenzt das Stabilitätsfenster an den chaotischen Bereich.

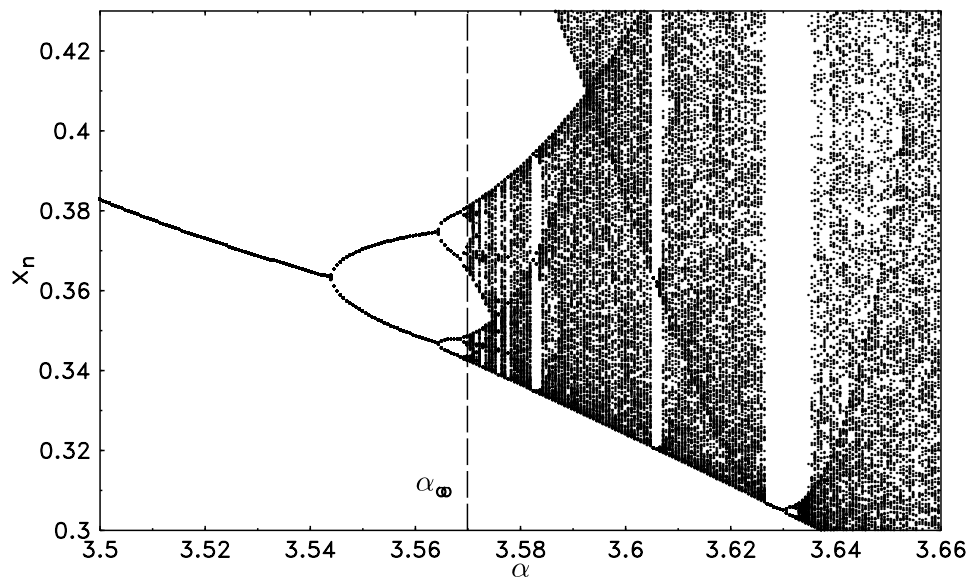


Abb. VII.34: Ein kleiner Ausschnitt des Attraktordiagramms der logistischen Abbildung zeigt eine ganz ähnliche Struktur wie in Figur VII.33.

Bei Anwachsen von α über α_{s3} hinaus findet man auch hier wieder eine Kaskade von Bifurkationen mit Periodenverdopplung, d.h. aus dem 3-Zyklus wird ein 6-Zyklus usw. Die Verdopplungen folgen immer dichter aufeinander bis wieder chaotische Lösungen entstehen.

Diese Betrachtung ist nicht auf den Zyklus der Periode 3 beschränkt, sondern gilt genauso auch für beliebige höhere Periodenlängen. Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es superstabile Zyklen (deren Anzahl mit m sogar exponentiell anwächst) der Periodenlänge m , definiert durch

$$f^m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad \underline{19}$$

Sie sind jeweils von einem kleinen Fenster regulärer zyklischer Bahnen in der ansonsten chaotischen Region umgeben.

Sehr interessant ist es, sich das Attraktordiagramm im Detail anzuschauen. Abb. VII.34 zeigt einen kleinen Teilausschnitt $\alpha = 3.52$ bis $\alpha = 3.65$ am Rand des 3-Zyklus-Fensters. Die Übereinstimmung mit dem vollständigen Attraktordiagramm Abb. VII.33 ist verblüffend. Zwar gibt es kleine Unterschiede in der Form beider geometrischer Gebilde, deren Struktur ist aber sehr ähnlich. Diese Eigenschaft – ein Teilausschnitt sieht genauso aus wie das ganze Bild – wird als *Selbstähnlichkeit* (im Parameterraum) bezeichnet. Beim Attraktordiagramm der logistischen Abbildung läßt sich der Prozeß sukzessiver Ausschnittvergrößerungen ad infinitum fortsetzen: Auch in Abb. VII.34 findet man wieder Teilbereiche, die dem Ganzen ähneln, und so weiter, ohne Ende.

Der Lyapunov-Exponent der logistischen Abbildung

Im nichtchaotischen Bereich läßt sich der Lyapunov-Exponent recht einfach analytisch berechnen. Betrachten wir zunächst den Parameterbereich $\alpha < \alpha_1 = 3$. Hier besteht ein stabiler Fixpunkt bei $x_{s2} = 1 - 1/\alpha$, siehe 2. Zu berechnen ist

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \ln |f'(x_l)|. \quad \underline{20}$$

Durch den Grenzprozeß wird der Einfluß von Transienten ausgeschaltet. Wegen $x_l \rightarrow x_{s2}$ trägt nur der Fixpunkt bei, also reduziert sich die Summe auf einen einzigen Term:

$$\begin{aligned} \sigma &= \ln |f'(x_{s2})| = \ln |\alpha(1 - 2x_{s2})| = \ln |\alpha(1 - 2 + 2/\alpha)| \\ &= \ln |2 - \alpha|. \end{aligned} \quad \underline{21}$$

Diesem Resultat ist zu entnehmen, daß der Lyapunov-Exponent bei $\alpha \rightarrow 2$ logarithmisch divergiert, $\sigma \rightarrow -\infty$. Dies geschieht natürlich gerade dort, wo die Ableitung der Funktion f am Fixpunkt verschwindet, was einer besonders schnellen Annäherung an den Attraktor entspricht. Diese Situation haben wir als superstabil bezeichnet. Bei Annäherung an den Parameterwert $\alpha \rightarrow \alpha_1 = 3$ *verschwindet der Lyapunov-Exponent*. Dies ist eine generelle Eigenschaft von Bifurkationspunkten, da hier der alte Attraktor seine Stabilität verliert und der neue noch nicht geboren ist. Jenseits von α_1 wird der Periode-2-Zyklus zum Attraktor, deshalb sinkt σ wieder ab zu negativen Werten.

Es ist nicht schwierig, den Lyapunov-Exponenten im Intervall $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ zu berechnen. Da nun ein periodischer Attraktor vorliegt, der abwechselnd zwischen den Punkten x_1 und x_2 aus Gl. 8 springt, reduziert sich 20 auf eine Summe aus zwei Termen:

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln |f'(x_1)| + \frac{1}{2} \ln |f'(x_2)| = \frac{1}{2} \ln |f'(x_1)f'(x_2)|. \quad \underline{22}$$

Für die Ableitungen finden wir

$$f'(x_{1,2}) = \alpha(1 - 2x_{1,2}) = -1 \mp \sqrt{(\alpha + 1)(\alpha - 3)} \quad \underline{23}$$

und der Lyapunov-Exponent ist

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln |1 - (\alpha + 1)(\alpha - 3)|. \quad \underline{24}$$

Diese Funktion beginnt mit dem Wert $\sigma = 0$ bei $\alpha = \alpha_1$, fällt dann monoton ab und divergiert bei $\alpha = 1 + \sqrt{5}$. Dies ist wieder der superstabile Punkt des 2-Zyklus, denn man bestätigt leicht, daß

$$f^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{bei} \quad \alpha = 1 + \sqrt{5}. \quad \underline{25}$$

Danach wächst σ wieder an und erreicht schließlich den Wert $\sigma = 0$. Dies geschieht, wenn das Argument des Logarithmus in 25 den Wert -1 annimmt, also $1 - (\alpha + 1)(\alpha - 3) = -1$, was auf die quadratische Gleichung 10 führt. Deren Lösung $\alpha = \alpha_2 = 1 + \sqrt{6}$ ist der Bifurkationspunkt, an dem der 2-Zyklus instabil wird. Im weiteren Verlauf der Bifurkationskaskade $\alpha_2 < \alpha < \alpha_\infty$ wiederholt sich das Spiel und der Lyapunov-Exponent pendelt im Intervall $0 \geq \sigma > -\infty$.

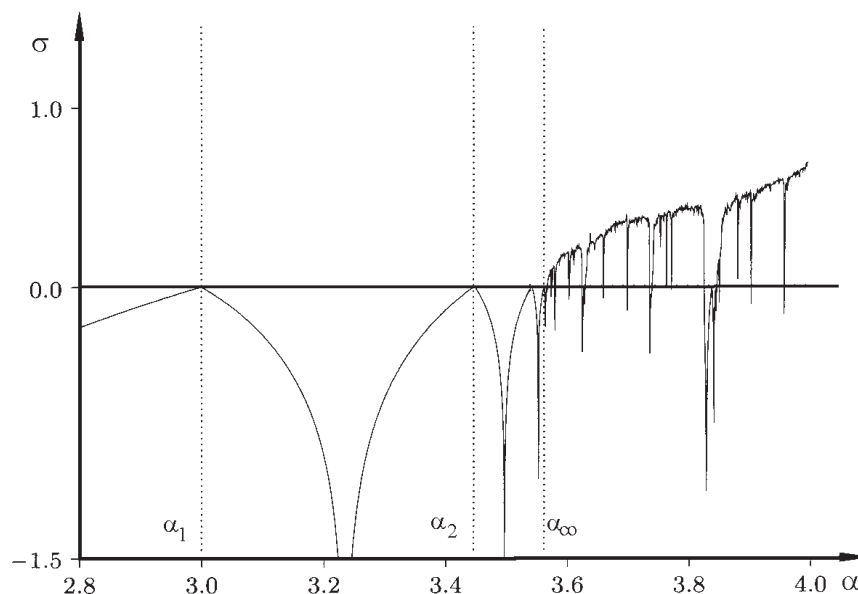


Abb. VII.35: Numerisch berechnete Werte des Lyapunov-Exponenten σ der logistischen Abbildung. Für $\sigma > 0$ ergeben sich chaotische Trajektorien.

Etwas qualitativ Neues geschieht im chaotischen Bereich, $\alpha > \alpha_\infty$, denn hier nimmt σ positive Werte an. Dies ist in Bild VII.35 dargestellt, für das der Lyapunov-Exponent numerisch ermittelt wurde. Links von $\alpha = \alpha_\infty$ sieht man den schon beschriebenen Bereich mit negativen σ . Für $\alpha > \alpha_\infty$ wird σ positiv und steigt, im Mittel betrachtet, mit wachsendem α an. Im Grenzfall $\alpha = 4$ ergibt sich der maximale Wert $\sigma = \ln 2 \approx 0.6931$, wie in Aufg. 25.2 gezeigt wird.

Der chaotische Bereich wird aber immer wieder von Fenstern mit regulären Lösungen durchbrochen, in denen σ negativ wird. Die Abbildung kann der Komplexität der Funktion $\sigma(\alpha)$ nur unzureichend gerecht werden. Wegen der beschränkten Auflösung sind die Fenster nur andeutungsweise zu erkennen. Die im Bild nur andeutungsweise sichtbaren nach unten gerichteten Spitzen sind in Wirklichkeit Pole, die sich bis $\sigma \rightarrow -\infty$ erstrecken. Eine realistische Abbildung von $\sigma(\alpha)$ würde, mit endlicher Strichdicke gemalt, einen weitgehend homogen schwarz gefärbten Block zeigen, der sich bis $-\infty$ erstreckt. Es gibt unendlich viele Fenster mit stabilen Zyklen, und man kann sogar zeigen, daß sie im gesamten reellen Intervall $0 < \alpha < 4$ *dicht liegen*: In jeder noch so kleinen Umgebung eines jeden Punktes α liegen stabile Zyklen!

Auch die Funktion $\sigma(\alpha)$, hat die Eigenschaft der *Selbstähnlichkeit* wie schon das Attraktordiagramm VII.33 Auf jeder Vergrößerungsstufe sehen die Teilausschnitte wieder so aus wie das ganze Bild.

25.2 Aufgabe: Logistische Abbildung und Bernoulli-Shift Die Abbildung

$$y_{n+1} = 2y_n \bmod 1 \quad \text{mit} \quad y_n \in [0, 1] \quad \underline{1}$$

wird als Sägezahnabbildung oder auch *Bernoulli-Shift* bezeichnet.

a) Diskutieren Sie die durch die Bernoulli-Shift erzeugten Trajektorien y_n in Abhängigkeit vom Startwert y_0 .

b) Zeigen Sie, daß für den Parameter $\alpha = 4$, also im Bereich des voll entwickelten Chaos, die logistische Abbildung und die Bernoulli-Shift zueinander äquivalent sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Variablentransformation

$$x_n = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi y_n)) = \sin^2(\pi y_n) \quad \underline{2}$$

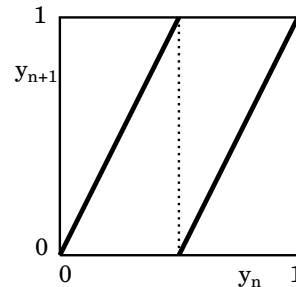
c) Ermitteln Sie die Häufigkeitsverteilung $P(x)$ mit der eine „typische“ Trajektorie x_n der logistischen Abbildung die verschiedenen Punkte im Intervall $0 < x < 1$ aufsucht und berechnen Sie damit den Lyapunov-Exponenten σ .

Lösung:

a) Der Graph der Funktion $f(y) = 2y \bmod 1$ besteht aus zwei gegeneinander versetzten Geradenstücken der Steigung 2 und ist in der Figur dargestellt. Da überall $f'(y) = 2 > 1$ gilt, kann es keine stabilen Fixpunkte geben. Die iterierte Lösung von 1 ist einfach.

$$y_n = 2^n y_0 \bmod 1 . \quad \underline{3}$$

Abb. VII.36: Die Abbildungsfunktion der Bernoulli-Shift.



Damit sind also alle Iterierten eines Startwerts y_0 explizit bekannt, dennoch ist die Abbildung chaotisch! Verantwortlich dafür ist der Faktor 2^n , der dafür sorgt, daß kleinste Abweichungen im Startwert y_0 exponentiell verstärkt werden. Wie in der Figur dargestellt, wird ein Intervall Δy durch die Bernoulli-Shift um einen Faktor 2 auf die Länge $2\Delta y$ gedehnt. Werte, die dabei in den Bereich $y > 1$ geraten, werden durch die Modulo-Bildung auf das Einheitsintervall zurückgefaltet. Diese wiederholte *Abfolge von Streckung und Faltung* ist charakteristisch für chaotische Abbildungen. Auf diese Weise kommt es zu einer gründlichen Durchmischung der Trajektorien und zu einer sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Die Bernoulli-Shift-Abbildung läßt sich gut veranschaulichen, wenn man y als Zahl in *Binärdarstellung* hinschreibt:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k} \quad \text{also} \quad y = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \dots \quad \text{mit} \quad b_k = 0 \text{ oder } 1 \quad \underline{4}$$

Eine Verdopplung von y entspricht der *Linksverschiebung* (daher der Name) der Binärziffern b_k und die Modulo-Bildung sorgt dafür, daß die Stelle vor dem Komma abgeschnitten wird:

$$\begin{aligned} f(y) &= b_1.b_2 b_3 b_4 \dots \text{ mod } 1 \\ &= 0.b_2 b_3 b_4 b_5 \dots \end{aligned} \quad \underline{5}$$

Nun wird die Wirkung der Bernoulli-Shift klar: Mit jeder Iteration werden die „hinteren Stellen“ in der binären Entwicklung verstärkt. Ist der Startwert y_0 mit einer Genauigkeit von 2^{-m} bekannt, dann ist diese Information nach m Iterationsschritten aufgebraucht. Danach bleibt nur noch „numerisches Rauschen“ übrig, die Trajektorie irrt unvorhersagbar durch das Einheitsintervall.

Mathematisch betrachtet besteht noch ein subtiler Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Werten der Anfangsbedingung. Eine *rationale* Zahl (ein Bruch p/q) y_0 hat eine Binärdarstellung die (nach einer endlichen Anzahl von Schritten) *periodisch* wird. Demzufolge wird auch die gemäß 1 mit 5 gebildete Trajektorie y_n periodisch. Ein einfaches Beispiel liefert der Zyklus $2/3, 1/3, 2/3, \dots$, denn

$$\begin{aligned} y_0 &= 0.101010\dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3} \\ y_1 &= 0.010101\dots = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{3} \\ y_2 &= 0.101010\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die rationalen Zahlen liegen *dicht* auf der reellen Achse. Es gibt also unendlich viele Startlösungen, die zu periodischen Trajektorien führen, und in jeder noch so kleinen Umgebung ϵ eines Punktes y findet man solche Lösungen. Andererseits aber hat die Menge der rationalen Zahlen das *Maß Null*, es sind also „untypische“ Zahlen. Nimmt man einen „typischen“ Startwert y_0 , etwa eine Zufallszahl im Intervall $[0, 1]$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß y_0 rational ist und somit zu einer periodischen Trajektorie führt beliebig klein.

Für den Physiker spielen rationale Anfangswerte wegen der endlichen Meßgenauigkeiten keine Rolle. Anders ist es bei numerischen Simulationen: Wenn der benutzte Rechner die Zahlen mit m Bits Genauigkeit abspeichert, wird spätestens nach m Schritten die Simulation der Bernoulli-Shift sinnlos. Glücklicherweise spielt es für viele Zwecke keine Rolle, ob eine zyklische Lösung mit sehr langer Periode oder eine echt nichtperiodische Lösung vorliegt.

b) Man transformiert die logistische Gleichung

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad \underline{6}$$

auf die neue Variable y_n . Die rechte Seite wird zu

$$\begin{aligned} 4\frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi y_n))\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi y_n)\right) \\ = 1 - \cos^2(2\pi y_n) = 1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi y_n)) \\ = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi y_n)), \end{aligned} \quad \underline{7}$$

also lautet 6

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi y_{n+1})) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi y_n)) \quad \underline{8}$$

oder

$$\cos(2\pi y_{n+1}) = \cos(4\pi y_n). \quad \underline{9}$$

Diese Gleichung wird gelöst durch

$$y_{n+1} = 2y_n \bmod 1, \quad \underline{10}$$

also die Bernoulli-Shift-Abbildung. Zurücktransformiert auf die Variable x lautet die Lösung 10

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi 2^n y_0)) = \sin^2(\pi 2^n x_0) \\ &= \sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x}). \end{aligned} \quad \underline{11}$$

Wie unter a) diskutiert, führt dies für fast alle Anfangswerte x_0 zu chaotischen Trajektorien, die sich auch numerisch nicht berechnen lassen, wenn n groß wird.

c) Im Definitionsbereich der Bernoulli-Shift-Abbildung 1 ist kein Punkt besonders ausgezeichnet. Die Lösung 3 wird für typische, also irrational gewählte Anfangsbedingungen alle Zahlen im Intervall $(0, 1)$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufsuchen, also $P(y) = 1$. Für die entsprechende Wahrscheinlichkeit der logistischen Abbildung impliziert dies

$$\begin{aligned} P(x) &= 2P(y)\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sin(\pi y)\cos(\pi y)} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned} \quad \underline{12}$$

Der Faktor 2 tritt auf, da die Transformationsgleichung zu jedem Wert x zwei Lösungen y symmetrisch um $y = 1/2$ hat. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P(x)$ ist minimal bei

$x = 1/2$ und steigt an den Rändern des Einheitsintervalls an. Bei $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow 1$ divergiert die Funktion, bleibt aber integrierbar. Sie ist auf Eins normiert. Zur Berechnung des Lyapunov-Exponenten (7) ersetzen wir den Mittelwert über die Zeitreihe durch einen Mittelwert über die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \ln |f'(x_l)| \\ &= \int_0^1 dx P(x) \ln |f'(x)| . \end{aligned} \tag{13}$$

Systeme bei denen diese Ersetzung *Zeitmittel* \leftrightarrow *Phasenraummittel* zulässig ist werden als *ergodisch* bezeichnet. Der Nachweis der Ergodizität eines Systems ist im allgemeinen nicht einfach. Da $f'(x) = 2$ für alle x , und da die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$ auf Eins normiert ist, ergibt sich für den Lyapunov-Exponenten der logistischen Abbildung bei $\alpha = 4$

$$\sigma = \ln 2 = 0.6931 \dots , \tag{14}$$

in Übereinstimmung mit dem numerischen Resultat aus Figur. VII.35.

25.3 Beispiel: Der periodisch angestoßene Rotator

In diesem Abschnitt werden wir ein weiteres Beispiel einer diskreten Abbildung kennenlernen, die trotz ihrer einfachen Form zu komplexen Lösungen und chaotischem Verhalten führt. Dabei treten einige neue Begriffe auf, und es wird ein Weg beschrieben, der von quasiperiodischer zu chaotischer Bewegung führt.

Im Gegensatz zur logistischen Abbildung, die als ein rein mathematisches Beispiel eingeführt wurde, betrachten wir nun die Bewegung eines konkreten mechanischen Systems, nämlich eines unter dem Einfluß einer äußeren Kraft stehenden gedämpften Rotators. Die zugehörige Bewegungsgleichung für den Drehwinkel θ lautet

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} = M(\theta, t) . \tag{1}$$

Hier ist β ein Reibungsparameter und $M(\theta, t)$ beschreibt das vorgegebene zeitabhängige Drehmoment, dividiert durch das Trägheitsmoment des Rotators. Die äußere Kraft soll *periodisch* von der Zeit abhängen. Das Problem vereinfacht sich, wenn die Kraft in kurzen impulsartigen Stößen einwirkt, die im Abstand der Periode T aufeinander folgen:

$$M(\theta, t) = M(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) . \tag{2}$$

Die nicht-autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} - M(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = 0 \tag{3}$$

läßt sich wie üblich umschreiben in ein autonomes System von *drei* gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Mit $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$ und $z = t$ ergibt sich

$$\dot{x} = y ,$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\beta\dot{\theta} + M(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z - nT), \\ \dot{z} &= 1, \end{aligned} \quad \underline{4}$$

Wegen der speziellen Form der Kraft 2 wird der Rotator immer wieder ruckartig beschleunigt, bewegt sich ansonsten aber frei, nur der Reibung unterworfen. Dadurch wird es möglich, die Bewegungsgleichungen exakt aufzuintegrieren. Zu diesem Zweck führen wir die diskretisierten Variablen

$$x_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(nT - \epsilon) \quad , \quad y_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(nT - \epsilon) \quad \underline{5}$$

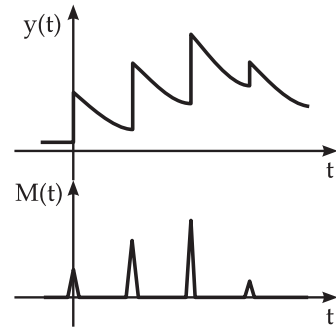
ein. Position und Geschwindigkeit werden also kurz vor jedem der Impulse abgetastet. Nun betrachten wir den Impuls Nummer n und integrieren die Bewegungsgleichung über das n te Zeitintervall $nT - \epsilon < t < (n+1)T - \epsilon$. Da in diesem Intervall nur ein Impuls beiträgt, lautet die Bewegungsgleichung für y

$$\dot{y} = -\beta y + M(x)\delta(t - nT) . \quad \underline{6}$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung, gültig zwischen den Impulsen, läßt sich sofort angeben:

$$y(t) = a e^{-\beta t} \quad \text{für} \quad t \neq nT \quad \underline{7}$$

Abb. VII.37: Periodische Kraftstöße (unten) bewirken sprunghafte Geschwindigkeitsänderungen (oben). Zwischen den Stößen ist die Wirkung der Reibung zu erkennen.



Der Kraftstoß führt zu einem sprunghaften Anstieg der Geschwindigkeit gemäß

$$\begin{aligned} y(nT + \epsilon) - y(nT - \epsilon) &= \int_{nT - \epsilon}^{nT + \epsilon} dt \quad (-\beta y + M(x) \delta(t - nT)) \\ &= -2\epsilon\beta y(nT) + M(x(nT)) \\ &\simeq M(x(nT)) \end{aligned} \quad \underline{8}$$

wie schematisch in Abb. VII.37 dargestellt. Mit 7 und 8 ergibt sich

$$y(t) = (y_n + M(x_n))e^{-\beta(t-nT)} \quad \text{für} \quad nT < t < (n+1)T . \quad \underline{9}$$

Die Winkelkoordinate $x(t)$ ergibt sich daraus durch Integration:

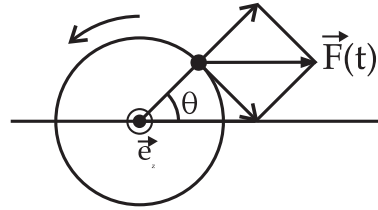
$$x(t) = x_n + \int_{nT}^t dt' y(t') = x_n - \frac{1}{\beta} (e^{-\beta(t-nT)} - 1) (y_n + M(x_n)) . \quad \underline{10}$$

Bei $t = (n+1)T - \epsilon$ genommen liefern die Gleichungen 9 und 10 also eine *zweidimensionale diskrete Abbildung*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta T})(y_n + M(x_n)) \bmod 2\pi, \\ y_{n+1} &= e^{-\beta T}(y_n + M(x_n)). \end{aligned} \quad \underline{11}$$

Durch die Modulbildung wird berücksichtigt, daß es sich bei x um eine periodische Winkelkoordinate handelt. Das System 11 beschreibt eine Poincaré-Abbildung des periodisch angestoßenen Rotators.

Abb. VII.38: Die Kraft $\vec{F}(t)$ soll unabhängig vom Auslenkungswinkel θ des Rotators immer in die gleiche Richtung weisen.



Die Winkelabhängigkeit des Drehmoments $M(x)$ wird durch das spezielle physikalische System bestimmt. Läuft ein Körper auf einer Kreisbahn um und wirkt auf ihn eine Kraft, die immer in die gleiche Richtung weist, vgl. Abb. VII.38, dann ist das Drehmoment proportional zum Sinus des Winkels, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -r F \sin \theta \vec{e}_z$. Zusätzlich berücksichtigen wir noch ein vom Winkel unabhängiges Drehmoment M_0 , also mit $K_0 = r F$:

$$M(x) = M_0 + K_0 \sin x. \quad \underline{12}$$

Das System 11 mit dem nichtlinearen Kraftgesetz 12 wird als die *dissipative Kreisabbildung* bezeichnet („dissipativ“ da es sich um den Grenzfall starker Dämpfung handelt) und besitzt sehr interessante dynamische Eigenschaften.

Die Gleichungen lassen sich noch etwas übersichtlicher schreiben, indem man folgende Abkürzungen einführt:

$$\begin{aligned} b &= e^{-\beta T}, \quad \Omega = \frac{1}{\beta} M_0, \\ K &= \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta T}) K_0, \\ r_n &= \frac{1}{b\beta}(1 - e^{-\beta T}) y_n - \Omega. \end{aligned} \quad \underline{13}$$

Bei r_n handelt es sich um eine umskalierte Geschwindigkeitskoordinate. Einsetzen in 11 führt auf die folgende Form der dissipativen Kreisabbildung:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + br_n + \Omega - K \sin x_n \bmod 2\pi, \\ y_{n+1} &= e^{-\beta T}(y_n + M(x_n)). \end{aligned} \quad \underline{14}$$

Diese Gleichungen kann man numerisch iterieren und ihre Lösungen für verschiedene Werte der Parameter b , K , und Ω studieren. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich im *Grenzfall starker Dämpfung*, also $\beta T \gg 1$ oder $b \ll 1$. (Um die Reibung zu überwinden muß K_0 dabei gemäß 13 linear mit c anwachsen.) In diesem Fall wird die Geschwindigkeit y_n nach jedem „Kick“ sofort wieder auf Null gebremst. Demzufolge entkoppelt die

Gleichung für den Winkel zu

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \bmod 2\pi \\ &= x_n + \Omega - K \sin x_n \bmod 2\pi . \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichung wird als die *eindimensionale Kreisabbildung* oder auch als *Standardabbildung* bezeichnet. Ihre mathematischen Eigenschaften wurden intensiv studiert, insbesondere von dem russischen Mathematiker V.I. Arnold*. Sie erhält ihre interessanten Eigenschaften durch die Nichtlinearität der Sinusfunktion.

Betrachten wir für einen Moment den trivialen Grenzfall $K = 0$, also die *lineare Kreisabbildung*

$$x_{n+1} = x_n + \Omega \bmod 2\pi . \tag{16}$$

Der Rotator bewegt sich in äquidistanten Schritten Ω vorwärts. Wird nach einer endlichen Zahl von Schritten wieder die alte Position erreicht, dann handelt es sich um eine *periodische Bewegung*. Das geschieht offenbar genau dann, wenn $\Omega/2\pi$ eine *rationale Zahl* ist,

$$\Omega = 2\pi \frac{p}{q} \quad p \text{ und } q \in \mathbb{Z}, \quad \text{teilerfremd} . \tag{17}$$

Dies bedeutet: Nach q Zeitschritten hat der Rotator p volle Umläufe gemacht, steht also (modulo 2π) wieder in der Ursprungsposition. Es liegt also eine Lösung mit der Periode q vor. Ist $\Omega/2\pi$ hingegen eine *irrationale Zahl*, wird der Ausgangspunkt x_0 auch nach beliebig langer Zeit nicht wieder getroffen. Allerdings treten Werte x_n in jeder beliebig kleinen Umgebung von x_0 auf. In solch einem Fall spricht man von *quasiperiodischer Bewegung*.

Um die Bewegung zu charakterisieren, kann man eine *Windungszahl* definieren:

$$W = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x_0) - x_0}{n} . \tag{18}$$

Hier ist $f^n(x_0)$ die n -fach iterierte Abbildungsfunktion (ohne Modulobildung) aus Gleichung 15. Die Windungszahl gibt also die mittlere Verschiebung pro Taktintervall an. $W = W(\Omega, K)$ hängt von beiden Parametern der Kreisabbildung ab. Im linearen Fall, $K = 0$, stimmt W gerade mit dem in 17 definierten Bruch p/q überein. Da die rationalen Zahlen zwar auf der reellen Achse dicht liegen, sie aber nur eine Menge vom Maß Null bilden, sind die „typischen“ Trajektorien quasiperiodisch.

Was geschieht nun, wenn die Nichtlinearität wirksam wird, also für $K \neq 0$ in der Kreisabbildung 16? Betrachten wir eine *periodische Lösung* mit rationaler Windungszahl $W = p/q$. Die Winkelkoordinate durchläuft einen Zyklus x_1, x_2, \dots, x_q der Länge q , der zu einer Endverschiebung von $x_q = x_1 + 2\pi p \bmod 2\pi = x_1$ führt, also

$$f^q(x_1) = x_1 + 2\pi p . \tag{19}$$

Am Anfang dieses Kapitels haben wir das Kriterium für die *Stabilität* einer diskreten Abbildung, im vorliegenden Fall der q -fach iterierten Funktion $f^q(x)$, kennengelernt: Die Ableitung der Funktion muß betragsmäßig kleiner als Eins sein, also

$$|f^{q'}(x_1)| = \left| \frac{d}{dx_1} f(f(\dots f(x_1))) \right| = \left| \prod_{i=1}^q f'(x_i) \right|$$

*V.I. Arnold, *Trans. of the Am. Math. Soc.* **42**, 213 (1965)

$$= \left| \prod_{i=1}^q (1 - K \cos x_i) \right| < 1 . \quad \underline{20}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, dann gehört x_1 (und da alle Punkte im Zyklus gleichberechtigt sind auch alle anderen x_i) zu einem stabilen periodischen Attraktor. Im linearen Fall, $K = 0$, hat die Ableitung immer den Wert $f^{q'}(x) = 1$. Es liegt marginale Stabilität vor, wo benachbarte Bahnen weder angezogen noch abgestoßen werden. Ist hingegen $0 < K < 1$ dann wird jede der Lösungen $\Omega_{p,q} = 2\pi p/q$ zu einem *periodischen Attraktor* mit einem Einzugsbereich endlicher Breite $\Delta\Omega_{p,q}$. Dies ist ein Beispiel für ein sehr interessantes Phänomen, das in vielen Bereichen der Physik auftritt. Schwingende Systeme, die durch zwei verschiedene Frequenzen gekennzeichnet sind, stellen sich – eine entsprechende Wechselwirkung vorausgesetzt – so ein, daß die Frequenzen *synchronisiert* sind, also in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Man spricht auch vom *Frequenzeinfang* (englisch: mode locking). Die beiden Frequenzen des hier betrachteten Systems sind zum einen durch die Taktlänge T und zum anderen durch die Stärke des Drehmoments M_0 bestimmt.

Der vielleicht früheste experimentelle Beleg für das Phänomen des Frequenzeinfangs wird dem holländischen Physiker Christian Huygens zugeschrieben. Er beobachtete, daß eine Reihe nebeneinander aufgehängter Pendeluhren (an deren Erfindung Huygens maßgeblich beteiligt war) anfangen, im gleichen Rhythmus zu schwingen, obwohl deren beschränkte Ganggenauigkeit ein Auseinanderdriften hätte erwarten lassen. Schon Huygens erkannte, daß die schwache Kopplung der Uhren über ihre gemeinsame Rückwand für die Synchronisierung verantwortlich sein mußte.

Die Größe der Frequenz-Einfangbereiche läßt sich aus 19 berechnen. Da dies für größere Periodenlängen q nur numerisch möglich ist, beschränken wir uns hier auf den einfachsten Fall $q = 1$. Wenn vollständige Synchronisation mit Windungszahl $W = 1$ vorliegt, wird 19 zu

$$f(x_1) = x_1 + 2\pi \quad \text{oder} \quad \Omega = K \sin x_1 + 2\pi . \quad \underline{21}$$

Die Stabilitätsbedingung 20 lautet

$$|1 - K \cos x_1| < 1 , \quad \underline{22}$$

was für Winkel $0 < x_1 < \pi/2$ oder $3\pi/2 < x_1 < 2\pi$ erfüllt ist. Aus 21 kann man die zugehörigen Werte von Ω ablesen:

$$2\pi - K < \Omega_{1,1} < 2\pi + K . \quad \underline{23}$$

Der Bereich des Frequenzeinfangs mit genau einer Umdrehung des Rotors pro Taktintervall hat also die Gestalt eines sich mit wachsendem K öffnenden Dreiecks. Genau die gleiche Überlegung führt auf den Einzugsbereich des Attraktors mit Windungszahl $W = 0$, also $p = 0$, $q = 1$:

$$-K < \Omega_{0,1} < K . \quad \underline{24}$$

Wegen der Periodizität der Winkelkoordinate genügt es, das Intervall $0 \leq \Omega \leq 2\pi$ zu untersuchen. Werte außerhalb dieses Bereichs bedeuten nur, daß der Rotator bei jedem Impuls zusätzliche volle Umdrehungen ausführt, was an der Dynamik nichts wesentliches ändert. In Abb. VII.39 sind die Grenzen der Bereiche 23 und 24 als Geraden eingezeichnet. Parameterwerte, für die eine periodische synchronisierte Bewegung auftritt, sind schraffiert eingezeichnet.

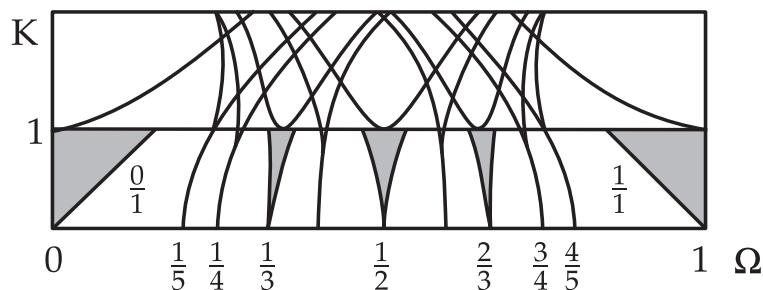


Abb. VII.39: Einige der Stabilitätsbereiche für die eindimensionalen Kreisabbildung in Abhängigkeit von den Parametern Ω und K . Die schraffierten Bereiche werden als „Arnold-Zungen“ bezeichnet. Auf den Linien in der oberen Hälfte ist die Bedingung der Superstabilität erfüllt.

Analoge Betrachtungen kann man für jede rationale Windungszahl $W = p/q$ anstellen. Einige der Stabilitätsbereiche (es gibt natürlich abzählbar unendlich viele) sind in Abb. VII.39 dargestellt. Die Breite dieser Bereiche, die auch als *Arnold-Zungen* bezeichnet werden, wächst mit K monoton an. Die aufsummierte Gesamtbreite aller Arnold-Zungen ist im linearen Grenzfall ($K = 0$) wie schon erwähnt gleich Null (Maß der rationalen Zahlen). Es kann gezeigt werden* daß die Arnold-Zungen bei $K = 1$ den gesamten Ω -Bereich überdecken:

$$\sum_{p,q} \Delta\Omega_{p,q} = 2\pi \quad \text{für } K = 1. \quad \underline{25}$$

Die Situation ist also genau komplementär zum Fall $K = 0$, die „typischen“ Lösungen sind jetzt periodisch (Frequenzeinfang), während die quasiperiodischen Lösungen das Maß Null haben.

Die Funktion $W(\Omega)$, also die Windungszahl in Abhängigkeit vom Frequenzparameter Ω bei $K = 1$, wird als *Teufelstreppe* bezeichnet, siehe Abb. VII.40. Es handelt sich um eine Funktion, die überall stetig aber nirgends differenzierbar ist. Zu jeder rationalen Zahl p/q gehört eine Treppenstufe; die Breite der Stufen nimmt mit wachsender Periodenlänge q ab, ihre Gesamtbreite umfaßt gemäß 25 das gesamte Intervall. Die Teufelstreppe hat die Eigenschaft der *Selbstähnlichkeit*, d.h. jede Ausschnittsvergrößerung ähnelt wieder dem Ganzen.

Überschreitet der Parameter der nichtlinearen Kopplung den Wert $K = 1$ dann verschmelzen die Arnold-Zungen. Damit ist verbunden, daß die quasiperiodischen Lösungen *chaotisch* werden, was sich am Auftreten positiver Lyapunov-Exponenten ablesen läßt. Gleichzeitig gibt es aber auch für $K > 1$ noch Bereiche periodischer Lösungen mit negativem Lyapunov-Exponenten. Beide Lösungstypen sind auf komplexe Weise miteinander verwoben.

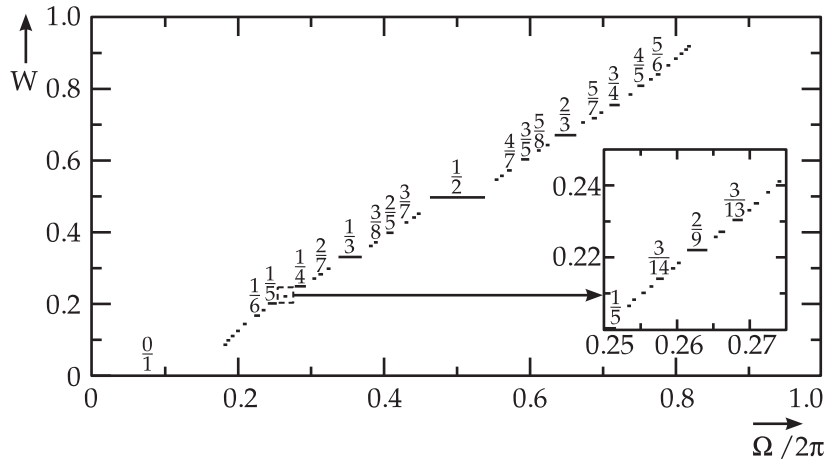


Abb. VII.40: Die Stufen der „Teufelstreppe“ sind Bereiche, in denen die Windungszahl „einrastet“, d. h. vom Frequenzparameter Ω unabhängig ist. Die Ausschnittsvergrößerung rechts deutet die selbstähnliche Struktur der Teufelstreppe an.

Auch bei der logistischen Abbildung hatten wir ja eine Vermischung regulärer und chaotischer Bewegung beobachtet, jetzt sind die Verhältnisse aber noch komplizierter, da nun *zwei* Parameter, Ω und K , unabhängig variiert werden können. Eine interessante Eigenschaft der chaotischen Lösungen ist, daß sie keine wohldefinierte Windungszahl aufweisen. Die Lösung bewegt sich derart ungeordnet, daß der Grenzwert in 18 nicht existiert. In der oberen Hälfte der Abb. VII.39 sind für $K > 1$ die Mittelpunkte einiger periodischen Bereiche als Linien eingetragen. Hier ist die schon auf Seite 517 eingeführte Bedingung der *Superstabilität* erfüllt, d.h. die Ableitung der iterierten Abbildungsfunktion eines q -Zyklus verschwindet, $f^{q'}(x) = 0$. Für die Periode $q = 1$ kann man diese Bedingung leicht auswerten. Die Lösung mit Windungszahl $W = 0$ hat als Fixpunkt-Bedingung

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{also} \quad \Omega - K \sin x_1 = 0 . \tag{26}$$

Dieser 1-Zyklus ist superstabil wenn gilt (siehe hierzu auch 15)

$$f'(x_1) = 0 \quad \text{also} \quad 1 - K \cos x_1 = 0 . \tag{27}$$

Mit dem aus 26 folgenden Wert x_1 liefert 27 die Bedingung für Superstabilität

$$K = \sqrt{1 + \Omega^2} \tag{28}$$

wie in Abb. VII.39 eingezeichnet. Die Bedingung für einen superstabilen Fixpunkt mit Windungszahl $W = 1$ folgt analog als

$$K = \sqrt{1 + (2\pi - \Omega)^2} . \tag{29}$$

Das Überschneiden der Kurven deutet darauf hin, daß bei gleichen Werten von Ω und K verschiedene stabile Lösungen miteinander koexistieren können. Es gibt im Bereich $K > 1$

*M.H. Jensen, P. Bak, T. Bohr: *Phys. Rev.* **A30**, 1960 (1984)

keinen eindeutigen Zusammenhang mehr zwischen den Parametern K , Ω und der Windungszahl W . Welche der Lösungen realisiert ist, hängt dann von der Anfangsbedingung für x ab.

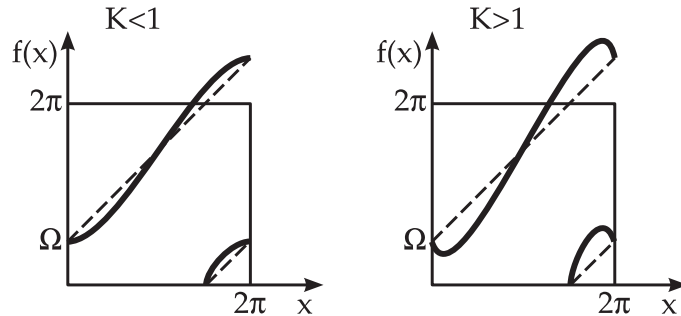


Abb. VII.41: (a) Die Abbildungsfunktion der Kreisfunktion ist für $K < 1$ monoton anwachsend. (b) Für $K > 1$ bildet sich ein Maximum aus und $f(x)$ ist nicht mehr invertierbar. Gestrichelt eingezeichnet ist die Funktion $f(x) = x + \Omega \bmod 2\pi$.

Das Auftreten chaotischer Lösungen ist mit einer qualitativen Veränderung der Abbildungsfunktion $f(x)$ verbunden. Wie Figur VII.41 zeigt, ist $f(x)$ für $K < 1$ eine monoton anwachsende Funktion. Im Fall $K > 1$ ist die nichtlineare Kopplung aber so stark, daß $f(x)$ die Form der Sinusfunktion widerspiegelt, d.h. es entstehen (quadratische) Maxima und Minima. Ganz ähnlich wie bei der früher behandelten logistischen Abbildung ist $f(x)$ für $K > 1$ *nicht invertierbar*. Dies ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Voraussetzung für das Auftreten von Chaos in eindimensionalen Abbildungen.

Das in der Teufelstreppe zum Ausdruck kommende komplexe Verhalten beim Frequenzeinfall ist experimentell gut bestätigt worden. Einfacher noch als mechanische Oszillatoren lassen sich nichtlineare elektrische Schwingkreise studieren. So wurde etwa der Frequenzeinfall in einem extern periodisch angetriebenen Schaltkreis aus einem supraleitenden Josephson-Übergang und einer Induktivität untersucht, der sich mathematisch durch die Kreisabbildung beschreiben läßt*.

Ergänzung: Es sei noch erwähnt, daß sich auch die logistische Abbildung aus Beisp. 25.1 als Bewegung eines periodisch angestoßenen Rotators interpretieren läßt. Dazu wird für die Winkelabhängigkeit des Drehmoments anstelle von 12 die (etwas künstlich konstruierte) Funktion

$$M(x) = K_0 \left((\alpha - 1)x - \frac{\alpha}{2\pi} x^2 \right) \quad \underline{30}$$

angesetzt. Betrachten wir die dissipative Poincaré-Abbildung 11 im Grenzfall starker Dämpfung, $\beta T \gg 1$, dann entkoppelt wieder die Gleichung für x_n

$$x_{n+1} = x_n + \frac{K_0}{\beta} \left((\alpha - 1)x_n - \frac{\alpha}{2\pi} x_n^2 \right) \bmod 2\pi . \quad \underline{31}$$

Die Wahl $K_0 = \beta$ führt auf

$$x_{n+1} = \alpha x_n \left(1 - \frac{1}{2\pi} x_n \right) \bmod 2\pi . \quad \underline{32}$$

*M. Bauer, U. Krüger, W. Martienssen, *Europhys. Lett.* **9**, 191 (1989)

was nach Umskalieren der Winkelvariablen auf das Einheitsintervall durch $x'_n = x_n/2\pi$ auf die logistische Abbildung

$$x'_{n+1} = \alpha x'_n (1 - x'_n) \pmod{2\pi} \quad \underline{\underline{33}}$$

führt. Für Parameterwerte $\alpha \leq 4$ bleiben die Werte von x_n automatisch im Einheitsintervall, so daß die Modulobildung weggelassen werden kann.

25.4 Beispiel: Das periodisch angetriebene Pendel

In den vorhergehenden Beispielen habe wir Systeme kennengelernt, deren Dynamik durch die Iteration einfacher analytisch bekannter diskreter Abbildungen beschrieben werden konnte. Die logistische Abbildung aus Beisp. 25.1 mit ihrer extrem einfachen Struktur diene als „Testlabor“ zur Untersuchung vieler Aspekte der nichtlinearen Dynamik, hat allerdings keinen plausiblen physikalischen Bezug. Beim „periodisch gekickten“ gedämpften Rotator aus Beisp. 25.3 ließ sich die Dynamik wegen der impulsartig einwirkenden Kraft ebenfalls auf die Iteration diskreter Bewegungsgleichungen (im Grenzfall starker Dämpfung auf die eindimensionale Kreisabbildung 14) zurückführen. Ein anderes Musterbeispiel, das vielleicht noch realistischer ist, und an dem sich die charakteristischen Phänomene der nichtlinearen Dynamik klar illustrieren lassen, ist das *periodisch angetriebene Pendel*.*

Auf das Pendel, einen nichtlinearen Oszillator mit zum Sinus des Auslenkungswinkels θ proportionaler Rückstellkraft, wirke zusätzlich eine äußere Kraft mit harmonischer Zeitabhängigkeit. Außerdem soll das System durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung gedämpft sein. Mathematisch werden diese Systemeigenschaften durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = f \cos(\Omega t) \quad \underline{\underline{1}}$$

Hier ist β der Reibungsparameter, f und Ω bezeichnen Stärke und Frequenz der Antriebskraft. Die Eigenfrequenz des Pendels wurde auf den Wert $\omega_0 = 1$ gesetzt, was sich durch Umskalieren der Zeit und der Parameter β und f immer erreichen läßt. Wie in Kap. 21 beschrieben läßt sich diese explizit zeitabhängige Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von drei gekoppelten autonomen (d.h. nicht zeitabhängigen) Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\beta\omega - \sin \theta + f \cos \phi \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega \end{aligned} \quad \underline{\underline{2}}$$

*Siehe z.B. G.L. Baker, J.P. Gollub: *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1996). In diesem Buch wird vom Beispiel des getriebenen Pendels ausgiebig Gebrauch gemacht. Weiterhin verweisen wir auf H. Heng, R. Doerner, B. Huebinger, W. Martienssen: *Int. Journ. of Bif. and Chaos* **4**, 751, 761, 773 (1994)

Dies ist für $\beta > 0$ offenbar ein dissipatives System, denn die Divergenz des Geschwindigkeitsfelds \vec{F} (vgl. Gl. (16) in Kap. 21) ist dann negativ:

$$\Lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -\beta . \quad \underline{3}$$

Die Bewegungsgleichungen des getriebenen Pendels sind zu kompliziert, um noch analytische Lösungen zu erlauben. Ihre numerische Integration mit dem Computer bietet aber keine Schwierigkeiten.[†]

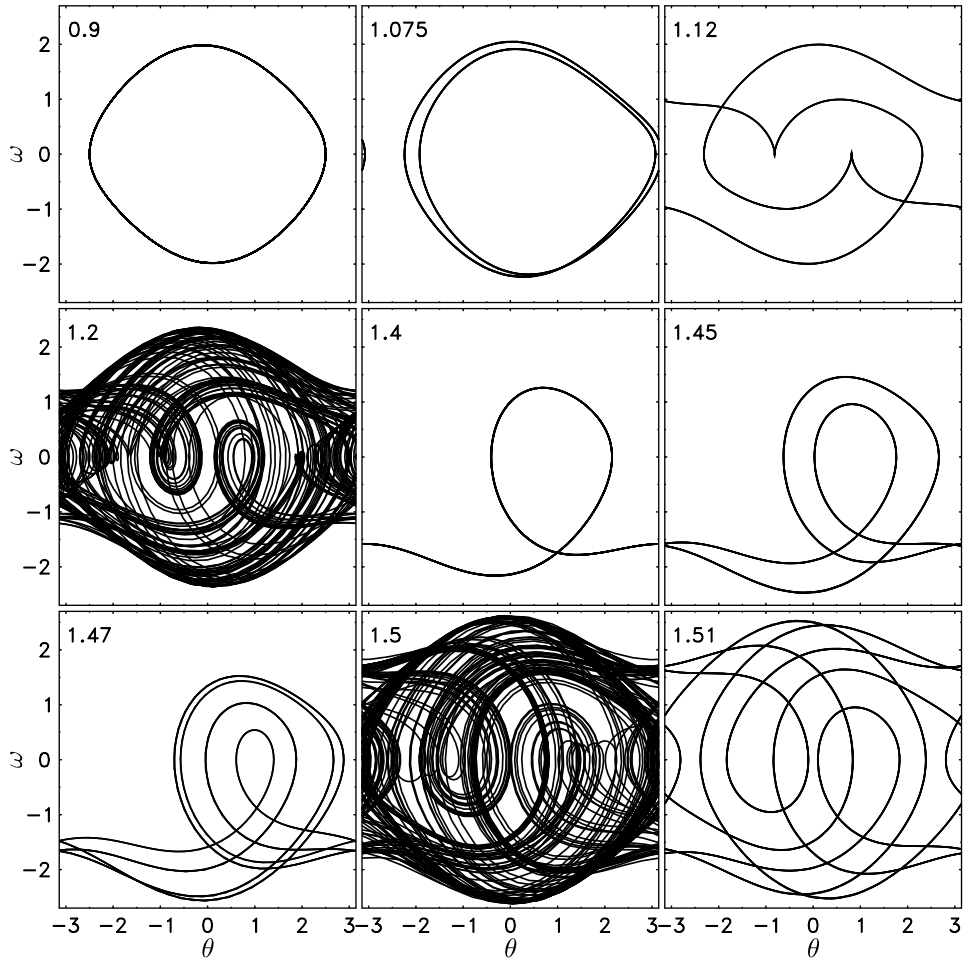


Abb. VII.42: Typische Phasenraumtrajektorien des periodisch angetriebenen gedämpften Pendels für verschiedene Werte des Parameters f . Die Parameter $\Omega = 2/3$ und $\beta = 0.5$ sind festgehalten.

[†]Dem Leser wird empfohlen, die Dynamik des getriebenen Pendels selbst durch Computerexperimente zu erforschen. Zur Integration der Differentialgleichungen bietet sich ein Runge-Kutta-Verfahren an; siehe hierzu etwa W.H. Press et al: *Numerical Recipes*, Cambridge University Press (1989).

Das getriebene Pendel weist, abhängig von den Parametern Ω, β, f , eine Vielzahl unterschiedlicher Bewegungsformen auf. Wir wollen hier nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Parameterraum untersuchen, nämlich die Abhängigkeit von der Antriebsstärke f bei festgehaltener Frequenz Ω und Reibungskonstante β . Als Beispiel wählen wir für alle folgenden Untersuchungen $\Omega = 2/3$, also einen Wert etwas unterhalb der natürlichen Schwingungsfrequenz des Pendels und den Reibungsparameter $\beta = 0.5$.

Für verschiedene Werte des Parameters f wird das Differentialgleichungssystem 2 numerisch aufintegriert, beginnend mit vorgewählten Anfangsbedingungen $\theta(0)$ und $\omega(0)$. Um die Untersuchung nicht unnötig zu komplizieren, ignorieren wir Einschwingvorgänge, das heißt die anfänglichen Lösungen, z.B. die ersten 20 Schwingungsperioden, werden nicht betrachtet.

Die Wirkung der Dissipation im System sorgt dafür, daß nach endlicher Zeit ein Attraktor erreicht wird. Die Gestalt dieses Attraktors läßt sich auf verschiedene Weise analysieren. Man kann die Zeitabhängigkeit des Auslenkungswinkels $\theta(t)$ direkt betrachten oder die Trajektorie im dreidimensionalen Phasenraum θ, ω, ϕ auftragen, wobei die dritte Koordinate wegen $\phi = \Omega t$ gerade der Zeit entspricht. Übersichtlicher als diese dreidimensionale Darstellung sind reduzierte zweidimensionale Phasenraumbilder, bei denen die Zeit als Parameter betrachtet und die Trajektorie in der $\theta - \omega$ -Ebene gezeichnet wird. Im Gegensatz zum vollen dreidimensionalen Phasenraum können sich die projizierten Bahnen hier schneiden. Da θ eine periodische Winkelvariable ist, beschränken wir sie durch Modulbildung auf das Intervall $-\pi < \theta \leq \pi$. Eine Trajektorie die das Bild am rechten oder linken Rand verläßt, entsprechend einem Überschlagen des Pendels, taucht daher am gegenüberliegenden Rand wieder auf.

Abbildung VII.42 zeigt eine Galerie ausgewählter Phasenraumbilder, geordnet nach aufsteigendem Wert der Antriebskraft f . Der Wert von f ist jeweils links oben in den Teilbildern eingetragen.

Für schwache Störungen, z.B. $f = 0.9$, führt das Pendel annähernd *harmonische Librationsschwingungen* um die Nullage aus. Der Grenzyklus $\theta(t)$ ist eine leicht verzerrte Sinus-schwingung mit der Frequenz Ω , entsprechend ist die Bahn im Phasenraum annähernd eine Ellipse.

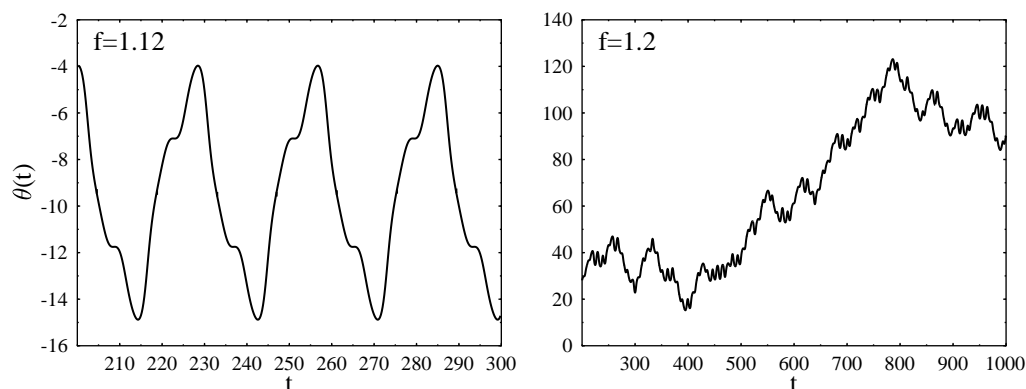


Abb. VII.43: Zwei Trajektorien $\theta(t)$ für unterschiedliche Werte des Parameters f . Bei $f = 1.12$ (links) liegt eine periodische und bei $f = 1.2$ (rechts) eine chaotische Bewegung vor. Man beachte die unterschiedlichen Skalen.

Mit wachsender Störung tritt bei etwa $f = 1.07$ eine Bifurkation mit *Periodenverdopplung* auf, wie in Abb. VII.42 für $f = 1.075$ dargestellt. Es wechseln sich zwei leicht voneinander abweichende Schwingungszüge ab. Nach weiteren Periodenverdopplungen findet man dann eine *Libration mit doppelter Amplitude* (dargestellt für $f = 1.12$), bei der das Pendel sich überschlägt, dann aber wieder zurückschwingt. Die Frequenz dieser Oszillation ist $\Omega/3$. Im Bereich $f \simeq 1.15 \dots 1.3$ finden sich *chaotische Lösungen*. Die Trajektorie für $f = 1.2$ in Abb. VII.42 schwankt erratisch zwischen Librationen und Rotationen in beide Richtungen, demgemäß füllt die Bahn einen Bereich im Phasenraum dicht aus. Abbildung VII.43 zeigt zum Vergleich eine reguläre ($f = 1.12$) und eine chaotische ($f = 1.2$) Trajektorie, entsprechend dem dritten und vierten Teilbild in Abb. VII.42.

Für noch größere Kopplung f wird der chaotische Bereich wieder verlassen und es treten *rotierende periodische* Lösungen auf, wie für $f = 1.4$ dargestellt. Der Winkel wächst linear an gemäß $\theta(t) \propto \pm \Omega t$ an, überlagert von lokalen Schwankungen. Bei $f = 1.45$ tritt eine Bifurkation mit *Periodenverdopplung der rotierenden Lösung* auf. Im Mittel ist der Winkel unverändert, jedoch alternieren jetzt die lokalen Abweichungen von Periode zu Periode. Für $f = 1.47$ sehen wir eine *zweite Periodenverdopplung*.

Nach einer Bifurkationskaskade ergibt sich dann wieder ein Bereich mit *chaotischen Lösungen*, dargestellt am Beispiel $f = 1.5$. Das Chaos wird aber bald wieder abgelöst durch reguläre Bewegung, wie als letztes gezeigtes Beispiel die hübsche Phasenraumtrajektorie für $f = 1.51$ belegt. Hier handelt es sich um eine periodische Librationsschwingung mit zwei Überschlägen (Winkelbereich $3 \cdot 2\pi$) und der Periode 5 (also der Frequenz $\Omega/5$).

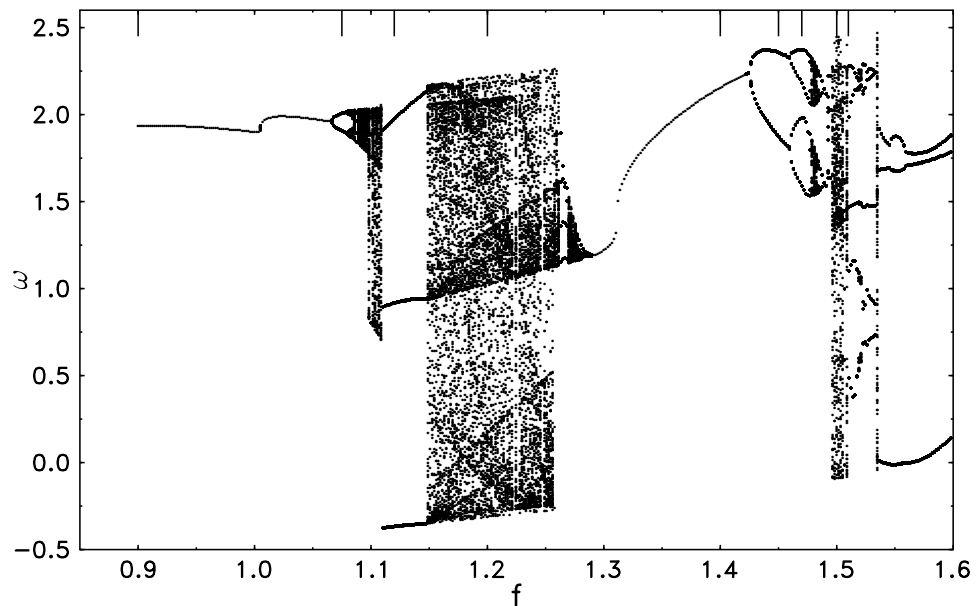


Abb. VII.44: Das Attraktordiagramm des getriebenen Pendels läßt die Abfolge regulärer und chaotischer Bereiche als Funktion des Parameters f erkennen. Zu dem am oberen Rand markierten Werten zeigt Abb. VII.42 die Phasenraumtrajektorien.

Einen globalen Überblick über das Verhalten des Systems erhält man aus dem *Attraktordiagramm*. In Abhängigkeit eines Systemparameters wird eine der Koordinaten in regelmäßigen Zeitabständen abgetastet und das Resultat auf der Ordinate aufgetragen. In Abb. VII.44 zeigen wir die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t_n)$, abgetastet zu den Zeitpunkten $t_n = t_0 + n2\pi/\Omega$, als Funktion des Antriebsstärke f . Zu jedem Wert auf der Abszisse wurden 150 ω -Werte aufgetragen. Am oberen Rand der Abbildung sind die neun Werte von f markiert, zu denen in Abb. VII.42 Phasenraumtrajektorien gezeigt wurden.

Sehr schön erkennbar sind im Attraktordiagramm die schon diskutierten sich abwechselnden Bereiche regulärer und chaotischer Bewegung. Das chaotische Fenster bei $f = 1.15 \dots 1.28$ wird von einem breiten Bereich periodischer (rotierender) Lösungen bei $f = 1.28 \dots 1.48$ gefolgt, mit mehreren ausgeprägten periodenverdoppelnden Bifurkationen (eine „subharmonische Kaskade“). In den Bereichen $f = 1.11 \dots 1.15$ und $f > 1.54$ sind Lösungen der Periode 3 zu finden. Die strukturelle Ähnlichkeit des Attraktordiagramms für das getriebene Pendel mit seinem Gegenstück für die logistische Abbildung, Figur VII.33, ist offensichtlich.

Es verdient Erwähnung, daß das in Abb. VII.44 dargestellte Attraktordiagramm nicht vollständig ist. Dies liegt daran, daß unser Differentialgleichungssystem 2 *invariant unter Spiegelung* ist, denn das Pendel hat keine bevorzugte Schwingungsrichtung. Zu jeder Lösung gehört eine gespiegelte Trajektorie

$$\theta \rightarrow -\theta \bmod 2\pi \quad , \quad \omega \rightarrow -\omega \quad , \quad \phi \rightarrow \phi + \pi \bmod 2\pi \quad \underline{4}$$

die ebenfalls die Bewegungsgleichung erfüllt. Winkel und Geschwindigkeit sind dabei invertiert und die Phase ist um eine halbe Periode verschoben. Im allgemeinen treten die Lösungen also immer paarweise auf, was bei Rotationslösungen offensichtlich ist, da das Pendel „links herum“ oder „rechts herum“ laufen kann. Welcher der beiden Attraktoren erreicht wird, hängt in komplizierter Weise von den Anfangsbedingungen $\theta(0)$, $\omega(0)$ ab. Beim Zeichnen von Abb. VII.44 wurde jeweils nur eine Bahn berechnet, es fehlen daher die „gespiegelten“ Äste. (Die Punkte sind nicht wirklich um $\theta = 0$ gespiegelt, da bei der stroboskopischen Abtastung die Phase des Abtastzeitpunkts festgehalten und nicht gemäß 4 verschoben wird.)

Allerdings kann bei periodischen Trajektorien der Periodenlänge $n2\pi/\Omega$ auch der Fall auftreten, daß $\theta(t + n\pi/\Omega) = -\theta(t) \bmod 2\pi$ gilt. Eine solche symmetrische Trajektorie ist mit ihrem gespiegelten Partner identisch ist und es gibt nur eine Lösung. Dies ist z.B. der Fall für die in Abb. VII.43 (links) dargestellte $n = 3$ -Schwingung und insbesondere auch für die ($n = 1$)-Librationen bei kleinen f . Bei etwa $f = 1.01$ tritt der interessante Fall einer *symmetriebrechenden Bifurkation* auf, erkennbar am Knick im Attraktordiagramm Abb. VII.44. Der Attraktor bleibt weiterhin periodisch mit $n = 1$, verliert aber seine Symmetrie und spaltet deshalb auf in ein Paar unterschiedlicher zueinander gespiegelter Lösungen. In der Abbildung ist nur der obere Ast dieser Gabel erfaßt.

Das Attraktordiagramm gibt einen guten Überblick über die die verschiedenen Bewegungsformen eines dynamischen Systems. Als weitergehendes quantitatives Maß der Stabilität von Trajektorien haben wir in Kap. 24 die Lyapunov-Exponenten σ_i kennengelernt. Das getriebene Pendel besitzt als dreidimensionales System drei Lyapunov-Exponenten. Einer von diesen, wir wollen ihn σ_3 nennen, hat immer den Wert $\sigma_3 = 0$. Er gehört zu dem Freiheitsgrad ϕ der gemäß 2 die triviale lineare Zeitabhängigkeit $\phi(t) = \Omega t$ besitzt, so daß Störungen in dieser Richtung weder exponentiell anwachsen noch schrumpfen.

Der *maximale Lyapunov-Exponent* σ_1 entscheidet über die Stabilität des Systems. Attraktoren mit $\sigma_1 < 0$ sind periodisch, solche mit $\sigma_1 > 0$ hingegen chaotisch. Abb. VII.45 zeigt, gezeichnet für den gleichen Parameterbereich wie beim Attraktordiagramm Abb. VII.44, das Ergebnis einer numerischen Berechnung des maximalen Lyapunov-Koeffizienten. Deutlich läßt sich die Abfolge der regulären und chaotischen Bereiche verfolgen. Dort wo Bifurkationen auftreten berührt σ_1 die Nulllinie von unten. Auffällig ist noch, daß σ_1 nie den Wert -0.25 unterschreitet. Dies hängt damit zusammen, daß in dem vorliegenden dissipativen System die Summe aller Lyapunov-Exponenten durch das Negative des Reibungskoeffizienten β (hier $\beta = 0.5$) bestimmt ist:

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i = -\beta. \quad \underline{5}$$

Wegen $\sigma_3 = 0$ ist daher im Fall maximaler Stabilität $\sigma_1 = \sigma_2 = -\beta/2$.

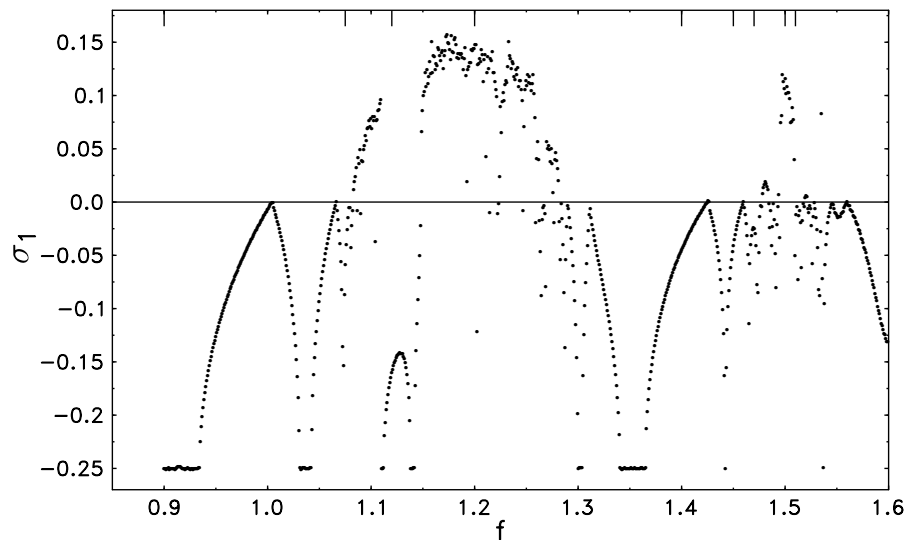


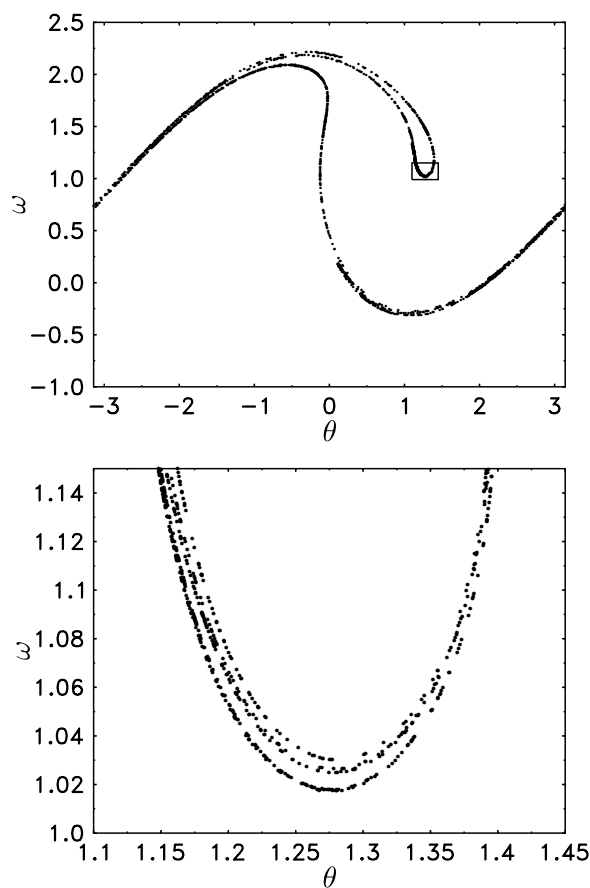
Abb. VII.45: Der größte Lyapunov-Exponent σ_1 des getriebenen Pendels als Funktion des Parameters f . Werte $\sigma_1 > 0$ treten in den Bereichen mit chaotischer Bewegung auf, die schon im Attraktordiagramm Abb. VII.44 sichtbar waren. Man vergleiche auch die analoge Darstellung des Lyapunov-Exponenten der logistischen Abbildung in Figur VII.35.

Zur weiteren Charakterisierung der Attraktoren dient der in Kap. 22 eingeführte Poincaré-Schnitt. Wählen wir als Schnittbedingung $\phi = \phi_0 \bmod 2\pi$, dann handelt es sich gerade um eine stroboskopische Abbildung zu äquidistanten Zeiten $t_n = t_0 + 2\pi/\Omega$. Der dreidimensionale Phasenraum wird auf zwei Dimensionen (θ, ω) reduziert und die kontinuierliche Trajektorie verwandelt sich in eine Punktwolke. Die Poincaré-Schnitte *periodischer Attraktoren* bestehen einfach aus einem oder mehreren festen Punkten, an deren Anzahl sich die Periodenlänge der Schwingung ablesen läßt. Anders hingegen bei den nichtperiodischen *seltsamen Attraktoren*, die charakteristisch für das Auftreten chaotischer Bewegung sind. Hier bedeckt die Punktwolke des Poincaré-Schnitts ausgedehnte Teilbereiche des Phasenraum mehr oder minder gleichmäßig.

Abb. VII.46a illustriert dies für den chaotischen Attraktor des Pendels mit Antriebsstärke $f = 1.2$. Die Punkte sind durch stroboskopische Abtastung der Trajektorie aus dem vierten Teilbild von Abb. VII.42 über 2000 Schwingungsperioden entstanden. Die detaillierte Form des Poincaré-Schnitts hängt vom gewählten Phasenwinkel ϕ_0 ab.

Das länglich geschwungene Gebilde in Abb. VII.46 erscheint zunächst wie eine seltsam verbogene eindimensionale Kurve. Bei näherem Hinsehen jedoch entpuppt sich der chaotische Attraktor als ein viel komplexeres geometrisches Objekt. Bei der Ausschnittvergrößerung eines kleinen Teilbereichs des Attraktors (siehe Abb. VII.46b) löst sich die scheinbar einfache Linie in mehrere dicht nebeneinander liegende Kurven auf. Dies ist aber erst der Anfang, denn eine Wiederholung dieses Vorgehens würde zeigen, daß in jeder Ausschnittvergrößerung auch die neuen Linien wieder in mehrere Anteile zerfallen, was sich unendlich oft wiederholen läßt. (Dieser Prozeß ist nur durch Probleme bei der numerischen Integration der Bewegungsgleichung praktisch begrenzt. Zum Zeichnen des Bilds VII.46b mußten übrigens schon 100 000 Perioden berechnet werden.)

Abb. VII.46: Der Poincaré-Schnitt einer chaotischen Trajektorie ($f = 1.2$) des getriebenen Pendels. Der im oberen Bild durch ein Kästchen markierte Bereich ist unten als Ausschnittvergrößerung dargestellt. Dies läßt die fraktale Struktur des seltsamen Attraktors erkennen.



Der Attraktor des chaotischen getriebenen Pendels hat also eine unendlich filigrane „Blätterteig“-Struktur. Mathematisch handelt es sich um ein *Fraktal* mit gebrochener Dimension (siehe Kap. 24.4), denn die Punkte des Poincaré-Schnitts nehmen, grob gesprochen, ein größeres Volumen im Phasenraum ein als eine eindimensionale Kurve, sind aber andererseits zu dünn gesät, um eine zweidimensionale Fläche zu füllen. Entsprechendes gilt auch für den vollen Attraktor im dreidimensionalen Phasenraum.

In Kap. 24.4 sind wir auf die Bestimmung der fraktalen Dimension eingegangen. Interessanterweise können auch die Lyapunov-Exponenten σ_i zur Bestimmung der Dimension eines seltsamen Attraktors herangezogen werden. Daß ein solcher Zusammenhang existiert ist nicht unplausibel, denn die σ_i bestimmen ja darüber, wie „schnell“ sich ein Bereich im Phasenraum unter dem dynamischen Fluß ausbreitet. Kaplan und Yorke* haben aus dieser Überlegung eine Formel zur Berechnung einer *Lyapunov-Dimension* D_L abgeleitet. Für unseren speziellen Fall (ein positiver und ein negativer Lyapunov-Exponent) lautet die Kaplan-Yorke-Relation

$$D_L = 1 + \frac{\sigma_1}{|\sigma_2|} \quad \text{für} \quad \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0. \quad \underline{6}$$

Der Zusammenhang zwischen D_L und den anderen Dimensionsmaßen ist noch nicht völlig geklärt. Die ursprünglich versuchte Identifikation von Lyapunov- und Kapazitätsdimension D_f läßt sich nicht aufrecht erhalten, denn es wurden Gegenbeispiele gefunden. Man vermutet jetzt eher einen Zusammenhang mit der Informationsdimension $D_L = D_I$. Für den Poincaré-Schnitt VII.46 findet man mit $\sigma_1 \simeq 0.14$, $\sigma_2 \simeq -0.64$ aus 6 die Lyapunov-Dimension $D_L \simeq 1.2$. Dieser Wert hängt empfindlich von der Reibungskonstante β ab. Bei schwächerer Dämpfung wird der seltsame Attraktor „aufgebläht“, seine Dimension wächst an.

*J.L. Kaplan, J.A. Yorke in *Functional differential equations and approximation of fixed points*, H.-O. Peitgen, H.O. Walter (eds.), Lecture Notes in Mathematics **730**, Springer, Berlin (1979)

25.5 Beispiel: Chaos in der Himmelsmechanik: Das Taumeln von Hyperion

Hyperion ist einer der entfernteren Monde des Saturn. Er kreist mit einer Umlaufzeit von 21 Tagen auf einer Ellipse mit Exzentrizität $\varepsilon = 0.1$ und großer Halbachse $a = 1.5 \cdot 10^6$ km um den Saturn.

Seine Bewegung ist ein besonders eindrucksvolles Beispiel für chaotisches Torkeln innerhalb unseres Sonnensystems. Der Beschreibung dieses Verhaltens wollen wir uns in diesem Abschnitt in einem vereinfachten Modell zuwenden. Die Sonde Voyager 2 hat u.a. Bilder des Mondes Hyperion geliefert. Hyperion ist ein unsymmetrischer Kreisel, der ungefähr durch ein dreiachsiges Ellipsoid beschrieben werden kann mit den Abmessungen

$$190 \text{ km} \times 145 \text{ km} \times 114 \text{ km} (\pm 15 \text{ km}) \quad \underline{1}$$

Damit ergibt sich für die Hauptträgheitsmomente $\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$:

$$\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_3} \approx 0.3 \quad \underline{2}$$

Die überraschende Vorhersage ist, daß Hyperion eine chaotische Torkelbewegung ausführt in dem Sinne, daß seine Drehgeschwindigkeit und die Orientierung seiner Drehachse innerhalb weniger Umlaufperioden starke Änderungen erfahren. Dieser chaotische Tanz, der auch bei anderen Planetensatelliten im Laufe ihrer Geschichte aufgetreten sein muß (z.B. Phobos und Deimos mit Mutterplanet Mars wurden berechnet), ist eine Folge der Unsymmetrie von Hyperion und der Exzentrizität der Bahn.

Zur Beschreibung der Änderung der Drehgeschwindigkeit verwenden wir folgendes Modell (siehe Abbildung):

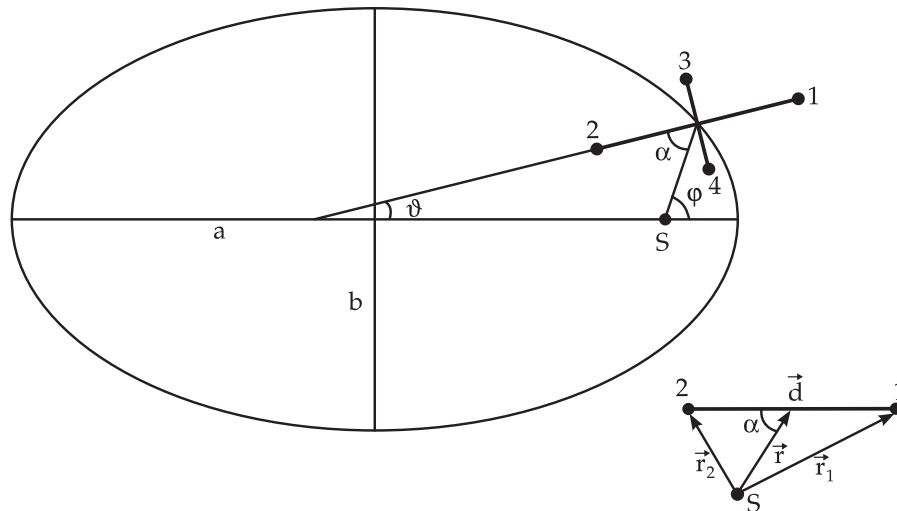


Abb. VII.47: Ein einfaches Zweihamtelmodell für den unsymmetrischen Saturnmond Hyperion

Hyperion H umkreist Saturn S auf einer festen Ellipse mit der großen Halbachse a und der Exzentrizität ε . r ist der Abstand zwischen Saturn und Hyperion, φ der Polarwinkel der Bewegung, die Trajektorie von Hyperion ist also durch

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \underline{3}$$

gegeben. Seine unsymmetrische Form simulieren wir durch vier Massenpunkte 1 bis 4 mit derselben Masse m , die in der Bahnebene angeordnet sind. Die Linie 2-1 (Abstand d) sei die (körperfeste) \vec{e}_1 -Achse, die Linie 4-3 (Abstand $e < d$) sei die (körperfeste) \vec{e}_2 -Achse. Die \vec{e}_3 -Achse zeigt senkrecht aus der Abbildungsebene: $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Der Winkel ϑ gibt die Rotation von Hyperion um die \vec{e}_3 -Achse an. Er ist definiert als Winkel zwischen der großen Halbachse a und der \vec{e}_1 -Achse. Für die Trägheitsmomente gilt:

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}me^2 < \frac{1}{2}md^2 = \Theta_2 < \frac{1}{2}m(d^2 + e^2) = \Theta_3 \quad \underline{4}$$

In diesem Modell soll der Satellit nur um die \vec{e}_3 -Achse, d.h. die senkrecht auf der Bahnebene stehende Achse mit dem größten Trägheitsmoment rotieren. Diese Einschränkung wird motiviert, weil die Gezeitenreibung über sehr lange Zeiten dazu führt, daß die Drehachse eines Mondes sich in der Richtung des größten Trägheitsmoments ausrichtet und, daß diese Richtung sich senkrecht zur Bahnebene einstellt. Zudem wird der Bahndrehimpuls des Hyperion als konstant angenommen. Das ist eine sehr gute Näherung, da der Eigendrehimpuls \vec{L}_E von Hyperion stets sehr klein gegenüber dem Bahndrehimpuls \vec{L}_B ist, $|\vec{L}_E|/|\vec{L}_B| \approx (d^2 + e^2)/a^2 \approx 10^{-8}$. Das Gravitationsfeld am Ort von Hyperion ist nicht homogen und, da Θ_1 und Θ_2 verschieden sind, erfährt der Satellit ein von seinem Bahnpunkt und von seiner Orientierung ϑ abhängiges Drehmoment, das wir berechnen wollen. Die Gezeitenreibung soll dagegen vernachlässigt werden. Das Drehmoment für das Massenpaar (1,2) ist:

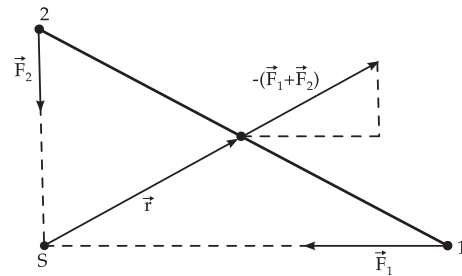
$$\vec{D}^{(1,2)} = \frac{d\vec{e}_1}{2} \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) , \quad \underline{5}$$

wobei

$$\vec{F}_i = -\frac{\gamma mM\vec{r}_i}{r_i^3} , \quad \underline{6}$$

mit M als Saturnmasse die Kraft auf den Massenpunkt i ist. Die folgende Abbildung verdeutlicht nochmals das Drehmoment, das sich aus den Gravitationskräften \vec{F}_1 und \vec{F}_2 an den Orten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 sowie der Fliehkraft $\vec{F} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ am Ort \vec{r} ergibt.

Abb. VII.48: Die das Drehmoment $\vec{D}^{(1,2)}$ verursachenden Kräfte



Da die Länge $d \approx 200$ km klein gegen dem Abstand $r \approx 10^6$ km ist, gilt nach dem Kosinussatz:

$$r_i = r \sqrt{1 \pm \frac{d}{r} \cos \alpha + \left(\frac{d}{2r}\right)^2} \approx r \sqrt{1 \pm \frac{d}{r} \cos \alpha} \quad \underline{7}$$

Das Pluszeichen gilt für r_1 , das Minuszeichen für r_2 . α ist der Winkel zwischen $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und \vec{r} . Aus (7) folgt:

$$\frac{1}{r_i^3} \approx \frac{1}{r^3} \left(1 \mp \frac{3d}{2r} \cos \alpha \right) \quad \underline{8}$$

Damit ergibt sich für $\vec{D}^{(1,2)}$:

$$\begin{aligned} \vec{D}^{(1,2)} &= \frac{d\vec{e}_1}{2} \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \\ &= \frac{d\vec{e}_1}{2} \times \frac{-\gamma m M}{r^3} \left[\left(1 - \frac{3d}{2r} \cos \alpha \right) \left(\vec{r} + \frac{d}{2} \vec{e}_1 \right) - \left(1 + \frac{3d}{2r} \cos \alpha \right) \left(\vec{r} - \frac{d}{2} \vec{e}_1 \right) \right] \\ &= \frac{3\gamma m M d^2 \cos \alpha}{2r^4} \vec{e}_1 \times \vec{r} \\ &= \frac{3\gamma m M d^2}{2r^3} \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_3 \\ &= \frac{3\gamma m M d^2}{4r^3} \sin 2\alpha \vec{e}_3 \\ &= \frac{3\gamma M \Theta_2}{2r^3} \sin 2\alpha \vec{e}_3 \\ &= \frac{6\pi^2 a^3 \Theta_2}{r^3 T^2} \sin 2\alpha \vec{e}_3 . \end{aligned} \quad \underline{9}$$

In der letzten Umformung wurde mit dem dritten Keplerschen Gesetz γM durch die Umlaufzeit T und die große Halbachse a ausgedrückt:

$$\gamma M = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a^3 . \quad \underline{10}$$

Dabei wurde die reduzierte Masse gleich der Masse des Saturns gesetzt. Das Drehmoment für das Massenpaar (3,4) ergibt sich analog zu:

$$\begin{aligned} \vec{D}^{(3,4)} &= \frac{e\vec{e}_2}{2} \times (\vec{F}_3 - \vec{F}_4) \\ &= \frac{e\vec{e}_2}{2} \times \vec{r} \frac{\gamma m M}{r^3} \left[\left(1 + \frac{3e}{2r} \sin \alpha \right) - \left(1 - \frac{3e}{2r} \sin \alpha \right) \right] \\ &= \frac{-3\gamma m M e^2}{2r^3} \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_3 \\ &= \frac{-3\gamma M \Theta_1}{2r^3} \sin 2\alpha \vec{e}_3 \\ &= \frac{-6\pi^2 a^3 \Theta_1 \sin 2\alpha}{r^3 T^2} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad \underline{11}$$

Das gesamte Drehmoment $\vec{D} = \vec{D}^{(1,2)} + \vec{D}^{(3,4)}$ ist somit:

$$\vec{D} = \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 (\Theta_2 - \Theta_1) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin 2\alpha \vec{e}_3 . \quad \underline{12}$$

Das Drehmoment verschwindet also, wenn $\Theta_1 = \Theta_2$ ist. Zudem wirkt auf eine Konfiguration mit α dasselbe Drehmoment wie auf eine Konfiguration mit $180^\circ + \alpha$. Das Drehmoment versucht Hyperion so zu drehen, daß in jedem Augenblick die \vec{e}_1 -Achse auf Saturn zeigt. Der Ausdruck (12) für das Drehmoment bleibt richtig, auch wenn man eine realistischere Massenverteilung annimmt. Mit

$$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \Theta_3 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \quad \underline{13}$$

lautet die Bewegungsgleichung für die Eigenrotation des Satelliten:

$$\Theta_3 \ddot{\vartheta} = -\frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 (\Theta_2 - \Theta_1) \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin(2(\vartheta - \varphi(t))) . \quad \underline{14}$$

Dabei wurde $\alpha = \varphi - \vartheta$ gesetzt. Die Gleichung (14) enthält nur einen Freiheitsgrad, ϑ , ihre rechte Seite hängt aber über den Bahnradius $r(t)$ und den Polarwinkel $\varphi(t)$ von der Zeit ab und ist daher nicht integrierbar. Eine Ausnahme liegt dann vor, wenn die Bahn *kreisförmig* ist. Dann ist die mittlere Kreisfrequenz:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad \underline{15}$$

gleich der Winkelgeschwindigkeit ω und $r = a$, $\varphi(t) = nt$. Mit $\vartheta' = 2(\vartheta - nt)$ vereinfacht sich die Differentialgleichung (14) deshalb für $\varepsilon = 0$ zu:

$$\Theta_3 \ddot{\vartheta}' = -3n^2 (\Theta_2 - \Theta_1) \sin \vartheta' . \quad \underline{16}$$

Das ist die Differentialgleichung für das *Pendel*. Sie besitzt als Integral der Bewegung die Energie E . Um diese zu bestimmen multiplizieren wir (16) mit $\dot{\vartheta}'$:

$$\Theta_3 \dot{\vartheta}' \ddot{\vartheta}' + 3n^2 (\Theta_2 - \Theta_1) \dot{\vartheta}' \sin \vartheta' = 0 \quad \underline{17}$$

woraus folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \Theta_3 \dot{\vartheta}'^2 - 3n^2 (\Theta_2 - \Theta_1) \cos \vartheta' \right) = 0 . \quad \underline{18}$$

Also ist

$$E = \frac{1}{2} \Theta_3 \left(\frac{d\vartheta'}{dt} \right)^2 - 3n^2 (\Theta_2 - \Theta_1) \cos \vartheta' \quad \underline{19}$$

eine Erhaltungsgröße. Genau wie beim Pendel, siehe etwa Beispiel 18.8, gilt auch hier: Für Energien E , die größer als $E_0 = 3n^2(\Theta_2 - \Theta_1)$ sind rotiert der Satellit, für $E < E_0$ schwingt er. Aufgrund der (bisher vernachlässigten) Gezeitenreibung wird sich die Energie E immer weiter verringern, bis sie den Minimalwert $E_{\min} = -E_0$ erreicht. Daraus folgt $\dot{\vartheta}'_{\min} = 0$ und $\vartheta'_{\min} = 0$. Im Endzustand von Satelliten auf einer Kreisbahn zeigt somit immer die \vec{e}_1 -Achse auf den Planeten (gebundene Rotation), wie wir es vom Erdmond her kennen.

Wie bereits gesagt, läßt sich die Differentialgleichung (14) für $\varepsilon \neq 0$ nicht analytisch lösen. Man kann aber versuchen, für $\varepsilon \ll 1$ Näherungslösungen zu finden. Das wollen wir jetzt tun. Zunächst wird die dimensionslose Zeit $t' = nt = 2\pi t/T$ und $\omega_0^2 = 3(\Theta_2 - \Theta_1)/\Theta_3$ eingeführt.

Damit ergibt sich aus (14):

$$\frac{d^2\vartheta}{dt'^2} = -\frac{\omega_0^2 a^3}{2r^3(t')} \sin(2(\vartheta - \varphi(t'))) . \quad \underline{20}$$

Da $r(t')$ und $\varphi(t')$ periodisch in 2π sind läßt sich die rechte Seite in eine fourierartige Poissonreihe entwickeln. Man erhält:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt'^2} = -\frac{\omega_0^2}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{m}{2}, \varepsilon\right) \sin(2\vartheta - mt') . \quad \underline{21}$$

Um die Koeffizienten $H(m/2, \varepsilon)$ zu bestimmen muß man $r(t')$ und $\varphi(t')$ kennen. $\varphi(t)$ erhält man z.B. mit dem zweiten Keplerschen Gesetz als Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{hk^2} . \quad \underline{22}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung und damit das Bestimmen von $H(m/2, \varepsilon)$ sprengt den Rahmen dieses Beispiels. Wir geben nur an, daß die Koeffizienten H proportional zu $\varepsilon^{2|m/2-1|}$ sind und bereits von Cayley* 1859 tabelliert wurden. Für kleines ε gilt $H(m/2, \varepsilon) \approx -\varepsilon/2, 1, 7\varepsilon/2$ für $p = m/2 = 1/2, 1, 3/2$. Dabei wurde die halbzahlige Variable p eingeführt. Wenn sich das Argument von einer der Sinusfunktionen zeitlich wenig ändert, also wenn

$$\left| 2\frac{d\vartheta}{dt'} - m \right| \ll 1 \quad \underline{23}$$

ist, treten Resonanzen auf. Es ist dann nützlich die Bewegungsgleichung (21) so umzuformen, daß sie von der sich nur langsam ändernden Variable $\gamma_p = \vartheta - pt'$ abhängt:

$$\frac{d^2\gamma_p}{dt'^2} = -\frac{\omega_0^2}{2} H(p, \varepsilon) \sin 2\gamma_p - \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{n \neq 0} H\left(p + \frac{n}{2}, \varepsilon\right) \sin(2\gamma_p - nt') . \quad \underline{24}$$

Es stellt sich heraus, daß die Terme in der Summe so schnell im Vergleich zur Variation von γ_p oszillieren, daß sich ihr Gesamtbeitrag zur Bewegungsgleichung weitestgehend herausmittelt, wenn ω_0^2 und ε klein genug sind. In erster Näherung für kleines ω_0^2 und ε können die hochfrequenten Terme aus der Bewegungsgleichung eliminiert werden, indem man γ_p festhält und Gleichung (24) über eine Periode mittelt. Man erhält dann

$$\frac{d^2\gamma_p}{dt'^2} = -\frac{\omega_0^2}{2} H(p, \varepsilon) \sin 2\gamma_p . \quad \underline{25}$$

Das ist wieder die Pendelgleichung. Integration der Gleichung (25) analog zu den Gleichungen (17) – (19) ergibt wieder die Energie.

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma_p}{dt'} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4} H(p, \varepsilon) \cos 2\gamma_p . \quad \underline{26}$$

*Die Originalarbeit ist: A. Cayley, Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion. *Mem. Roy. Astron. Soc.* **29**, 191 (1859).

Wieder schwingt γ_p , wenn E_p kleiner als $E_p^s = |H(p, \varepsilon)| \omega_0^2/4$ ist und rotiert, wenn E_p größer ist. Für $H(p, \varepsilon) > 0$ schwingt γ_p um 0, für $H(p, \varepsilon) < 0$ schwingt γ_p um $\pi/2$. Der wesentliche Unterschied zur Pendelgleichung mit $\varepsilon = 0$ ist, daß es hier je nach Anfangsbedingung nicht nur die synchrone ($p = 1$) Lösung, sondern auch Resonanzen gibt. So kann es z.B. passieren, daß ein Satellit durch die Gezeitenreibung in einen $p = 3/2$ Zustand eingefangen wird. Dieser Fall ist im Sonnensystem beim Merkur realisiert: Auf zwei Umläufe um die Sonne kommen bei ihm genau drei Rotationen um die Achse.

Die Frage, inwieweit die Mittelung über die hochfrequenten Anteile berechtigt ist und diese tatsächlich nur kleine Störungen sind, ist kompliziert und soll hier nicht weiter verfolgt werden. Es ist anschaulich jedoch sofort klar, daß die hochfrequenten Terme dann nicht vernachlässigt werden dürfen, wenn die Energie in der Nähe des Grenzwerts $E_p = E_p^s$ liegt. Dann werden nämlich diese Terme den Ausschlag geben, ob der Satellit eine volle Umrehung (in γ_p) macht, oder ob er zurückschwingt. Es gibt ein Band von Energien $w_p \cdot E_p^s$, die sehr nahe bei E_p^s liegen. Dabei wird w_p durch $w_p = (E_p - E_p^s)/E_p^s$ definiert. Für Energien innerhalb dieses Bandes können die hochfrequenten Störungen nicht vernachlässigt werden. Wir wollen ohne Herleitung nur angeben, daß von Chirikov ein analytisches Kriterium für die Breite w_p dieses Bandes gefunden wurde*. Das Kriterium von Chirikov sagt vorher, daß für die Parameter von Hyperion $\omega_0^2 = 0.89$ und $\varepsilon = 0.1$ die Mittelung über die hochfrequenten Anteile nicht möglich ist, da die Breite des zu $p = 1$ und $p = 3/2$ gehörigen Bandes so groß ist, daß die beiden Bänder ineinander übergehen. Dagegen sollte die Mittelung über die hochfrequenten Anteile für $\omega_0^2 = 0.2$ und $\varepsilon = 0.1$ eine gute Näherung sein. Die folgenden Abbildungen sind Poincaré-Schnitte für diese beiden Fälle. Sie zeigen Punkte im Phasenraum, die immer bei $\varphi = 0$ genommen sind.

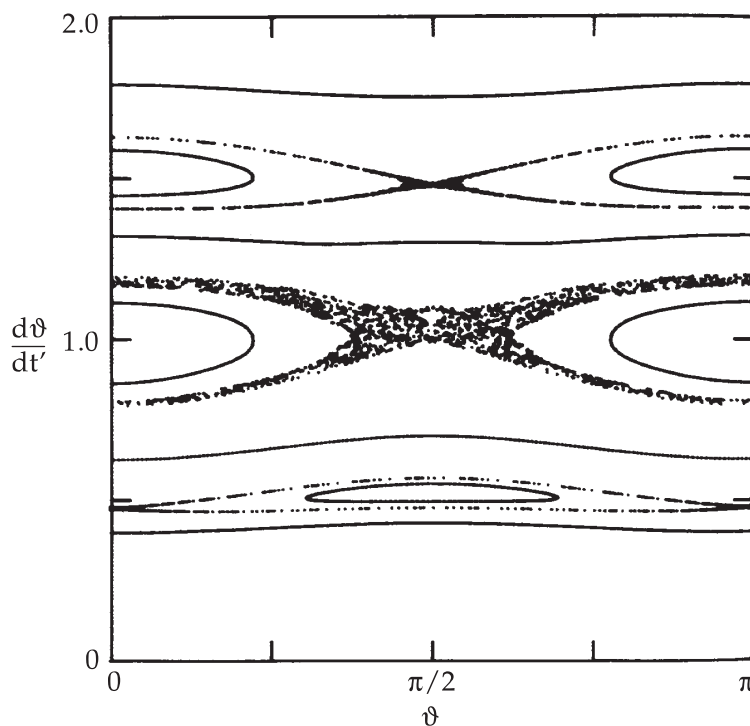


Abb. VII.49: Transversalschnitt des Phasenraumes für $\omega_0^2 = 0.2$ und $\varepsilon = 0.1$

*B.V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillators systems. *Phys. Rep.* **52**,

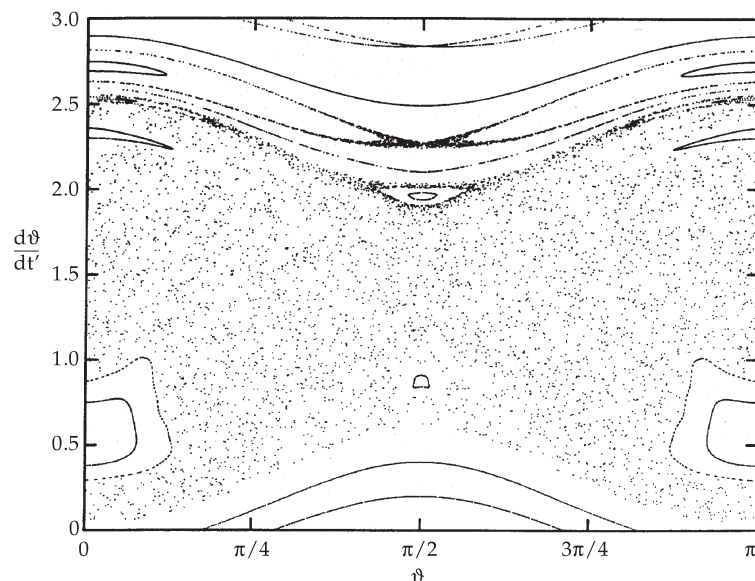


Abb. VII.50: Transversalschnitt des Phasenraumes für die Parameter von Hyperion. $\omega_0^2 = 0.89$ und $\varepsilon = 0.1$

Dabei sind die Differentialgleichungen numerisch gelöst worden*. Handelt es sich um eine quasiperiodische Bewegung dann ergeben aufeinander folgende Punkte eine glatte Kurve; chaotische Trajektorien scheinen Flächen in zufälliger Weise auszufüllen.

Aufgrund der Symmetrie des Trägheitsellipsoids, ist die Orientierung ϑ mit der bei $\vartheta + \pi$ identisch. Deshalb wird in den Bildern für ϑ nur der Bereich zwischen 0 und π gezeigt. Durch Mittelung über die hochfrequenten Anteile wurden Lösungen gefunden bei denen $\gamma_p = \vartheta - pt'$ schwingt (für $E_p < E_p^s$). Für jede dieser Lösungen hat $d\vartheta/dt'$ einen Mittelwert von genau p und ϑ nimmt alle Werte zwischen 0 und 2π an. Wenn man allerdings immer nur die Punkte mit $\varphi = 0$ betrachtet, d.h. Zeiten $t' = 2\pi n$, dann entspricht γ_p genau ϑ modulo π . Deshalb zeigt sich eine Schwingung in γ_p als Schwingung in ϑ . Die aufeinanderfolgenden Punkte von quasiperiodischen Schwingungen ergeben deshalb eine einfache Kurve in der Nähe von $d\vartheta/dt' = p$, die nur einen Teil der Winkel zwischen 0 und π enthält. Für nichtresonante quasiperiodische Trajektorien ($E_p > E_p^s$) rotieren alle γ_p 's und aufeinanderfolgende Punkte geben eine einfache Kurve, die alle Winkel ϑ enthält.

Wie man an der ersten Abbildung sieht sind für kleine Werte von ω_0 und ε die resonanten Zustände von den nichtresonanten durch eine schmale chaotische Zone getrennt. Dabei sind in der Abbildung zehn verschiedene Trajektorien gezeigt. Drei zeigen die quasiperiodischen Schwingungen in den $p = 1/2, 1$ und $3/2$ Zuständen. Wie mit der Näherung vorhergesagt, schwingt $\gamma_{1/2}$ um $\vartheta = \pi/2$, γ_1 und $\gamma_{3/2}$ schwingen um $\vartheta = 0$. Drei weitere, die resonanten Zustände jeweils umgebenden Trajektorien sind chaotisch. Sie füllen schmale Bänder scheinbar zufällig mit Punkten. Die letzten vier Trajektorien zeigen, daß jedes chaotische Band von den anderen Bändern durch nichtresonante quasiperiodische Trajektorien getrennt ist.

262 (1979)

*J. Wisdom, S.J. Peale, F. Mignard, The chaotic rotation of Hyperion. *Internat. journal of solar system studies* **58**, 137 (1984)

Die zweite Abbildung zeigt nun die Situation wie sie bei Hyperion vorliegt. Mindestens die chaotischen Zonen des $p = 1$ und des $p = 3/2$ Zustand sind nicht mehr voneinander getrennt. Es bleibt ein kleiner Überrest des $p = 1/2$ quasiperiodischen Zustandes, der $p = 3/2$ quasiperiodische Zustand ist ganz verschwunden. Dafür gibt es einen quasiperiodischen Zustand bei $p = 9/4$, $\vartheta = \pi/2$, der in der Näherung (25) nicht enthalten ist. Insgesamt sind in der Abbildung 17 Trajektorien zu sehen. Acht quasiperiodische Schwingungen der $p = 1/2, 1, 2, 9/4, 5/2, 3$ und $7/2$ Zustände, fünf nichtresonante quasiperiodische Rotationen und vier chaotische Trajektorien.

Eine weitergehende Untersuchung zeigt, daß die Ausrichtung der Drehachse senkrecht zur Bahnebene sowohl im chaotischen Bereich als auch im synchronen Zustand nicht stabil ist. Das bedeutet, daß eine kleine Abweichung der Drehachse von der Vertikalen exponentiell anwächst. Die Zeitskala für dies dann auftretende Torkeln ist von der Größenordnung einiger Umlaufperioden. Das Endstadium eines „normalen“ Mondes ist für Hyperion völlig instabil. Kippt er aber aus der Vertikalen zur Bahnebene heraus, so ist die Gleichung (14) nicht mehr ausreichend und man muß die vollen, nichtlinearen Eulerschen Gleichungen lösen. Dabei findet man, daß der volle dreidimensionale Bewegungsablauf vollständig chaotisch ist. Alle drei Lyapunovschen charakteristischen Exponenten sind positiv (von der Größenordnung 0.1), was zu stark chaotischem Torkeln führt. Auch wenn man die räumliche Orientierung der Drehachse zum Zeitpunkt des Vorbeiflugs von Voyager 1 an Hyperion (im November 1980) auf zehn Stellen genau hätte messen können, so wäre es dennoch nicht möglich gewesen vorherzusagen, wo die Achse zur Zeit des Vorbeiflugs von Voyager 2 (im August 1981) stehen würde.

Bis zu diesem Punkt wurde die Gezeitenreibung vernachlässigt, die zu einer vergleichsweise sehr langsamen Änderung des ursprünglich Hamiltonschen Systems führt. Man kann aber die Geschichte Hyperions ungefähr angeben. Vermutlich war die Periode der Eigendrehung zu Anfang viel kürzer als die Bahnperiode, und Hyperion begann seine Entwicklung im Bereich hoch über dem in der Abbildung gezeigten. In einem Zeitraum von der Größenordnung des Alters des Sonnensystems (circa 10^{10} Jahre) wurde die Eigendrehung abgebremst und die Drehachse richtete sich senkrecht zur Bahnebene auf. Damit wurden die Voraussetzungen unseres vereinfachten Modells (14) näherungsweise berechtigt. Sobald aber der chaotische Bereich erreicht war, wurde „das Werk der Gezeiten während Äonen in wenigen Tagen zerstört“*, denn einmal im chaotischen Bereich angekommen fing Hyperion in völlig erratischer Weise an zu torkeln (was er auch heute noch tut)[†]. Irgendwann wird er in einer der wenigen stabilen Inseln der Abbildung landen. Das kann allerdings nicht der synchrone Zustand sein, denn dieser ist instabil.

*J. Wisdom, Chaotic behaviour in the solar system. *Nucl. Phys. B*, (Proc. Suppl.) **2**, 391 (1987)

[†]Die Beobachtungen von Voyager 2 sind konsistent mit dieser Aussage. Später ist das Torkeln von Hyperion auch von der Erde aus direkt beobachtet worden (s. J. Klavetter, *Science* **246**, 998 (1988), *Astron. J.* **98**, 1855 (1989))