Bayes-Netze
Eine Einführung

Marc Wagner
mcwagner@stud.informatik.uni-erlangen.de
Vortrag im Seminar „Bayes-Netze und Data-Mining“
10. Februar 2000

Zusammenfassung

Bayes-Netze stellen eine sehr vielseitig einsetzbare Struktur dar, die in vielen Bereichen der Informatik Anwendung findet. Bayes-Netze dienen der kompakten Speicherung und Verarbeitung unsicheren Wissens. Neue Informationen an einer Stelle des Netzes, in Form von Wahrscheinlichkeiten, wirken sich unter Umständen auf das gesamte Netz aus. Darüber hinaus existieren Algorithmen, die es Bayes-Netzen ermöglichen selbstständig dazuzulernen. Die vorliegende Arbeit soll anhand von einfachen Beispielen einen groben Überblick über die oben angesprochenen Themen geben.

1 Wozu Bayes-Netze?

Experten sind Personen, die zur Erledigung ihrer Aufgaben ein gewisses Fachwissen benötigen, zum Beispiel Ärzte, Piloten oder Finanzberater. Die übliche Vorgehensweise von Experten wird durch Abbildung 1 veranschaulicht. Aufgrund von Beobachtungen werden Entscheidungen getroffen. Die auf diese Entscheidungen folgenden Aktionen liefern gute oder schlechte Resultate aus denen die Experten lernen. Dieses neue Wissen wird dann zur Bewältigung weiterer Aufgaben eingesetzt.

Experten müssen Entscheidungen häufig aufgrund unvollständiger oder sich widersprechender Informationen fällen. In einem solchen Fall sollte, entsprechend den bisherigen Erkenntnissen, die wahrscheinlich beste Entscheidung getroffen werden, in der Regel diejenige, die das Risiko minimiert.

Es hat sich jedoch gezeigt, dass Experten in vielen Fällen anders entschieden haben. Man möchte daher Computersysteme, sogenannte Expertensysteme, die die Experten durch Vorschläge bei ihrer Arbeit unterstützen. Die Vorschläge sollen zudem auch noch begründet werden.

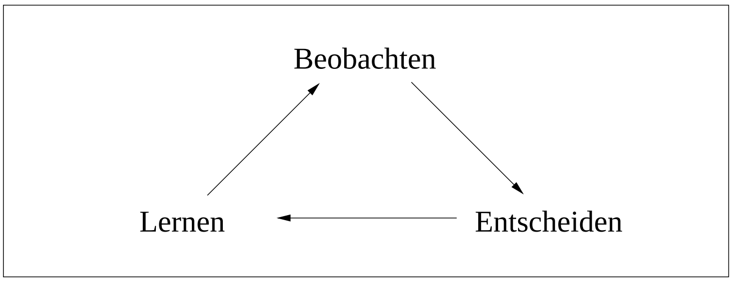

Abbildung 1: Die übliche Vorgehensweise von Experten

Derartige Expertensysteme werden heute in den verschiedensten Bereichen eingesetzt. Als Beispiele lassen sich hier Windows 95 Hilfe, Überwachung von Antriebssystemen von Raumschiffen, medizinische Diagnosen oder Wettervorhersage nennen.

Eine Möglichkeit solche Expertensysteme zu realisieren stellen Bayes-Netze dar. Dass neben Expertensystemen eine ganze Reihe weiterer Einsatzmöglichkeiten für Bayes-Netze bestehen, soll an dieser Stelle nicht verschwiegen werden. Das bisher gesagte sollte aber zur ersten Motivation des Themas ausreichen.

2 Wiederholung wichtiger Begriffe und Formeln aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Unerlässlich für das Verständnis von Bayes-Netzen sind solide Grundkenntnisse in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die für die weiteren Kapitel wichtigsten Begriffe und Formeln werden im folgenden kurz wiederholt.

Unter

$$P(A)$$

versteht man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

$$P(A|B)$$

ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung des Ereignisses B.

Die Formel von Bayes,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \qquad ,$$

die wohl den Grundstein der theoretischen Basis von Bayes-Netzen bildet, erlaubt die Umrechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung des Ereignisses B in die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung des Ereignisses A.

Durch die Formel von den totalen Wahrscheinlichkeiten,

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \qquad ,$$

ist es möglich die absolute Wahrscheinlichkeit von A aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten von A zu berechnen.

3 Causal Networks als Vorstufe zu Bayes-Netzen

Causal Networks, eine Vorstufe zu Bayes-Netzen, sind ein Formalismus zur Darstellung kausaler Abhängigkeiten innerhalb gegebener Situationen. Causal Networks bestehen aus einer Menge von Variablen und einer Menge von gerichteten Kanten zwischen diesen Variablen. Variablen repräsentieren bestimmte Sachverhalte. Sie besitzen eine (eventuell unendliche) Menge von Zuständen. Variablen befinden sich stets in genau einem ihrer Zustände, in welchem kann jedoch unbekannt sein. Eine Kante führt von einer Variable A zu einer Variable B genau dann, wenn Zustände der Variable A unmittelbare Ursache von Zuständen der Variable B sein können.

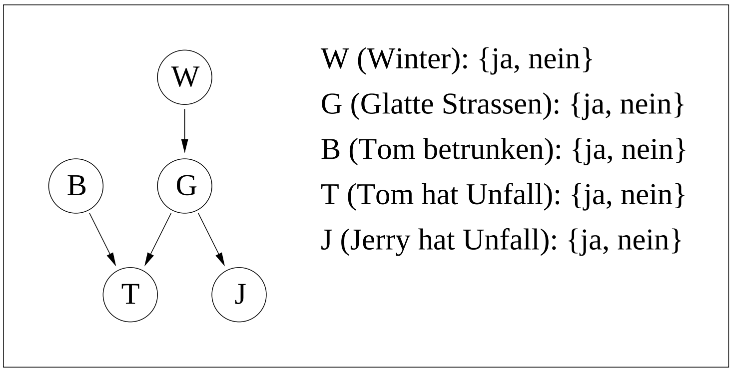

Abbildung 2: Ein Beispiel für ein Causal Network

Das folgende Beispiel soll die obige Definition verdeutlichen. Die Jahreszeit (Variable W (Winter), Zustände {ja, nein}) hat erheblichen Einfluss darauf, ob die Strassen glatt sind (Variable G (glatte Strassen), Zustände {ja, nein}). Glatte Strassen verändern die Wahrscheinlichkeit ob die beiden katastrophalen Autofahrer Tom (Variable T (Tom hat Unfall), Zustände {ja, nein}) beziehungsweise Jerry (Variable J (Jerry hat Unfall), Zustände {ja, nein}) einen Autounfall haben. Verstärkend kommt hinzu, dass Tom häufig betrunken ist (Variable B (Tom betrunken), Zustände {ja, nein}). Dieser Situation entspricht das in Abblidung 2 gezeigte Causal Network.

Abhängigkeit und bedingte Abhängigkeit

Zwei Variablen A und B eines Causal Networks werden als abhängig bezeichnet genau dann, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Zustände der Variable A vom Zustand der Variable B abhängen, und umgekehrt. In Formeln ausgedrückt

$$P(A, B) \neq P(A)P(B) \qquad .$$

Zwei Variablen A und B eines Causal Networks werden als bedingt abhängig bezeichnet genau dann, wenn A und B bei bestimmten Zuständen Z des Netzes abhängig und bei bestimmten anderen Zuständen $\bar{Z}$ unabhängig sind. In Formeln ausgedrückt

$$P(A, B|Z) \neq P(A|Z)P(B|Z)$$

und

$$P(A, B|\bar{Z}) = P(A|\bar{Z})P(B|\bar{Z}) \qquad .$$

Im folgenden wird anhand von Beispielen gezeigt, bei welchen Zuständen des Netzes bedingt abhängige Variablen abhängig beziehungsweise unabhängig sind.

Serielle Verbindungen

Gegeben seien die seriellen Verbindungen aus Abbildung 3. Die Variablen W und J sind unabhängig genau dann, wenn der Zustand der Variable G bekannt ist. In einfachen Worten ausgedrückt, wenn die Strassenverhältnisse bekannt sind, hat die Jahreszeit keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit eines Autounfalls.

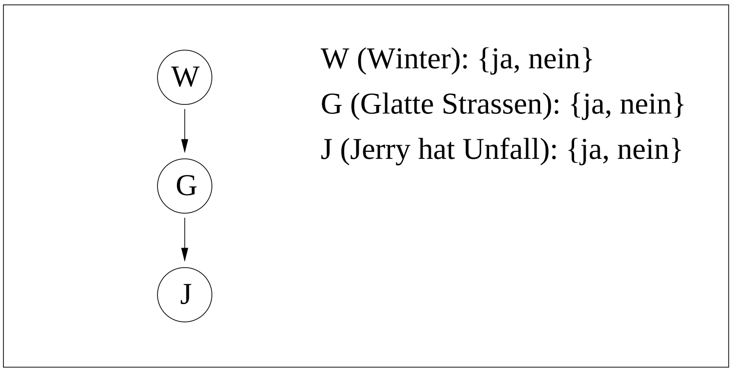

Abbildung 3: Serielle Verbindungen

Auseinanderlaufende Verbindungen

Gegeben seien die auseinanderlaufenden Verbindungen aus Abbildung 4. Die Variablen T und J sind unabhängig genau dann, wenn der Zustand der Variable G bekannt ist. In einfachen Worten ausgedrückt, wenn Tom einen Autounfall hat und die Strassenverhältnisse unbekannt sind, steigt die Wahrscheinlichkeit für glatte Strassen. Das wiederum erhöht die Wahrscheinlichkeit eines Autounfalls für Jerry.

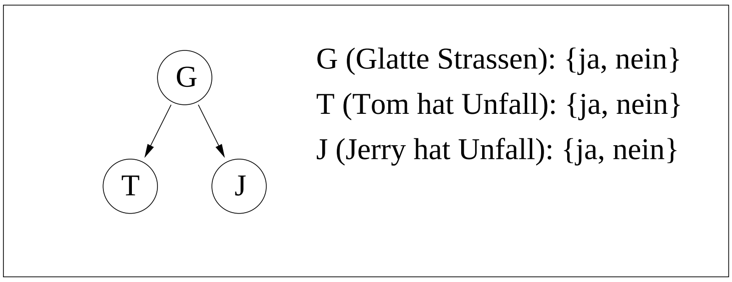

Abbildung 4: Auseinanderlaufende Verbindungen

Zusammenlaufende Verbindungen

Gegeben seien die zusammenlaufenden Verbindungen aus Abbildung 5. Die Variablen B und G sind abhängig genau dann, wenn der Zustand der Variable T bekannt ist. In einfachen Worten ausgedrückt, wenn Tom einen Autounfall hat, die Strassen aber nicht glatt sind, dann ist er sehr wahrscheinlich betrunken.

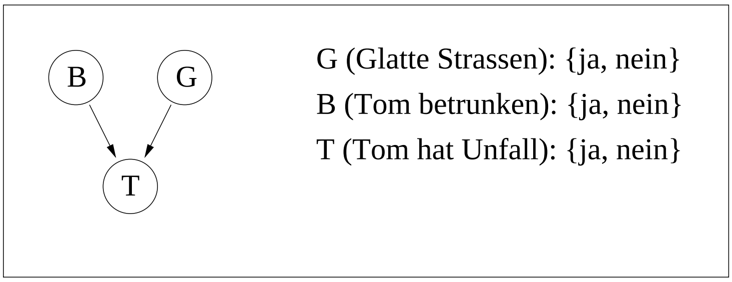

Abbildung 5: Zusammenlaufende Verbindungen

4 Erweiterung von Causal Networks zu Bayes-Netzen

Causal Networks lassen sich auf einfache Weise zu Bayes-Netzen erweitern. Jeder Variable im Netz wird eine Wahrscheinlichkeitstabelle zugeordnet. Hat eine Variable A (m Zustände) keine Vorgänger, enthält die Tabelle die absoluten Wahrscheinlichkeiten der Zustände der Variable A. Die Tabelle hat also die Form

$$
\begin{aligned}
&P(A = a_1) = p_1 \\
&P(A = a_2) = p_2 \\
&\ldots \\
&P(A = a_m) = p_m \qquad .
\end{aligned}
$$

Hat eine Variable A (m Zustände) die Vorgänger B_1 (m_1 Zustände), ... , B_n (m_n Zustände), besteht die Tabelle aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten der Zustände der Variable A. Als Bedingungen sind alle Kombinationen von Zuständen von B_1, ... , B_n vertreten. Die Tabelle hat also die Form

$$
\begin{aligned}
&P(A = a_1 | B_1 = b_{1,1}, \ldots, B_n = b_{n,1}) = p_{1,1} \\
&\ldots \\
&P(A = a_1 | B_1 = b_{1,m_1}, \ldots, B_n = b_{n,m_n}) = p_{1,m_1 \cdot \ldots \cdot m_n} \\
&P(A = a_2 | B_1 = b_{1,1}, \ldots, B_n = b_{n,1}) = p_{2,1} \\
&\ldots \\
&P(A = a_2 | B_1 = b_{1,m_1}, \ldots, B_n = b_{n,m_n}) = p_{2,m_1 \cdot \ldots \cdot m_n} \\
&\ldots \\
&P(A = a_m | B_1 = b_{1,1}, \ldots, B_n = b_{n,1}) = p_{m,1} \\
&\ldots \\
&P(A = a_m | B_1 = b_{1,m_1}, \ldots, B_n = b_{n,m_n}) = p_{m,m_1 \cdot \ldots \cdot m_n} \qquad .
\end{aligned}
$$

Der Graph eines Bayes-Netzes darf keine Zyklen enthalten.

Abbildung 6 zeigt die Erweiterung des Causal Networks aus Abbildung 2 zu einem Bayes-Netz. Aus der Tabelle der Variable T lässt sich beispielsweise entnehmen, dass Tom in betrunkenem Zustand bei glatten Strassen zu 90% einen Unfall baut, in nüchternem Zustand und bei guten Strassenverhältnissen nur zu 10% und in allen anderen Fällen zu 50%.

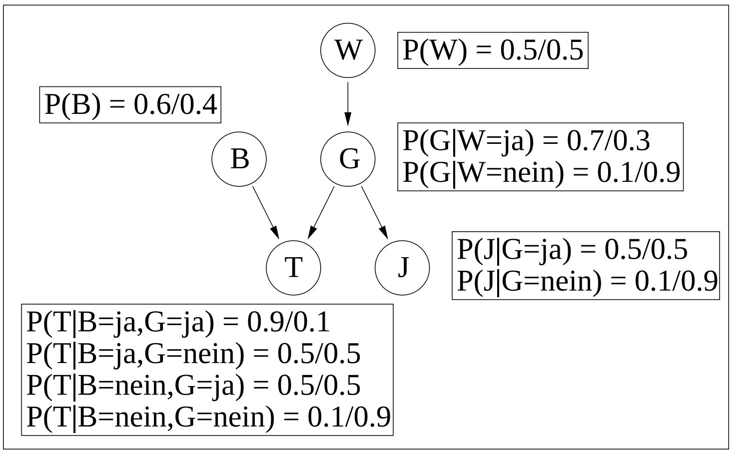

Abbildung 6: Ein Beispiel für ein Bayes-Netz

5 Bayes-Netze zur kompakten Wissensrepräsentation

Sei $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von Variablen (A_1 hat m_1 Zustände, ... , A_n hat m_n Zustände). Die Wahrscheinlichkeiten aller Kombinationen von Zuständen dieser Variablen können in einer Tabelle

$$P(U) = P(A_1, \ldots, A_n)$$

gespeichert werden, die $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ Einträge besitzt, also exponentiell gross ist.

Unter der Voraussetzung, dass bestimmte Variablen bedingt unabhängig sind, lassen sich die selben Informationen indirekt in einem Bayes-Netz speichern. Abhängig von der Struktur des Bayes-Netzes kann die Anzahl der zu speichernden Wahrscheinlichkeitswerte erheblich sinken. Die ursprünglichen Wahrscheinlichkeitswerte lassen sich leicht aus den im Netz gespeicherten Werten durch die Kettenregel

$$P(U) = P(A_1, \ldots, A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i|\text{direkte Vorfahren von } A_i)$$

errechnen. Ein Beweis der Kettenregel findet sich zum Beispiel in [Jensen96].

Als Beispiel kann das Bayes-Netz aus Abbildung 6 mit den Variablen $U = \{W, G.B, T, J\}$ (jeweils 2 Zustände) dienen. Im Netz werden 20 Wahrscheinlichkeitswerte gespeichert, wie sich leicht anhand der Abbildung nachzählen lässt. Speichert man die Informationen in einer einzigen Tabelle $P(U) = P(W, G, B, T, J)$, erhöht sich die Anzahl der Einträge auf $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

Zwischenvariablen

In vielen Fällen lässt sich die Anzahl der zu speichernden Wahrscheinlichkeitswerte durch das Einfügen sogenannter Zwischenvariablen noch weiter reduzieren. Zwischenvariablen haben keine Entsprechung in der wirklichen Welt und sind daher nicht beobachtbar. Sie dienen lediglich dazu, die Anzahl der direkten Vorgänger anderer Variablen zu reduzieren. Dadurch werden die Wahrscheinlichkeitstabellen dieser Variablen kleiner, was die Anzahl der insgesamt zu speichernden Werte verringert. Die Tatsache, dass Zwischenvariablen nicht beobachtbar sind, bringt jedoch das Problem mit sich, dass manche Wahrscheinlichkeitswerte nur schwer interpretierbar sind.

In Abbildung 7 wird die Anzahl der zu speichernden Wahrscheinlichkeitswerte in einem Bayes-Netz, in dem jede Variable 2 Zustände hat, durch das Einfügen der beiden Zwischenvariablen Z_1 und Z_2 von 64 auf 32 reduziert.

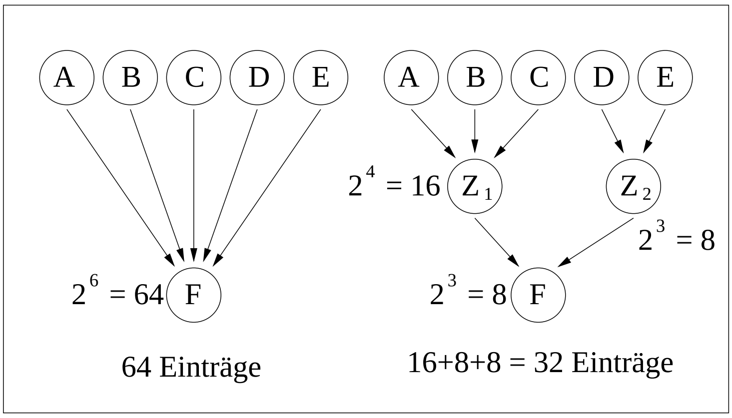

Abbildung 7: Einfügen von Zwischenvariablen

6 Propagierung von Wahrscheinlichkeiten

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Bayes-Netzen ist, dass neue Informationen über eine Variable Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeiten der Zustände aller anderen Variablen haben können. Die Veränderungen an den Wahrscheinlichkeitswerten werden also durch das gesamte Netz propagiert. Es ist zu beachten, dass sich auf diesem Weg niemals die in den Tabellen gespeicherten bedingten Wahrscheinlichkeiten verändern, sondern immer nur die absoluten Wahrscheinlichkeiten der Zustände der Variablen.

Es gibt verschiedene Algorithmen zur Propagierung von Wahrscheinlichkeiten. Der im folgenden in Grundzügen vorgestellte Algorithmus ist detailliert in [Pearl88] beschrieben.

Für jeden Zustand jeder Variable werden drei Werte, ein π-Wert, ein λ-Wert und ein

BEL-Wert, gespeichert. Die π- beziehungsweise λ-Werte stellen ein Mass für die Stärke der Unterstützung des Zustandes durch die Vorgänger- beziehungsweise Nachfolgervariablen dar. Der BEL-Wert entspricht der absoluten Wahrscheinlichkeit des entsprechenden Zustands.

Vor der Propagierung neuer Informationen müssen diese Werte initialisiert werden. Die Initialisierung beginnt bei Variablen ohne Vorgänger und bewegt sich dann entlang der Kanten durch das gesamte Netz.

Die π-Werte von Variablen ohne Vorgänger werden mit den Werten aus den Wahrscheinlichkeitstabellen der entsprechenden Variablen belegt. Die π-Werte aller anderen Variablen werden mit der Formel von den totalen Wahrscheinlichkeiten berechnet. Zum Beispiel ergibt sich für den π-Wert des Zustands 'ja' der Variable G des Netzes aus Abbildung 6

$$\begin{aligned}&\pi(G = \text{ja}) = \\ &= P(G = \text{ja}|W = \text{ja})\text{BEL}(W = \text{ja}) + P(G = \text{ja}|W = \text{nein})\text{BEL}(W = \text{nein}) = \\ &= 0.7 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.4 \qquad .\end{aligned}$$

Alle λ-Werte werden mit 1.0 initialisiert.

Die BEL-Werte lassen sich aus den π- und λ-Werten mit der Formel

$$\text{BEL}(A = a_i) = \alpha \cdot \pi(A = a_i) \cdot \lambda(A = a_i)$$

berechnen, wobei α so zu wählen ist, dass die BEL-Werte eine Wahrscheinlichkeitsverteilung bilden, also

$$\sum_i \text{BEL}(A = a_i) = 1.0$$

gilt.

Abbildung 8 zeigt das vollständig initialisierte Bayes-Netz aus Abbildung 6.

Liegen nun neue Informationen über eine Variable vor, wird diese als erstes aktiviert. Dann werden die π-, λ- und BEL-Werte dieser Variable den neuen Informationen entsprechend aktualisiert. Als nächstes werden sogenannte π- beziehungsweise λ-Nachrichten an alle Nachfolger- beziehungsweise Vorgängervariablen geschickt. Eine Ausnahme bildet eventuell diejenige Variable, die durch eine Nachricht ihrerseits die Aktivierung der momentan aktiven Variable bewirkte. Zum Schluss wird die Variable wieder deaktiviert. Die verschickten Nachrichten liefern nun neue Informationen über andere Variablen und gewährleisten so die Propagierung der veränderten Wahrscheinlichkeitswerte durch das gesamte Netz. Die für die Propagierung notwendigen Formeln, die teilweise sehr kompliziert sind, und deren Erläuterungen sind in [Pearl88] zu finden. Die Grundlage für diese Formeln bildet die Formel von Bayes.

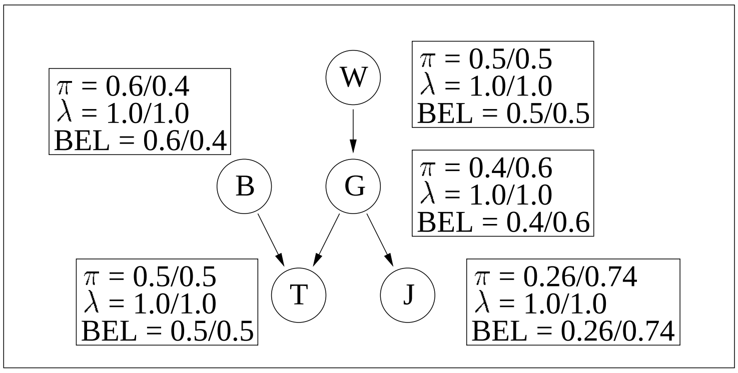

Abbildung 8: Das vollständig initialisierte Bayes-Netz

Um die Auswirkungen der Propagierung von Wahrscheinlichkeiten an einem Beispiel zu zeigen, wird in das initialisierte Netz aus Abbildung 8 die Information 'Jerry hat einen Autounfall' gegeben. Die Wahrscheinlichkeit BEL(J = ja) ändert sich entsprechend zu 100% (vorher 50%). Eine an G geschickte λ-Nachricht erhöht die Wahrscheinlichkeit für glatte Strassen von 40% auf 77%. Von hier wird nun einerseits eine λ-Nachricht an W geschickt, andererseits eine π-Nachricht an T. Die Wahrscheinlichkeit, dass gerade Winter herrscht, verändert sich dadurch zu 73% (vorher 50%), die Wahrscheinlichkeit, dass Tom auch einen Autounfall hat, zu 65% (vorher 50%). Obwohl T eine λ-Nachricht an B schickt, verändern sich die BEL-Werte des Knotens B nicht. Letzteres ist eine absolute Notwendigkeit für jeden Algorithmus, der nicht im Widerspruch zu den Abhängigkeitsbetrachtungen aus Abschnitt 3 stehen will. Abbildung 9 zeigt das Netz nach Verarbeitung aller verschickten π- und λ-Nachrichten.

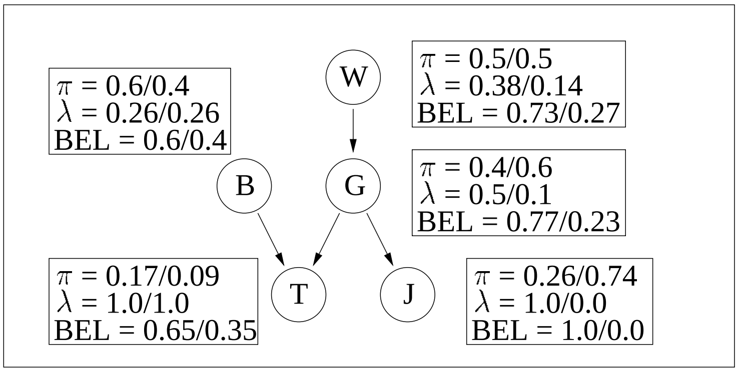

Abbildung 9: Das Bayes-Netz nach der Propagierung

7 Automatisches Lernen

Es gibt zahlreiche Algorithmen zum automatischen Lernen im Zusammenhang mit Bayes-Netzen. Die meisten dieser Algorithmen benötigen grössere repräsentative Datenmengen um verwertbare Ergebnisse erzielen zu können. Man unterscheidet zwischen qualitativem Lernen (betrifft die Struktur von Netzen) und quantitativem Lernen (betrifft die Wahrscheinlichkeitstabellen von Variablen). Es gibt Algorithmen, die zur Erstellung eines neuen Netzes eingesetzt werden, und solche, die ein bestehendes Netz anpassen.

Im folgenden wird nur das Anpassen von Wahrscheinlichkeiten in einem bereits bestehenden Netz näher betrachtet. Dieser Fall tritt zum Beispiel auf, wenn das Netz in unterschiedlichen Umgebungen zum Einsatz kommen soll, oder wenn beim Festlegen der Wahrscheinlichkeitswerte Unsicherheit geherrscht hat oder Fehler gemacht wurden.

Anpassen durch Typvariablen

Das Anpassen von Wahrscheinlichkeitswerten kann durch Einfügen neuer Variablen, sogenannter Typvariablen (verschiedene Typen von Einsatzumgebungen), realisiert werden. Typvariablen haben keine Vorgänger. Wird nun eine neuer Fall in das Netz eingespeist, ändern sich durch Propagierung die BEL-Werte der Typvariablen. Vor Bearbeitung des nächsten Falls werden die neuen BEL-Werte der Typvariablen in deren Wahrscheinlichkeitstabellen übernommen.

Abbildung 10 zeigt einen Teil des Beispielnetzes, in den die Typvariable Y eingefügt wurde. Sie passt das Netz entsprechend Jerrys Fähigkeiten als Autofahrer an.

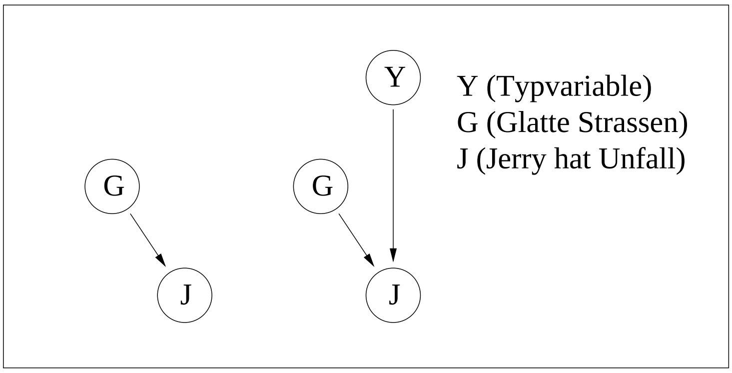

Abbildung 10: Einfügen einer Typvariable Y

Statistisches Anpassen

Beim statistischen Anpassen werden die Wahrscheinlichkeitswerte in den Tabellen ständig gemäss den relativen Häufigkeiten der aufgetretenen Fälle aktualisiert. Die Verwendung dieser Methode ist erst dann sinnvoll, wenn bereits eine grössere Menge von Fällen vorliegt. Das Anpassen der Wahrscheinlichkeitswerte verschiedener Variablen und verschiedener Vorgängerkonfigurationen geschieht unabhängig voneinander.

Die Funktionsweise dieser Methode wird im folgenden anhand des Netzes aus Abbildung 11 verdeutlicht. Die Variable A (3 Zustände) habe unter der Bedingung $B = b_i$ und $C = c_j$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(A|b_i, c_j) = (p_1, p_2, p_3) \qquad .$$

Sei nun n die Anzahl der bereits aufgetretenen Fälle mit $B = b_i$ und $C = c_j$. Wird nun ein neuer Fall mit $A = a_1$, $B = b_i$ und $C = c_j$ beobachtet, ändert sich obige Wahrscheinlichkeitsverteilung zu

$$P(A|b_i, c_j) = \left(\frac{np_1 + 1}{n+1}, \frac{np_2}{n+1}, \frac{np_3}{n+1}\right) \qquad .$$

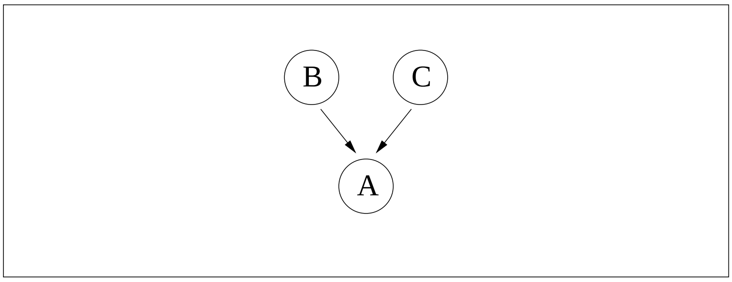

Abbildung 11: Der Graph eines Bayes-Netzes

8 Schlussbemerkungen

Bayes-Netze sind aufgrund ihrer vielseitigen Einsatzmöglichkeiten ein sehr aktuelles Forschungsthema in der Informatik. Als weiterführende Literatur können an dieser Stelle die Bücher [Jensen96] (behandelt ein breites Spektrum von Themen aus dem Bereich der Bayes-Netze) und [Pearl88] (beschreibt ausführlich den in Abschnitt 6 vorgestellten Algorithmus zur Propagierung von Wahrscheinlichkeiten) empfohlen werden. Darüber hinaus bietet die Internetseite *http://bayes.stat.washington.edu/bayes_people.html* eine lange Liste von Links mit Bezug zur Thematik der Bayes-Netze.

Literatur

[Jensen96] Jensen, F. (1996). *An Introduction to Bayesian Networks.* Springer.

[Pearl88] Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems.* Morgan Kaufmann.