



Effektive Gitter-QCD schwerer Quarks im kanonischen Ensemble

Fakultät für Physik
Goethe Universität Frankfurt am Main

Abschlussarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von

Joscha Duchscherer
geboren am 31.05.1995 in Frankfurt am Main

im September 2016

Erstprüfer: Prof. Owe Philipsen
Zweitprüfer: Jun.-Prof. Marc Wagner

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	2
Einleitung	3
1 Statistische Mechanik der QCD	4
1.1 Die kanonische Zustandssumme	4
1.2 Die großkanonische Zustandssumme	5
2 QCD auf dem Gitter	7
2.1 Fermionen auf dem Gitter	7
2.2 Linkvariablen als Eichfelder	8
2.3 Das Haarsche Maß	9
2.4 Der Polyakov-Loop	9
2.5 Eichintegrale über Polyakov-Loops	11
3 Die effektive Theorie	12
3.1 Einführung des chemischen Potentials	12
3.2 Die effektive Wirkung	13
3.3 Der Eichanteil	13
3.4 Die Quarkdeterminante	14
3.5 Die effektive Zustandssumme	16
4 Auswertung im kanonischen Ensemble	19
4.1 Diskrete Fourier-Transformation im freien Fall	19
4.2 Diskrete Fourier-Transformation mit Wechselwirkung ohne Antiquarks . .	20
4.3 Berechnung der thermodynamischen Größen	21
4.4 Einheiten und Skala	22
4.5 Erreichung des thermodynamischen Limes	23
4.6 Druck im kanonischen Ensemble	24
4.7 Chemisches Potential im kanonischen Ensemble	28
4.8 Energie im kanonischen Ensemble	29
4.9 Vergleich mit dem großkanonischen Ensemble	31
4.10 Grenzfall $N_T \rightarrow \infty$	33
Ausblick	35

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das thermodynamische Verhalten schwerer Quarks auf dem Gitter für einen Flavour $N_f = 1$ untersucht. Im Rahmen dieser effektiven Theorie nimmt man sehr schwere Quarks an, sodass der effektive Kopplungsparameter κ klein ist. Im Laufe der Arbeit wird die effektive Zustandssumme um ihre Kopplung h_2 entwickelt, wobei h_2 quadratisch mit κ und linear mit der Anzahl der zeitlichen Gitterpunkte N_T wächst. Aufgrund der Entwicklung kann man nur kleine Werte für h_2 benutzen, weshalb κ^2 und N_T stets so gewählt werden, dass dessen Produkt klein ist. Um das thermodynamische System zu beschreiben, wird in dieser Arbeit das kanonische Ensemble genutzt. Dazu transformiert man die bekannte großkanonische Zustandssumme des Systems auf die kanonische. Die Ergebnisse aus dem kanonischen Ensemble werden dann anschließend mit den bekannten Ergebnissen aus dem großkanonischen verglichen. Die Auswertungen der thermodynamischen Zustandssumme werden in dieser Arbeit mit Hilfe des Computerprogramms „Mathematica“ durchgeführt. Wählt man die Kopplung h_2 zu groß, kann es passieren, dass Terme mit betragsmäßig zu großen Exponenten auftauchen, sodass selbst „Mathematica“ mit diesen Zahlen keine Zwischenrechnungen durchführen kann. Deshalb wird in dieser Arbeit mit kleinen Parametern gearbeitet und dann versucht die Grenzfälle zu extrapolieren.

Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die fundamentale Theorie, welche die Wechselwirkung zwischen Quarks beschreibt. Quarks sind neben den Leptonen die Elementarbausteine der heute bekannten Materie. Die zugehörige Wechselwirkung der QCD wird starke Wechselwirkung genannt und über die Gluonen, die Austauscheteilchen der QCD, vermittelt.

Die QCD zeichnet sich unter anderem dadurch aus, dass die Kopplung der QCD bei hohen Energien abnimmt. Umgekehrt nimmt die Kopplung bei kleinen Energien zu. Bei hohen Energien und kleiner Kopplung lässt sich die QCD störungstheoretisch auswerten, was bei großer Kopplung nicht mehr möglich ist. Mit Hilfe der Gitterregularisierung ist es jedoch möglich, Berechnungen auch bei niedrigen Energien durchzuführen, welchen Fall wir in dieser Arbeit betrachten werden.

In dieser Arbeit wird das thermodynamische Verhalten von Quarks auf dem Gitter untersucht. Die Berechnung des Pfadintegrals der großkanonischen Zustandssumme ist für eine verschwindende Baryonenanzahl mit Monte-Carlo-Simulationen möglich. Diese Situation beschreibt zum Beispiel das frühe Universum, weil in dieser Phase die Materie-Antimaterie-Asymmetrie sehr klein ist. Ist die Baryonenanzahl ungleich null, so ist die Berechnung des Pfadintegrals mit Monte-Carlo-Simulationen nicht mehr möglich. Diese Tatsache wird als Vorzeichenproblem bezeichnet. Da wir in dieser Arbeit jedoch mit einer endlichen Baryonenanzahl arbeiten wird eine effektive Theorie genutzt, bei welcher das Pfadintegral so weit vereinfacht wird, dass eine analytische Ausrechnung der Zustandssumme möglich ist. Systeme mit endlicher Baryonenanzahl kommen in Schwerionenkollisionen oder kompakten Sternen vor.

1 Statistische Mechanik der QCD

Ein Mehrteilchensystem im Gleichgewicht wird in der Physik durch eines der statistischen Ensembles beschrieben. In dieser Arbeit wird das kanonische und großkanonische Ensemble benötigt. Das kanonische Ensemble beschreibt ein System bei fester Teilchenzahl und festem Volumen, dessen Temperatur durch ein äußeres Wärmebad vorgegeben ist und welches mit dem System Energie austauschen kann. Im großkanonischen Ensemble ist auch ein Teilchenaustausch zwischen dem Wärmebad und dem System erlaubt. Aus der statistischen Physik ist bekannt, dass beide Ensembles im thermodynamischen Limes, $V \rightarrow \infty$ bei konstanter Teilchendichte $\rho = \frac{N}{V}$, die gleiche Beschreibung der physikalischen Größen liefern müssen. Aus den jeweiligen Zustandssummen der beiden Ensembles lassen sich durch Ableiten dieser, nach den entsprechenden Variablen, die thermodynamischen Größen berechnen. Um die großkanonische und kanonische Zustandssumme für eine Quantenfeldtheorie abzuleiten, übertragen wir die jeweilige Zustandssumme aus der Quantenstatistik auf die Feldtheorie.

1.1 Die kanonische Zustandssumme

Die kanonische Zustandssumme aus der Quantenstatistik ist gegeben durch:

$$Z_K = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_j \langle j | e^{-\beta\hat{H}} | j \rangle \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnet der Index j die Energieeigenzustände des Systems und $\beta = \frac{1}{T}$. Diese Eigenzustände hängen in der QCD von der Konfiguration der Eichfelder A_μ^a , der Fermionenfelder ψ und der Anti-Fermionenfelder $\bar{\psi}$ ab. Die kanonische Zustandssumme besitzt folgende Pfadintegraldarstellung [1]:

$$Z_K = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A e^{-S_{QCD}^E} \delta(N - \bar{N}) \quad (1.2)$$

Mit den Integrationsmaßen:

$$\mathcal{D}\psi = \prod_x d\psi(x) \quad \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_x d\bar{\psi}(x) \quad (1.3)$$

$$\mathcal{D}A = \prod_x \prod_{\mu=1}^4 \prod_{a=1}^8 dA_\mu^a(x) \quad (1.4)$$

\bar{N} ist hierbei die Teilchenzahl im System, wobei durch die Deltafunktion im Pfadintegral sichergestellt wird, dass die Teilchenzahl im System fixiert ist. S_{QCD}^E ist die euklidische Wirkung der QCD in natürlichen Einheiten:

$$S_{QCD}^E = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int_V d^3x \left(\frac{1}{2} \text{Tr}[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f(x)(\gamma_\mu D_\mu + m_f)\psi_f(x) \right) \quad (1.5)$$

Für die kovariante Ableitung und den Feldstärketensor gilt:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (1.6)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \quad (1.7)$$

Das besondere an der Pfadintegraldarstellung eines thermodynamischen Systems ist, dass bei dieser nur über periodische Pfade integriert wird. Nach dem Pauli-Prinzip gelten für fermionische Felder antiperiodische Randbedingungen und für bosonische periodische Randbedingungen [1]:

$$A_\mu(\tau, \vec{x}) = A_\mu(\tau + \frac{1}{T}, \vec{x}) \quad (1.8)$$

$$\psi_f(\tau, \vec{x}) = -\psi_f(\tau + \frac{1}{T}, \vec{x}) \quad \bar{\psi}_f(\tau, \vec{x}) = -\bar{\psi}_f(\tau + \frac{1}{T}, \vec{x}) \quad (1.9)$$

1.2 Die großkanonische Zustandssumme

Für die großkanonische Zustandssumme gilt:

$$Z_{GK} = \text{Tr}(e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}) \quad (1.10)$$

Mit dem chemischen Potential μ und dem Teilchenzahloperator \hat{N} , dessen Eigenwerte die Teilchen im System angeben.

Um diesen Ausdruck auf die QCD zu übertragen, geht man analog vor wie bei der kanonischen Zustandssumme, nur dass die Teilchenzahl für einen Flavour N_f durch folgendes Integral gegeben ist [1]:

$$N_f = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int_V d^3x \bar{\psi}_f(x) \gamma_0 \psi_f(x) \quad (1.11)$$

Damit ergibt sich für die großkanonische Zustandssumme mit folgender Modifikation der Wirkung:

$$Z_{GK} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S_{GK, QCD}^E} \quad (1.12)$$

$$S_{GK, QCD}^E := S_{QCD}^E - \sum_{f=1}^{N_f} \mu_f \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int_V d^3x \bar{\psi}_f(x) \gamma_0 \psi_f(x) \quad (1.13)$$

Aus der statistischen Physik ist bekannt, dass man nun die großkanonische Zustandssumme über eine diskrete Laplace-Transformation der kanonischen Zustandssumme erhält:

$$Z_{GK}(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \cdot Z_K(T, V, N) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_K(T, V, N) \quad (1.14)$$

Mit der Fugazität: $z = e^{\frac{\mu}{k_b T}}$.

Führt man ein rein imaginäres chemisches Potential ein $\mu \rightarrow i\mu_I$, so kann man mit Hilfe

einer diskreten Fourier-Transformation leicht von der großkanonischen Zustandssumme auf die kanonische transformieren [1,2]:

$$Z_K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\left(\frac{\mu_I}{T}\right) e^{-i\bar{Q}\frac{\mu}{T}} Z_{GK}(T, V, i\mu_I) \quad (1.15)$$

Setzt man nun die Definition der großkanonischen Zustandssumme ein und tauscht das Integral und die Summe, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\left(\frac{\mu_I}{T}\right) e^{-i\bar{Q}\frac{\mu}{T}} Z_{GK}(T, V, i\mu_I) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} Z_K(T, V, N) \int_0^{2\pi} d\left(\frac{\mu_I}{T}\right) e^{i(N-\bar{Q})\frac{\mu}{T}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} Z_K(T, V, N) 2\pi \delta_{\bar{Q}, N} = Z_K(T, V, \bar{Q}) = Z_K \end{aligned} \quad (1.16)$$

Man erkennt an dieser Rechnung, dass der Übergang zu einem rein imaginären chemischen Potential nur ein Rechentrick ist, um zwischen großkanonischer und kanonischer Zustandssumme transformieren zu können. Es ändert sich in diesem Fall nichts an der kanonischen Zustandssumme, da die Abhängigkeit des chemischen Potentials sich nur in der Fugazität befindet, über welche integriert wird. Will man nun die beiden Ensembles miteinander vergleichen, setzt man in die großkanonische Zustandssumme natürlich reelle Werte für das chemische Potential ein.

2 QCD auf dem Gitter

Um ein Pfadintegral und entsprechende Größen der Theorie zu berechnen, muss dieses regularisiert werden. Man versucht dabei die Divergenzen einer Theorie zu isolieren, so dass diese später in der Renormierung in verschiedenen Parametern absorbiert werden können. Die Einführung eines Gitters, sowohl in den Raumrichtungen als auch in der Zeitrichtung, stellt eine solche Regularisierung dar. Der minimale Abstand im Raum ist durch den Gitterabstand a gegeben. Die Gitterregularisierung entspricht einer Cut-Off-Regularisierung, da die Einführung eines minimalen Abstandes im Raum einem maximalen Impuls im Impulsraum entspricht.

Das 4D-Gitter Λ wird durch folgende Menge an Punkten beschrieben (hier wird der Konvention von [2] gefolgt):

$$\Lambda = \{n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_1, n_2, n_3 = 0, 1, \dots, N-1; n_4 = 0, 1, \dots, N_T-1\} \quad (2.1)$$

Um nach der Gitterrechnung Ergebnisse für das Kontinuum zu erhalten, führt man anschließend den Grenzwert $a \rightarrow 0$ durch.

2.1 Fermionen auf dem Gitter

Um die Wirkung der Fermionen auf dem Gitter zu erhalten, ersetzen wir die Ableitungen durch ihre finite Differenzen und die Integrale durch Summen:

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \frac{1}{2a} (\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})) \quad (2.2)$$

$$\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int_V d^3x \rightarrow a^4 \sum_{n \in \Lambda} \quad (2.3)$$

$n + \hat{\mu}$ bezeichnet den Nachbarpunkt von n in μ -Richtung. Die Flavourindizes werden hier und im Weiteren unterdrückt. Das Symbol ψ ist ein Vektor mit drei Einträgen (für die drei Farben), wobei jeder Eintrag einen Spinor enthält (wir werden jedoch das ganze Objekt stets als Spinor bezeichnen).

Es gibt mehrere Wege die freie Fermionenwirkung zu diskretisieren. Später in der effektiven Theorie werden wir Wilson-Fermionen benutzen, welche in ihrer Wirkung noch zusätzliche Terme enthalten, die jedoch im Grenzwert $a \rightarrow 0$ verschwinden ($r \in (0; 1]$) [3] :

$$\begin{aligned} S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = & a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(m + 4 \frac{r}{a} \right) \psi(n) - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) \psi(n + \hat{\mu}) \\ & - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}(n) (r + \gamma_\mu) \psi(n - \hat{\mu}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2 Linkvariablen als Eichfelder

Wie auch im Kontinuum fordert man, dass die Wirkung der QCD auch auf dem Gitter unter lokalen $SU(3)$ -Transformationen invariant bleibt. Aufgrund des Diskretisierungsterm in (2.4), ist dies durch eine naive Transformation wie im Kontinuum nicht mehr erfüllt. Deshalb führt man auf dem Gitter die Linkvariablen $U_\mu(n)$ ein, welche sich entsprechend transformieren und die Wirkung invariant lassen. Führen wir eine Transformation mit $\Omega(n) \in SU(3)$ im Farbraum aus, so transformieren sich die Fermionfelder wie folgt:

$$\psi(n) \rightarrow \psi'(n) = \Omega(n)\psi, \quad \bar{\psi}(n) \rightarrow \bar{\psi}'(n) = \bar{\psi}(n)\Omega^\dagger(n) \quad (2.5)$$

Die Linkvariablen können in Anlehnung an einen Paralleltransport mit den Eichfeldern $A_\mu(n)$ in folgenden Zusammenhang gebracht werden [2]:

$$U_\mu(n) = \exp(iaA_\mu(n)) \quad (2.6)$$

Für die Eichfelder fordert man folgende Transformationsvorschrift:

$$U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n) = \Omega(n)U_\mu(n)\Omega^\dagger(n + \hat{\mu}) \quad (2.7)$$

Am Transformationsverhalten der Eichfelder $U_\mu(n)$ erkennt man, dass diese einen Gitterpunkt mit seinem Nachbarpunkt in μ -Richtung verbindet. Die Eichfelder leben quasi auf den Verbindungsstrecken und werden deshalb auch als Linkvariablen bezeichnet.

Die vollständige und eichinvariante, fermionsche Wirkung für Wilson-Fermionen lautet:

$$\begin{aligned} S_F[\psi, \bar{\psi}, U] = & a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(m + 4 \frac{r}{a} \right) \psi(n) - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) U_\mu(n) \psi(n + \hat{\mu}) \\ & - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu=1}^4 \bar{\psi}(n) (r + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger(n - \hat{\mu}) \psi(n - \hat{\mu}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wobei die $A_\mu(n) \in SU(3)$ sind. Nun kann man mit dieser Relation versuchen, einen kinetischen Term für die Eichfelder zu konstruieren, welcher der Symmetrie der QCD genügt. Zuerst definieren wir dafür ein eichinvariantes Objekt, die Spur des Plaketts.

Das Plakett ist die kleinste, nichttrivial geschlossene Schleife auf dem Gitter. Die Plakettvariable $U_{\mu\nu}(n)$ ist ein Produkt aus vier Linkvariablen:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) = & U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu})U_{-\nu}(n + \hat{\nu}) \\ = & U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wobei folgende Relation für die Linkvariablen benutzt wurde:

$$U_{-\mu}(n) = U_\mu^\dagger(n - \hat{\mu}) \quad (2.10)$$

Die Spur über ein Plakett ist nun eichinvariant, weil unter der Spur die Transformationsmatrizen zyklisch vertauschen [2], was generell für jede geschlossene Schleife auf dem

Gitter gilt.

Mit der Definition des Plaketts lässt sich nun die Wilson-Wirkung definieren, welche den kinetischen Term der Eichfelder beschreibt:

$$S_G[U] = \frac{2}{g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re} \text{Tr}(\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)) \quad (2.11)$$

Wobei hier die Wirkung noch für den allgemeinen Fall einer $SU(N)$ -Symmetrie formuliert ist und g die Kopplungskonstante bezeichnet. Für den Fall der QCD setzt man $N = 3$. In [2] wird gezeigt, dass im Grenzwert $a \rightarrow 0$ die Wilson-Wirkung in die Kontinuumswirkung $\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ übergeht, wobei $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor einer $SU(N)$ -Eichtheorie ist.

Die gesamte Gitterwirkung für die QCD lautet nun:

$$S_{QCD}[\psi, \bar{\psi}, U] = S_F[\psi, \bar{\psi}, U] + S_G[U] \quad (2.12)$$

2.3 Das Haarsche Maß

Auf dem Gitter wie auch im Kontinuum integriert man im Pfadintegral über alle Konfigurationen der Eichfelder. Im Kontinuum integriert man jedoch über die Komponenten vor den Generatoren $A_\mu^a(x)$. Für die Integration über die Linkvariablen, welche Elemente der $SU(3)$ -Gruppe sind, benötigt man jedoch ein spezielles Integrationsmaß, das Haarsche Maß.

Eine der zwei zentralen Eigenschaften des Haarschen Maßes für $SU(N)$ -Gruppen ist, dass es sowohl links- als auch rechtsinvariant ist. Die Gruppe wird dann als unimodular bezeichnet. Das heißt, sei $f(U)$ eine integrierbare Funktion, \mathcal{G} eine beliebige $SU(N)$ -Gruppe und $U, V \in \mathcal{G}$, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{G}} f(V \cdot U) dU = \int_{\mathcal{G}} f(U \cdot V) dU = \int_{\mathcal{G}} f(U) dU \quad (2.13)$$

Die zweite wichtige Eigenschaft des Haarschen Maßes für Liegruppen ist die Normierung, wodurch das Haarsche Maß eindeutig festgelegt wird [2]:

$$\int_{\mathcal{G}} dU = 1 \quad (2.14)$$

Die Invarianz des Haarschen Maßes gewährleistet die Invarianz des Pfadintegrals unter derartigen Gruppentransformationen, solange auch die Wirkung unter dieser Transformation invariant ist [2].

2.4 Der Polyakov-Loop

Der Polyakov- und Wilson-Loop sind zwei wichtige eichinvariante Objekte auf dem Gitter.

Der Wilson-Loop $W_{\mathcal{L}}$ besteht aus zwei räumlichen Wilson-Linien $S(\vec{m}, \vec{n}, n_t)$, $S(\vec{m}, \vec{n}, 0)$ und zwei zeitlichen Transportern $T(\vec{n}, n_t)$, $T(\vec{m}, n_t)$. Die Wilson Linie $S(\vec{m}, \vec{n}, n_t)$ verbindet zwei räumlich getrennte Punkte \vec{m} und \vec{n} entlang eines Weges $\mathcal{C}_{\vec{m}, \vec{n}}$ zu einem festen Zeitpunkt n_t :

$$S(\vec{m}, \vec{n}, n_t) = \prod_{(\vec{k}, j) \in \mathcal{C}_{\vec{m}, \vec{n}}} U_j(\vec{k}, n_t) \quad (2.15)$$

Der zeitliche Transporter $T(\vec{n}, n_t)$ ist eine gerade Linie in Zeitrichtung zwischen den Zeitpunkten 0 und n_t für den festen Raumpunkt \vec{n} :

$$T(\vec{n}, n_t) = \prod_{j=0}^{n_t-1} U_4(\vec{n}, j) \quad (2.16)$$

Verbindet man nun diese vier Stücke zu einer Schleife und nimmt die Spur von dieser, erhält man den Wilson-Loop:

$$W_{\mathcal{L}} = \text{Tr}(S(\vec{m}, \vec{n}, n_t)T^\dagger(\vec{n}, n_t)S^\dagger(\vec{m}, \vec{n}, 0)T(\vec{m}, n_t)) = \text{Tr} \left[\prod_{(k, \mu) \in \mathcal{L}} U_\mu(k) \right] \quad (2.17)$$

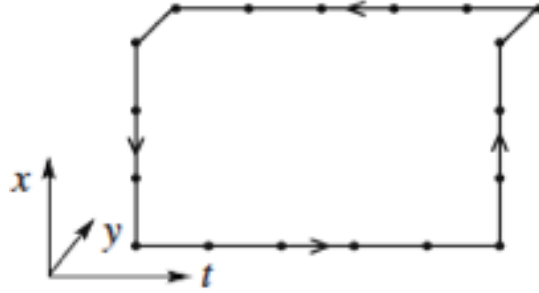


Abb. [2.1]: Beispiel eines Wilson-Loops

Der Polyakov-Loop lässt sich als Spur über einen Pfad mit maximaler zeitlicher Ausdehnung definieren, welcher aufgrund der zeitlichen Randbedingungen geschlossen ist:

$$L_{\vec{x}} = \text{Tr} \left[\prod_{j=0}^{N_T-1} U_4(\vec{x}, j) \right] \quad (2.18)$$

2.5 Eichintegrale über Polyakov-Loops

Die effektive Wirkung wird am Ende des nächsten Kapitels als Funktion von Polyakov-Loops formuliert. Deshalb benötigt man noch eine Technik für die Berechnung des Haarschen Maßes dieser.

Die Freiheitsgrade der effektiven Theorie sind die zeitlichen Wilson-Linien W_x . Daher kann das Integrationsmaß der zeitlichen Linkvariablen wie folgt umgeschrieben werden [4]:

$$\int \mathcal{D}U_4 f(W, W^\dagger) = \int \mathcal{D}W f(W, W^\dagger) \quad (2.19)$$

mit

$$\mathcal{D}U_4 = \prod_x dU_4(x) \quad \mathcal{D}W = \prod_x dW_x \quad (2.20)$$

Da die effektive Wirkung als Funktion von Polyakov-Loops formuliert ist muss folgendes Integral gelöst werden:

$$\int \mathcal{D}W f(L, L^\dagger) \quad (2.21)$$

Integrale dieser Art ergeben nur einen nichtverschwindenden Beitrag, wenn für die Potenzen der Polyakov-Loops $L^n(L^\dagger)^m$ gilt:

$$(n - m) \bmod(3) = 0 \quad (2.22)$$

Dies ist anschaulich in der Arbeit von Creutz [5] erklärt, welcher die Methode einer erzeugenden Funktion nutzt, um $SU(N)$ Integrale zu berechnen.

Um die nichtverschwindenden Beiträge zu berechnen schreibt man das Maß über die Wilson-Linien in ein Maß über Polyakov-Loops um [4]:

$$\int \mathcal{D}W f(W, W^\dagger) \rightarrow \int \mathcal{D}L f(L, L^\dagger) e^V \quad (2.23)$$

Parametrisiert man die Polykov-Loops über zwei Winkel θ und ϕ und bringt sie in Diagonalform, so lässt sich das Maß über die Poylakov-Loops wiederum durch zwei Winkel ausdrücken [4,6]:

$$L(\theta, \phi) = e^{i\theta} + e^{i\phi} + e^{-i(\theta+\phi)} \quad \theta, \phi \in [-\pi, \pi) \quad (2.24)$$

$$\int \mathcal{D}W f(W, W^\dagger) = \int \mathcal{D}L f(L, L^\dagger) e^V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\phi f(\theta, \phi) e^{2V} \quad (2.25)$$

mit

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}} \ln(27 - 18|L_{\vec{x}}|^2 + 8\text{Re}(L_{\vec{x}}^3) - |L_{\vec{x}}|^4)$$

Dieses Integral kann mit „Mathematica“ berechnet werden. Eine Liste der Integrale über Polyakov-Loops, welche in dieser Arbeit benötigt werden, ist im Appendix gegeben.

3 Die effektive Theorie

3.1 Einführung des chemischen Potentials

Wir gehen nun von der großkanonischen Zustandssumme (Kapitel 1.2) aus und versuchen diese auf das Gitter zu übertragen. Diskretisiert man den Exponenten der Zustandssumme, indem man nur Integrale durch Summen ersetzt, divergiert die Energiedichte ϵ im Kontinuumsimes $a \rightarrow 0$ für ein chemisches Potential $\mu \neq 0$ [2]. Deshalb wird das chemische Potential dadurch eingeführt, dass die zeitlichen Linkvariablen mit einem Exponentialfaktor multipliziert werden [1,4] (μ bezeichnet das chemische Potential im Gegensatz zum Richtungsindex $\hat{\mu}$):

$$U_4(x) \rightarrow e^{a\mu}U_4(x) \quad U_4^\dagger(x) \rightarrow e^{-a\mu}U_4(x) \quad (3.1)$$

Dies implementieren wir nun in die Wirkung für Wilson-Fermionen und erhalten die vollständige Wirkung für einen Flavour [1]:

$$\begin{aligned} S_F^\mu[\psi, \bar{\psi}, U] = & a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(m + 4 \frac{r}{a} \right) \psi(n) \\ & - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{j=1}^3 \bar{\psi}(n) (r - \gamma_j) U_j(n) \psi(n + \hat{j}) \\ & - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{j=1}^3 \bar{\psi}(n) (r + \gamma_j) U_j^\dagger(n - \hat{j}) \psi(n - \hat{j}) \\ & - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) (r - \gamma_4) e^{a\mu} U_4(n) \psi(n + \hat{4}) \\ & - \frac{a^3}{2} \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) (r + \gamma_4) e^{-a\mu} U_4^\dagger(n - \hat{4}) \psi(n - \hat{4}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Allgemein gilt $r \in (0; 1]$, jedoch wird in der effektiven Theorie $r = 1$ gesetzt [6]. Insgesamt erhalten wir für die großkanonische Zustandssumme [4]:

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}U \exp(-S_F^\mu[\psi, \bar{\psi}, U] - S_g[U]) \quad (3.3)$$

Wobei $S_g[U]$ bis auf einen ausintegrierten Normierungsfaktor der Wilson-Wirkung entspricht:

$$-S_g[U] = \frac{\beta}{2N_c} \sum_p [\text{Tr}(U_p) + \text{Tr}(U_p^\dagger)] \quad (3.4)$$

In dieser Darstellung der Wirkung wird über alle Plaketten p summiert. N_c ist die Anzahl der Farben, also drei in der QCD. β ist die inverse Kopplungskonstante, welche mit der Dimension der $SU(N)$ -Eichtheorie zusammenhängt:

$$\beta = \frac{2N}{g} \quad (3.5)$$

Der oben benannte ausintegrierte Vorfaktor kann vernachlässigt werden, weil die physikalischen Größen Ableitungen des Logarithmus der Zustandssumme nach entsprechenden Variablen sind, weshalb diese bei der jeweiligen Ableitung wegfallen. Will man ein Potential betrachten, so muss man die Differenz der Logarithmen betrachten, weshalb sich der Normierungsfaktor wiederum rauskürzt.

Der fermionische Anteil in der Zustandssumme kann mit Hilfe von Graßmann-Integration ausgeführt werden und führt dabei auf die Quarkdeterminante [4]:

$$Z = \int \mathcal{D}U \exp(-S_g[U]) \cdot \det[Q] \quad (3.6)$$

Die Abhängigkeit des chemischen Potentials befindet sich nun in der Quarkdeterminante.

3.2 Die effektive Wirkung

Die effektive Wirkung ist darüber definiert, dass man die räumlichen Linkvariablen in (3.6) alle ausintegriert:

$$Z = \int \mathcal{D}U_4 \exp(-S_{eff}) \quad (3.7)$$

Damit gilt also für die effektive Wirkung S_{eff} :

$$S_{eff} = -\ln \left[\int \prod_{j=1}^3 \mathcal{D}U_j \det[Q] e^{-S_g[U]} \right] \quad (3.8)$$

Die effektive großkanonische Zustandssumme hängt jetzt nur noch von den zeitlichen Linkvariablen ab.

3.3 Der Eichanteil

Der reine Eichanteil $e^{-S_g[U]}$ wird nun mit Hilfe einer sogenannten Charakterentwicklung [4,8] entwickelt:

$$\exp\left(\frac{\beta}{2N_c} [\text{Tr}(U_p) + \text{Tr}(U_p^\dagger)]\right) = c_0(\beta) \left(1 + \sum_{r \neq 0} d_r a_r(\beta) \chi_r(U_p)\right) \quad (3.9)$$

Der hier verwendete Gruppencharakter ist definiert über die Spur der $SU(N)$ Matrizen in einer ihrer unitären Darstellungen r :

$$\chi_r(U) = \text{Tr}(U_p) \quad (3.10)$$

d_r ist die Dimension der Darstellung r und $a_r(\beta)$ sowie $c_0(\beta)$ sind Funktionen der inversen Kopplungskonstante β . Eine Charakterentwicklung ist für mehrere unitäre Darstellungen der Gruppe möglich [8]. Der Vorfaktor kann mit obiger Begründung (Kapitel 3.1) ignoriert werden. In [8] ist gezeigt, dass e^{-S_p} für $\beta \rightarrow 0$, wobei S_p die Wirkung einer einzelnen Plakette ist, gegen 1 konvergiert. Da wir nun in den Strong-Coupling-Bereich, also kleine β , übergehen, können wir die reine Eichwirkung durch 1 nähern, sodass in unserer Zustandssumme kein reiner Eichanteil mehr auftritt.

3.4 Die Quarkdeterminante

Die Quarkdeterminante wird nun mittels einer Hopping-Entwicklung vereinfacht. Die Hopping-Entwicklung entspricht hier einer Entwicklung nach schweren Quarkmassen m . Man schreibt die Quark-Determinante nun wie folgt um [2]:

$$\det[Q] = \det[C(\mathbb{1} - \kappa H)] \quad C = m + \frac{4}{a} \quad (3.11)$$

Die Konstante C kann über eine Neudefinierung der Quarkfelder $\psi \rightarrow \sqrt{C}\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \sqrt{C}\bar{\psi}$ absorbiert werden und fällt somit raus. Für die Einträge der Quark-Matrix gilt:

$$Q_{\alpha\beta,xy}^{ij} = \delta^{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta_{xy} - \kappa \sum_{\nu=0}^3 \left[e^{a\mu\delta_{\nu,4}}(1 + \gamma_{\nu})_{\alpha\beta} U_{\nu}^{ij}(x)\delta_{x,y-\hat{\nu}} + e^{-a\mu\delta_{\nu,4}}(1 - \gamma_{\nu})_{\alpha\beta} U_{\nu}^{\dagger ij}(x - \hat{\nu})\delta_{x,y+\hat{\nu}} \right] \quad (3.12)$$

κ ist der Hoppingparameter, welcher gegeben ist durch [7]:

$$\kappa = \frac{1}{2(4 + am)} \quad (3.13)$$

m beschreibt die nackte Quarkmasse. Je kleiner später κ ist, desto schwerer sind die Quarks mit denen wir rechnen. Für $m = 0$ ist κ maximal, weshalb κ maximal 0.125 groß sein kann.

Für unsere Hopping-Entwicklung schreiben wir die Determinante um in eine Spur und schreiben den Logarithmus in eine Potenzreihe:

$$\det[\mathbb{1} - \kappa H] = \exp(\text{Tr}[\ln(\mathbb{1} - \kappa H)]) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \kappa^j \text{Tr}[H^j]\right) \quad (3.14)$$

H ist die Hopping-Matrix, welche in einen zeitlichen Anteil T und einen räumlichen S aufgeteilt wird:

$$H = T + S \quad (3.15)$$

Damit lässt sich nun die Quarkdeterminante in einen statischen und einen kinetischen Anteil faktorisieren:

$$\det[Q] = \det[\mathbb{1} - \kappa T - \kappa S] = \underbrace{\det[\mathbb{1} - \kappa T]}_{Q_{stat}} \underbrace{\det[\mathbb{1} - (\mathbb{1} - \kappa T)^{-1} \kappa S]}_{Q_{kin}} \quad (3.16)$$

Die statische Quarkdeterminante kann nun mit Hilfe von (3.14) auf das Produkt zweier weiterer Determinanten zurückgeführt werden [4,7]:

$$\det[Q_{stat}] = \prod_{\vec{x}} \det[1 + h_1(\mu)W_{\vec{x}}]^2 \det[1 + \bar{h}_1(\mu)W_{\vec{x}}^{\dagger}]^2 \quad (3.17)$$

$W_{\vec{x}}$ ist ein zeitlicher Transporter mit maximaler zeitlicher Ausdehnung $N_T - 1$ und für die Vorfaktoren gilt im Strong-Coupling Bereich:

$$h_1(\mu) = (2\kappa e^{a\mu})^{N_T} = \bar{h}_1(-\mu) \quad (3.18)$$

h_1 kann als Beitrag der Quarks zur Zustandssumme und \bar{h}_1 als Beitrag der Antiquarks interpretiert werden. Die Beiträge sind abhängig von N_T , weshalb die Antiquark-Beiträge für hohen N_T verschwinden.

Die Determinante kann nun durch Polyakov-Loops ausgedrückt werden [7] und man erhält als finalen Ausdruck für die statische Quarkdeterminante:

$$\det[Q_{stat}] = \prod_{\vec{x}} [1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3]^2 [1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3]^2 \quad (3.19)$$

Die statische Quarkdeterminante hängt nun nur noch von zeitlichen Linkvariablen ab.

Im folgenden betrachten wir die kinetische Quarkdeterminante, welche noch räumliche Linkvariablen enthält. Dabei beschränken wir uns hier auf die Zwei-Punkt-Wechselwirkung bis zur Ordnung κ^2 , welche zwischen den nächsten Nachbarn eines Gitterpunktes wirkt. In [9] wird die kinetische Quarkdeterminante bis zur Ordnung κ^2 berechnet:

$$\begin{aligned} \det[Q_{kin}] &= 1 \\ &- 2h_2 \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \text{Tr} \left[\frac{h_1 W_{\vec{x}}}{1 + h_1 W_{\vec{x}}} - \frac{\bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger}{1 + \bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger} \right] \cdot \text{Tr} \left[\frac{h_1 W_{\vec{y}}}{1 + h_1 W_{\vec{y}}} - \frac{\bar{h}_1 W_{\vec{y}}^\dagger}{1 + \bar{h}_1 W_{\vec{y}}^\dagger} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ kennzeichnet, dass nur über die nächsten Nachbarn summiert wird und h_2 ist im Strong-Coupling Bereich gegeben durch:

$$h_2 = \frac{\kappa^2 N_T}{N_c} \quad (3.21)$$

Der gesamte Ausdruck von (3.20) kann nun wieder durch Polyakov-Loops ausgedrückt werden [7,9]:

$$\begin{aligned} \prod_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} &\left(1 - 2h_2 \left(\frac{h_1 L_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \cdot \frac{h_1 L_{\vec{y}} + 2h_1^2 L_{\vec{y}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{y}} + h_1^2 L_{\vec{y}}^\dagger + h_1^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + 2\bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + 3\bar{h}_1^3}{1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3} \cdot \frac{\bar{h}_1 L_{\vec{y}}^\dagger + 2\bar{h}_1^2 L_{\vec{y}} + 3\bar{h}_1^3}{1 + \bar{h}_1 L_{\vec{y}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{y}} + \bar{h}_1^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{h_1 L_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \cdot \frac{\bar{h}_1 L_{\vec{y}}^\dagger + 2\bar{h}_1^2 L_{\vec{y}} + 3\bar{h}_1^3}{1 + \bar{h}_1 L_{\vec{y}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{y}} + \bar{h}_1^3} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Wir führen nun Abkürzungen für folgende Terme ein [9]:

$$\begin{aligned} M_{\vec{x}} &= \frac{h_1 L_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \\ \bar{M}_{\vec{x}} &= \frac{\bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + 2\bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + 3\bar{h}_1^3}{1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Damit lässt sich unsere effektive Zustandssumme umschreiben:

$$Z = \int [dU_4] \det[Q_{stat}] \prod_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} [1 - 2h_2 (M_{\vec{x}} M_{\vec{y}} + \bar{M}_{\vec{x}} \bar{M}_{\vec{y}} - 2M_{\vec{x}} \bar{M}_{\vec{y}})] \quad (3.24)$$

3.5 Die effektive Zustandssumme

Im folgenden soll das Produkt über die nächsten Nachbarn weiter vereinfacht werden. Dafür wird hier eine Linked-Cluster-Entwicklung genutzt [7,9]. Zuerst schreibt man das Produkt über die nächsten Nachbarn in Exponentialform, was aufgrund der kleinen Kopplung h_2 möglich ist:

$$Z = \int [dU_4] \det[Q_{stat}] \exp \left(-2h_2 \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} (M_{\vec{x}} M_{\vec{y}} + \bar{M}_{\vec{x}} \bar{M}_{\vec{y}} - 2M_{\vec{x}} \bar{M}_{\vec{y}}) \right) \quad (3.25)$$

Der Logarithmus der Zustandssumme lässt sich nun mit Hilfe der Linked-Cluster-Entwicklung bis zur Ordnung κ^2 vereinfachen. Bei dieser Linked-Cluster-Entwicklung werden Quellterme eingeführt ($\alpha(\vec{x}), \bar{\alpha}(\vec{x})$) und folgendes erzeugendes Funktional definiert [9]:

$$\ln(Z) = \ln \left(\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] \cdot \exp \left(\sum_{\vec{x}} \alpha(\vec{x}) M_{\vec{x}} + \sum_{\vec{x}} \bar{\alpha}(\vec{x}) \bar{M}_{\vec{x}} \right) \right) \quad (3.26)$$

Die Linked-Cluster-Entwicklung entspricht nun einer Taylorentwicklung nach den Quelltermen um die freie Theorie des erzeugenden Funktionals ($\alpha(\vec{x}) = \bar{\alpha}(\vec{x}) = 0$). Den Logarithmus der Zustandssumme schreibt man nun wie folgt als Potenzreihe in h_2 :

$$\ln(Z) = \sum_{\vec{x}} M_0^0(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} M_1^0(\vec{x}) v(\vec{x}, \vec{y}) M_1^0(\vec{y}) + O(h_2^2) \quad (3.27)$$

$v(\vec{x}, \vec{y})$ ist die Kopplung zwischen den nächsten Nachbarn $-2h_2$. Die Funktionen $M_i^j(\vec{x})$ lassen sich nun mit Hilfe von funktionellen Ableitungen berechnen. Damit erhält man für den Logarithmus der Zustandssumme bis zu Ordnung κ^2 :

$$\begin{aligned} \ln(Z) = \ln \left(\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] \right) \\ - 6N_L h_2 \left(\frac{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] M_{\vec{x}}}{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}]} - \frac{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] \bar{M}_{\vec{x}}}{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}]} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

N_L ist die totale Anzahl der räumlichen Gitterpunkte.

Um nun wieder die Zustandssumme zu erhalten exponentzieren wir diesen Ausdruck, schreiben N_L in den Exponenten des zweiten Terms und entwickeln den zweiten Term bis zur ersten Ordnung:

$$\begin{aligned} Z = \left(\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] \right) \\ \times \left\{ 1 - 6h_2 \left(\frac{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] M_{\vec{x}}}{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}]} - \frac{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] \bar{M}_{\vec{x}}}{\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}]} \right)^2 \right\}^{N_L} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Als finalen Schritt führen wir nun die Integration über die zeitlichen Linkvariablen aus. Zuerst berechnen wir das Integral über die statische Quarkdeterminante. Die statische Quarkdeterminante (3.19) ist ein Produkt über alle Gitterpunkte. Nun geht man, wie in

Kapitel 2.5 beschrieben, von der Integration über die zeitlichen Linkvariablen zu einer Integration über die zeitlichen Wilson-Linien über:

$$\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] = \int \mathcal{D}W \prod_{\vec{x}} [1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3]^2 [1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3]^2 \quad (3.30)$$

Da alle Gitterpunkte gleichberechtigt sind, ergibt sich an jedem Gitterpunkt der gleiche Wert des Integrals:

$$\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] = \left(\int dW_{\vec{x}} [1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3]^2 [1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3]^2 \right)^{N_L} \quad (3.31)$$

Mit denen im Appendix aufgelisteten Eichintegralen über Polyakov-Loops ergibt sich für das Integral über die statische Quarkdeterminante:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] &= [1 + 4h_1^3 + h_1^6 + 4h_1\bar{h}_1 + 6h_1^4\bar{h}_1 + 10h_1^2\bar{h}_1^2 + 6h_1^5\bar{h}_1^2 + 4\bar{h}_1^3 + 20h_1^3\bar{h}_1^3 \\ &\quad + 4h_1^6\bar{h}_1^3 + 6h_1\bar{h}_1^4 + 10h_1^4\bar{h}_1^4 + 6h_1^2\bar{h}_1^5 + 4h_1^5\bar{h}_1^5 + \bar{h}_1^6 + 4h_1^3\bar{h}_1^6 + h_1^6\bar{h}_1^6]^{N_L} \\ &:= z_0^{N_L} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Als nächstes berechnen wir folgendes Integral:

$$\int \mathcal{D}U_4 \det[Q_{stat}] M_{\vec{x}} = \int \mathcal{D}W M_{\vec{x}} \prod_{\vec{x}} [1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3]^2 [1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3]^2 \quad (3.33)$$

Diese Integral können wir nun aufteilen über eine Integration am Gitterpunkt \vec{x} und eine Integration an allen anderen Gitterpunkten \vec{y} :

$$\begin{aligned} \dots &= \left(\int dW_{\vec{x}} \frac{h_1 P_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \cdot [1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3]^2 [1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3]^2 \right) \\ &\quad \cdot \prod_{\{\vec{y}\} \setminus \vec{x}} \left(\int dW_{\vec{y}} [1 + h_1 L_{\vec{y}} + h_1^2 L_{\vec{y}}^\dagger + h_1^3]^2 [1 + \bar{h}_1 L_{\vec{y}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{y}} + \bar{h}_1^3]^2 \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Mit Hilfe der Eichintegrale im Appendix ergibt sich dieser Ausdruck zu:

$$\begin{aligned} \dots &= (6h_1^3 + 3h_1^6 + 2h_1\bar{h}_1 + 12h_1^4\bar{h}_1 + 10h_1^2\bar{h}_1^2 + 15h_1^5\bar{h}_1^2 + 30h_1^3\bar{h}_1^3 + 12h_1^6\bar{h}_1^3 \\ &\quad + 3h_1\bar{h}_1^4 + 20h_1^4\bar{h}_1^4 + 6h_1^2\bar{h}_1^5 + 10h_1^5\bar{h}_1^5 + 6h_1^3\bar{h}_1^6 + 3h_1^6\bar{h}_1^6) \cdot z_0^{N_L-1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Analog berechnet sich das folgende Integral:

$$\begin{aligned} \int [dU_4] \det[Q_{stat}] \bar{M}_{\vec{x}} &= (2h_1\bar{h}_1 + 3h_1^4\bar{h}_1 + 10h_1^2\bar{h}_1^2 + 6h_1^5\bar{h}_1^2 + 6\bar{h}_1^3 + 30h_1^3\bar{h}_1^3 + 6h_1^6\bar{h}_1^3 \\ &\quad + 12h_1\bar{h}_1^4 + 20h_1^4\bar{h}_1^4 + 15h_1^2\bar{h}_1^5 + 10h_1^5\bar{h}_1^5 + 3\bar{h}_1^6 + 12h_1^3\bar{h}_1^6 + 3h_1^6\bar{h}_1^6) \cdot z_0^{N_L-1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Damit erhalten wir den finalen Ausdruck der effektiven Zustandssumme:

$$Z = \left[z_0 \left(1 - 6 \frac{\kappa^2 N_T}{N_c} \cdot \frac{z_1^2}{z_0^2} \right) \right]^{N_L} \quad (3.37)$$

Mit

$$z_1 := 6h_1^3 + 3h_1^6 + 9h_1^4\bar{h}_1 + 9h_1^5\bar{h}_1^2 - 6\bar{h}_1^3 + 6h_1^6\bar{h}_1^3 - 9h_1\bar{h}_1^4 - 9h_1^2\bar{h}_1^5 - 3\bar{h}_1^6 - 6h_1^3\bar{h}_1^6 \quad (3.38)$$

4 Auswertung im kanonischen Ensemble

Wir gehen nun zu einem rein imaginär chemischen Potential über, dabei ändern sich die Kopplungen h_1 und \bar{h}_1 in Gleichung (3.18) wie folgt (des Weiteren setzen wir $a = 1$):

$$\begin{aligned} h_1(\mu) &= e^{\ln(2\kappa)N_T} e^{\frac{i\mu I}{T}} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot e^{\frac{i\mu I}{T}} \\ \bar{h}_1(\mu) &= e^{\ln(2\kappa)N_T} e^{-\frac{i\mu I}{T}} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot e^{-\frac{i\mu I}{T}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wobei α wie folgt definiert ist:

$$\alpha := e^{3\ln(2\kappa)N_T} = (2\kappa)^{3N_T} \quad (4.2)$$

4.1 Diskrete Fourier-Transformation im freien Fall

Im freien Fall betrachten wir in der Zustandssumme nur die statische Quarkdeterminante $z_0^{N_L}$. z_0 ist eine Potenzreihe in h_1 und \bar{h}_1 , wobei die höchste vorkommende Potenz jeweils sechs ist. Um die Fourier-Transformation nun auszuführen, müssen wir das potenzieren mit N_L zuerst ausführen. Als Ergebnis dessen ergibt sich vorerst wieder eine Potenzreihe in h_1 und \bar{h}_1 mit den unbekanntenen Koeffizienten $a_{n,m}$:

$$z_0^{N_L} = \sum_{n,m=0}^{6N_L} a_{n,m} h_1^n \bar{h}_1^m \quad (4.3)$$

Für die Fourier-Transformation eines allgemeinen Summanden $h_1^n \bar{h}_1^m$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_1^n \bar{h}_1^m \cdot e^{-i\frac{\mu_i}{T}\bar{Q}} d\left[\frac{\mu_i}{T}\right] = \frac{e^{\ln(2\kappa)(n+m)N_T}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdot e^{-i\frac{\mu_i}{T}(n-m-\bar{Q})} d\left[\frac{\mu_i}{T}\right] = \sqrt[3]{\alpha^{n+m}} \delta_{n-m,\bar{Q}} \quad (4.4)$$

Wenn man die Terme in z_0 betrachtete, so erkennt man, dass für die Potenzen immer $(n-m) \bmod 3 = 0$ gilt, was sich auf die Potenzen in der Potenzreihe in (4.3) überträgt. Damit das Kronecker-Delta in (4.4) überhaupt einen Beitrag leisten kann, muss \bar{Q} auch mindestens ohne Rest durch drei teilbar sein. Dies bedeutet, wir erhalten nur ein nicht-trivales Ergebnis für unsere kanonische Zustandssumme, wenn wir Baryonen auf dem Gitter behandeln, welche als Inhalt immer vielfache von drei Quarks besitzen.

Die endgültige Berechnung der Fourier-Transformation wird nun mit Hilfe des Programms „Mathematica“ durchgeführt. Dieses kann relativ schnell die Potenzreihe für hohe Gitterpunktanzahl N_L bestimmen und die anschließende Fourier-Transformation wird dann dadurch ausgeführt, dass die Potenzen $h_1^n \bar{h}_1^m$ durch das entsprechende Kronecker-Delta ersetzt werden. Wir können also die kanonische Zustandssumme immer für eine fixierte Gitterpunktanzahl N_L und mittlere Quarkzahl \bar{Q} berechnen.

Im Fall, dass wir nur Quarks betrachten und die Antiquarks vernachlässigen, setzen wir \bar{h}_1 auf null. Dies ist gleichbedeutend zu einem Übergang zu sehr niedrigen Temperaturen bzw. hohen N_T . Die Rechnung ist dann komplett analog durchzuführen.

4.2 Diskrete Fourier-Transformation mit Wechselwirkung ohne Anti-quarks

Wir gehen nun zu tiefen Temperaturen über, also setzen wir $\bar{h}_1 = 0$. Dadurch erhalten wir folgenden Ausdruck für unsere großkanonische Zustandssumme:

$$Z_{Gk} = \left[z'_0 \left(1 - 6 \frac{\kappa^2 N_T}{N_c} \cdot \frac{z'_1{}^2}{z'_0{}^2} \right) \right]^{N_L} = \sum_{k=0}^{N_L} \binom{N_L}{k} (-6h_2)^k \frac{z'_1{}^{2k}}{z'_0{}^{2k-N_L}} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} z'_0 &= 1 + 4\alpha e^{3i\frac{\mu}{T}} + \alpha^2 e^{6i\frac{\mu}{T}} \\ z'_1 &= 6\alpha e^{3i\frac{\mu}{T}} + 3\alpha^2 e^{6i\frac{\mu}{T}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Für die kanonische Zustandssumme gilt nun:

$$Z_K = \sum_{k=0}^{N_L} \binom{N_L}{k} (-6h_2)^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(6\alpha e^{3it} + 3\alpha^2 e^{6it})^{2k}}{(1 + 4\alpha e^{3it} + \alpha^2 e^{6it})^{2k-N_L}} e^{-i\bar{Q}t} dt \quad (4.7)$$

Dabei haben wir die Variable $\frac{\mu}{T}$ durch t ersetzt. Dieses Integral stellt in der komplexen Ebene ein Kurvenintegral über den Rand des Einheitskreises $\partial B_1(0)$ dar. Mit dem Integrationsweg $\gamma(t) = e^{it}$ lässt sich das Integral wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z'_1{}^{2k}}{z'_0{}^{2k-N_L}} e^{-i\bar{Q}t} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(6\alpha\gamma^3(t) + 3\alpha^2\gamma^6(t))^{2k}}{(1 + 4\alpha\gamma^3(t) + \alpha^2\gamma^6(t))^{2k-N_L}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^{\bar{Q}+1}(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{(6\alpha z^3 + 3\alpha^2 z^6)^{2k}}{(1 + 4\alpha z^3 + \alpha^2 z^6)^{2k-N_L} \cdot z^{\bar{Q}+1}} dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

Mit Hilfe des Residuensatzes lässt sich dieses Integral berechnen. Dazu bestimmen wir jedoch erst die Singularitäten der Funktion unter dem Integral. Die nichttrivialen Singularitäten liegen bei:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{3}}{\alpha}} & z_2 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{3}}{\alpha}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{3}}{\alpha}} \cdot i & z_3 &= \bar{z}_2 \\ z_4 &= -\sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{3}}{\alpha}} & z_5 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{3}}{\alpha}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{3}}{\alpha}} \cdot i & z_6 &= \bar{z}_5 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Für die Beträge dieser gilt:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{3}}{\alpha}} \quad |z_4| = |z_5| = |z_6| = \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{3}}{\alpha}} \quad (4.10)$$

Da κ maximal 0.125 betragen kann, ist α maximal 0.015625 (3.13). Damit sind die Beträge dieser Singularitäten immer größer als 1 und es bleibt als einzige Singularität in der Menge $\bar{B}_1(0)$ die Stelle $z = 0$ übrig.

Nach dem Residuensatz ist das Integral durch das Residuum in der Null gegeben und man erhält für die komplette Zustandssumme:

$$Z_K = \sum_{k=0}^{N_L} \binom{N_L}{k} (-6h_2)^k \cdot \text{Res}_0 \left(\frac{(6\alpha z^3 + 3\alpha^2 z^6)^{2k}}{(1 + 4\alpha z^3 + \alpha^2 z^6)^{2k - N_L} z^{\bar{Q}+1}} \right) \quad (4.11)$$

Dieser Ausdruck wird nun wieder mit dem Programm „Mathematica“ für eine feste Gitterpunktanzahl N_L und mittlere Quarkanzahl \bar{Q} berechnet.

4.3 Berechnung der thermodynamischen Größen

Wir interessieren uns im folgenden vor allen für den Druck, das chemische Potential und die Energie. Alle drei Größen sind Ableitungen des Logarithmus der Zustandssumme, wobei wir nun von den Ableitungen zu finiten Differenzen übergehen:

$$\begin{aligned} p &= T \cdot \left. \frac{\partial \ln[Z_{kan}]}{\partial V} \right|_{T, \bar{Q}} \rightarrow T \cdot \frac{\ln[Z_{kan}(a^3 N_L + a^3)] - \ln[Z_{kan}(a^3 N_L - a^3)]}{2} \\ &= \frac{1}{N_T} \frac{\ln[Z_{kan}(N_L + 1)] - \ln[Z_{kan}(N_L - 1)]}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mu &= -T \cdot \left. \frac{\partial \ln[Z_{kan}]}{\partial \bar{Q}} \right|_{T, V} \rightarrow -T \cdot \frac{\ln[Z_{kan}(N_{Baryon} + 1)] - \ln[Z_{kan}(N_{Baryon} - 1)]}{2} \\ &= -\frac{1}{N_T} \frac{\ln[Z_{kan}(\bar{Q} + 3)] - \ln[Z_{kan}(\bar{Q} - 3)]}{2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Hierbei haben wir erst immer die Temperatur über $T = \frac{1}{aN_T}$ ausgedrückt und dann im letzten Schritt $a = 1$ gesetzt.

Wir gehen hier zu finiten Differenzen über, da wir die Zustandssumme immer nur für ein festes \bar{Q} und N_L berechnen können. Die finiten Differenzen können direkt in unser „Mathematica“ Programm implementiert und ausgerechnet werden. Darüberhinaus halten wir hier unsere Gitterkonstante a fest und betrachten die Ableitung als eine finite Differenz benachbarter Gitterpunkte.

Die Energie lässt sich im kanonischen Ensemble über eine Ableitung nach der inversen Temperatur β berechnen. Die Ableitung nach der inversen Temperatur wird nun durch eine Ableitung nach der Gitterkonstante a ersetzt und N_T konstant gehalten:

$$E = -\frac{\partial \ln[Z_{kan}]}{\partial \beta} = -\frac{1}{N_T} \frac{\partial \ln[Z_{kan}]}{\partial a} \quad (4.14)$$

Da jedoch der Hopping-Parameter (3.13) von der Gitterkonstante a abhängt, impliziert eine Variation in a eine Variation von κ und somit der Masse. Da man aber die Ableitung

des Systems nach a bei einer konstanten Baryonenmasse durchführen will, fordert man, dass die Baryonenmasse während der Ableitung konstant bleibt:

$$a \frac{\partial}{\partial a} (am_B) = am_B \quad (4.15)$$

Diese Nebenbedingung kann man nutzen, um $\frac{\partial \kappa}{\partial a}$ im Strong-Coupling-Bereich und für kleine κ zu bestimmen [8]:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial a} = -\kappa \frac{m_B}{3} \quad (4.16)$$

In unserem Hopping-Parameter befindet sich jedoch die nackte Baryonenmasse. Die zu benutzende Baryonenmasse ist nach [9] bis zur führenden Ordnung in κ gegeben durch:

$$m_B = -3 \ln(2\kappa) \quad (4.17)$$

In der Zustandssumme hängen nur die beiden Kopplungen α und h_2 von κ ab, weshalb man die Ableitung nach a wie folgt umschreiben kann:

$$\frac{\partial \ln[Z_{kan}(\alpha, h_2)]}{\partial a} = \frac{\partial \kappa}{\partial a} \frac{\partial \alpha}{\partial \kappa} \frac{\partial \ln[Z_{kan}(\alpha, h_2)]}{\partial \alpha} + \frac{\partial \kappa}{\partial a} \frac{\partial h_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \ln[Z_{kan}(\alpha, h_2)]}{\partial h_2} \quad (4.18)$$

Mit den Definitionen von α und h_2 ergibt sich damit unsere Energie im wechselwirkenden Fall zu:

$$E = \frac{m_B}{3} \left(3\alpha \frac{\partial \ln[Z_{kan}(\alpha, h_2)]}{\partial \alpha} + \frac{2\kappa^2}{N_c} \frac{\partial \ln[Z_{kan}(\alpha, h_2)]}{\partial h_2} \right) \quad (4.19)$$

Die Gitterkonstante a muss in diesem Ausdruck nicht weiter spezifiziert werden, da dessen Abhängigkeit nur noch in κ steckt, für welches wir später Werte wählen. Aus diesem Ausdruck lässt sich nun die Bindungsenergie berechnen. Bei tiefen Temperaturen sind kinetische Fluktuationen der Teilchen unterdrückt und man erhält die Bindungsenergie als Differenz zwischen Energie und der Ruheenergie des Systems. Um die durchschnittliche Bindungsenergie pro Baryon zu erhalten, teilt man durch die Anzahl der Baryonen:

$$E_{Bin} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{E - N_B m_B}{N_B} \quad (4.20)$$

Die endgültige Berechnung der Energie wird nun wieder mit dem Programm „Mathematica“ durchgeführt.

4.4 Einheiten und Skala

Für unsere Rechnungen, wie auch schon in dieser ganzen Arbeit, sind unsere Ausdrücke in natürlichen Einheiten gegeben. Nun gehen wir für weitere Rechnungen auch noch in Gittereinheiten über und setzen $a = 1$. Später in den Plots wird a wieder eingefügt, um zu erkennen wie stark die Gitterkonstante unsere Skala bestimmt.

Um sinnvolle Ergebnisse für unser chemisches Potential zu erhalten normieren wir dieses im folgenden auf unsere Baryonenmasse. Das chemische Potential ist eine intensive Zustandsgröße, welche charakterisiert ob eine Reaktion oder Umwandlung eines Stoffes ohne äußere Einflüsse ablaufen kann. Durch die Normierung des chemischen Potentials

können wir später an unseren Daten besser erkennen, ab wann die Anregung von Quarks zu einem Baryon stattfindet. Auch die Bindungsenergie normieren wir im Folgenden auf die Baryonenmasse, wobei wir diese nun mit ϵ bezeichnen:

$$\epsilon = \frac{E_{Bin}}{m_B} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{E - N_B m_B}{N_B m_B} \quad (4.21)$$

4.5 Erreichung des thermodynamischen Limes

Im großkanonischen Ensemble ist der Druck durch folgende Relation gegeben:

$$p = \frac{T}{V} \ln(Z_{GK}) = \frac{1}{N_T N_L} \ln \left(\left[z_0 \left(1 - 6 \frac{\kappa^2 N_T}{N_c} \cdot \frac{z_1^2}{z_0^2} \right) \right]^{N_L} \right) = \frac{1}{N_T} \ln \left(z_0 \left(1 - 6 \frac{\kappa^2 N_T}{N_c} \cdot \frac{z_1^2}{z_0^2} \right) \right) \quad (4.22)$$

Damit ist der Druck im großkanonischen Ensemble unabhängig von der totalen räumlichen Gitterpunktanzahl N_L . Da im thermodynamischen Limes beide Ensembles die gleiche Beschreibung der Physik liefern müssen, erwartet man, dass der Druck im kanonischen Ensemble im thermodynamischen Limes einen konstanten Wert annimmt. In Abbildung [4.1] ist der Druck im freien Fall gegen N_L bei einer konstante Dichte aufgetragen. Man erkennt, dass der Druck ein Plateau erreicht, welches umso schneller erreicht wird, je kleiner die Dichte ist.

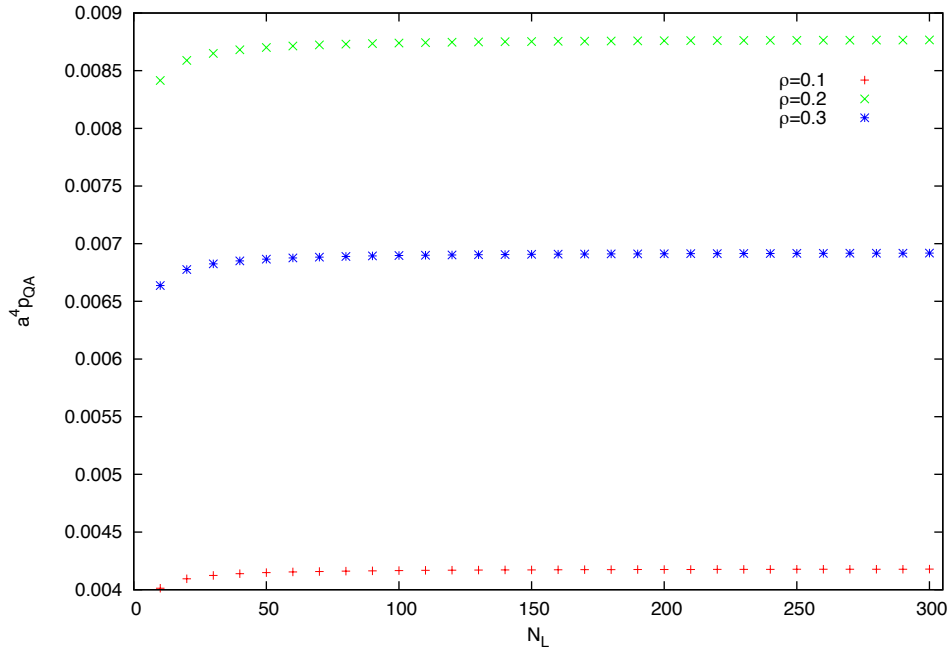


Abb. [4.1]: Druck für verschiedene Dichten bei $N_T = 25$ und $\kappa = 0.005$

Das chemische Potential μ ist eine Zustandsvariable der großkanonischen Zustandssumme und wird im kanonischen Ensemble dagegen als Erwartungswert bestimmt. Da aber die statistischen Fluktuationen im thermodynamischen Limes verschwinden, nimmt auch das chemische Potential für eine feste Dichte einen konstanten Wert an. Ebenso verschwinden auch die Fluktuationen der Energie, welche im großkanonischen Ensemble auf analoge Weise berechnet wird wie im kanonischen. Am Beispiel des Drucks, erkennt man, dass der thermodynamische Limes für diesen bei $N_L = 100$ schon erreicht ist. Beim chemischen Potential und der Energie wird der thermodynamische Limes früher erreicht. Alle folgenden Rechnungen sind nun bei einer Gitterpunktanzahl von 100 Gitterpunkten ausgewertet worden, da hier der thermodynamische Limes schon erreicht ist und die Rechenzeit von „Mathematica“ noch kurz genug ist.

4.6 Druck im kanonischen Ensemble

In den Abbildungen [4.2] und [4.3] ist der Druck im freien Fall mit Quarks und Anti-quarks für verschiedene Temperaturen und verschiedene κ dargestellt. Der Druck wird dabei gegen die Baryondichte aufgetragen. Man erkennt deutlich, dass der Druck bei einer Dichte von 2.0 Baryonen pro Gitterpunkt divergiert. Darüberhinaus hat im freien Fall κ keine Auswirkung auf den Druck.

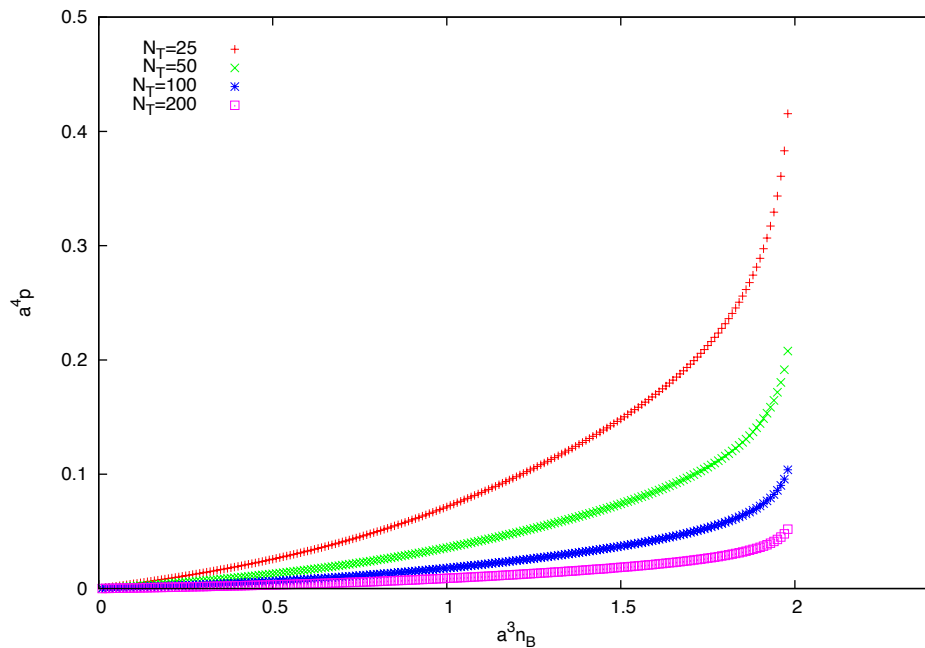


Abb. [4.2]: Druck im Fall mit Quarks und Antiquarks bei $N_L = 100$, $\kappa = 0.005$ und für verschiedene N_T

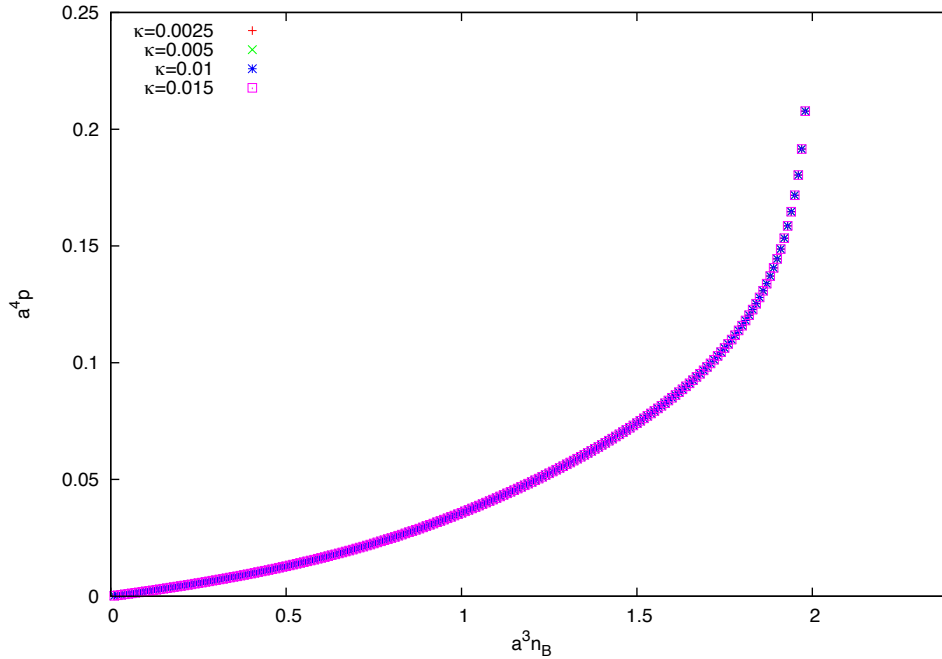


Abb [4.3]: Druck im Fall mit Quarks und Antiquarks bei $N_L = 100$, $N_T = 50$ und für verschiedene κ

Im freien Fall wirkt zwischen den Quarks auf dem Gitter nur das Pauli-Prinzip, da im freien Fall nur die Spin- und Farbstruktur der Teilchen berücksichtigt wird. Das Pauli-Prinzip erkennt man in den Graphiken sehr gut an der Divergenz bei einer Dichte von 2.0. An jedem Gitterpunkt können sich nämlich netto höchstens sechs Quarks befinden, da jedes Quark zwei Spin- und drei Farbfreiheitsgrade besitzt. Also können sich maximal $6N_L$ Quarks und somit maximal $2N_L$ Baryonen auf dem Gitter befinden. Da diese Grenze nach dem Pauli-Prinzip nicht überschritten werden darf, muss der Druck bei einer Dichte von 2.0 divergieren, sodass keine weiteren Quarks dem Gitter hinzugefügt werden können. Man erkennt dieses Phänomen auch an der kanonischen Zustandssumme, welche aufgrund der Fourier-Transformation für eine Quarksanzahl größer als $6N_L$ immer null ergibt. Dieses Phänomen ist eine Konsequenz des Gitters, denn im Kontinuum wirkt zwar auch das Pauli-Prinzip, jedoch gibt es eine kontinuierliche Anzahl an Zuständen, welche besetzt werden können.

Im freien Fall werden nur zeitliche „Hops“ der Eichfelder aus der Hoppingentwicklung (Kapitel 3.4) berücksichtigt, weshalb die Quarks an ihren Gitterplätzen festsitzen. Der Druck hängt in der freien Theorie primär von der Anzahl der besetzten Gitterpunkte ab, da dieser mit der Dichte steigt und unabhängig von κ ist. κ beeinflusst in der freien Theorie nur die Masse der Quarks, welche im Boltzmann-Faktor der kanonischen Zustandssumme nur einen Skalierungsfaktor darstellt und somit nicht den Druck beeinflusst. Die Temperatur taucht ebenfalls als Gewichtungsfaktor der Energien im Boltzmann-Faktor auf, wobei die Energien mit sinkender Temperatur stärker gewichtet werden, weshalb

der Druck mit sinkender Temperatur abnimmt.

In Abbildung [4.4] ist ein direkter Vergleich zwischen den Fällen einmal mit Antiquarks und einmal ohne diese im freien Fall dargestellt. Da der Unterschied minimal ist, ist hier der relative Druckunterschied zwischen den beiden Fällen gegen die Dichte aufgetragen. Die Verläufe des Drucks ohne Antiquarks im freien Fall sind vollkommen analog, jedoch ist für niedrige Temperaturen der Druck für den Fall mit Antiquarks etwas größer. Der relative Unterschied sinkt aber sehr schnell mit steigender Dichte. Für $N_T = 5$ liegt der maximale relative Unterschied schon im Bereich von 10^{-13} . Die Antiquarkbeiträge können also relativ früh beim Übergang zu tiefen Temperaturen vernachlässigt werden.

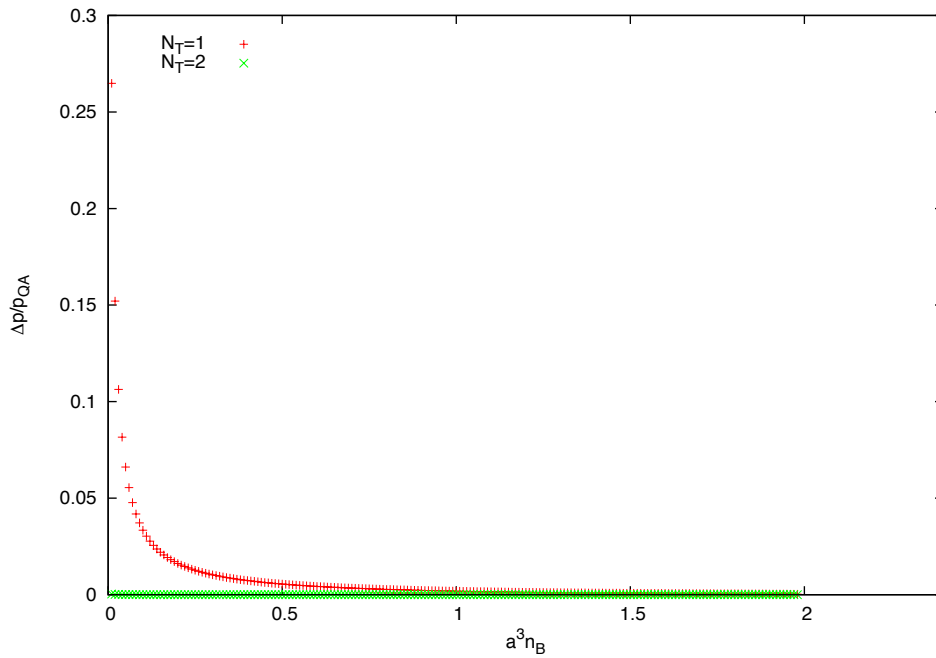


Abb [4.4]: Relativer Druckunterschied zwischen den Fällen einmal mit Antiquarks und einmal ohne bei $N_L = 100$, $\kappa = 0.015$ und für verschiedene N_T

Schaltet man nun Wechselwirkungen ein und betrachtet nur Quarks auf dem Gitter, so ergibt sich der gleiche Verlauf des Drucks wie im freien Fall. Der Druck hängt im wechselwirkenden Fall jedoch von κ ab. Auf einer großen Skala ist der Unterschied zwischen dem wechselwirkenden und dem freien Fall nicht zu erkennen, weshalb hier die Differenz beider dargestellt ist. Um den gesamten Dichtebereich ausnutzen zu können, ist in Abbildung [4.5] die Differenz für eine hohe Temperatur ($N_T = 1$) dargestellt. Darüberhinaus ist die Auswirkung der Temperatur auf diese Differenz in Abbildung [4.6] dargestellt. Bei zu niedrigen Temperaturen konnte „Mathematica“ einige Ausdrücke für hohe Dichten nicht mehr korrekt bestimmen, weshalb die Graphen bei hohen Dichten in Abbildung [4.6] abbrechen.

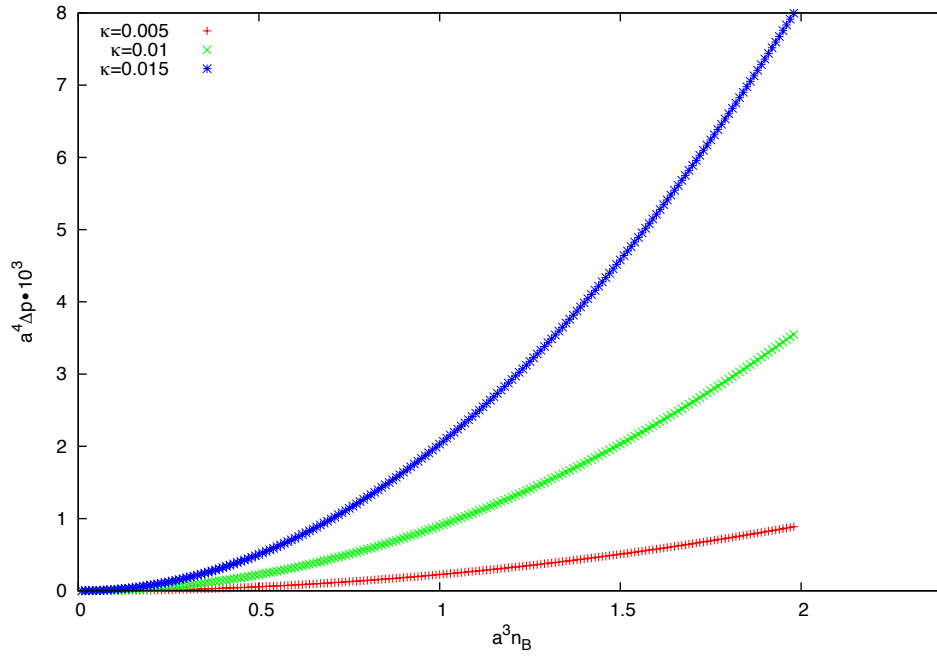


Abb. [4.5]: Druckdifferenz zwischen den Fällen Quarks mit Wechselwirkung und freier Fall bei $N_L = 100$, $N_T = 1$ für unterschiedliche κ

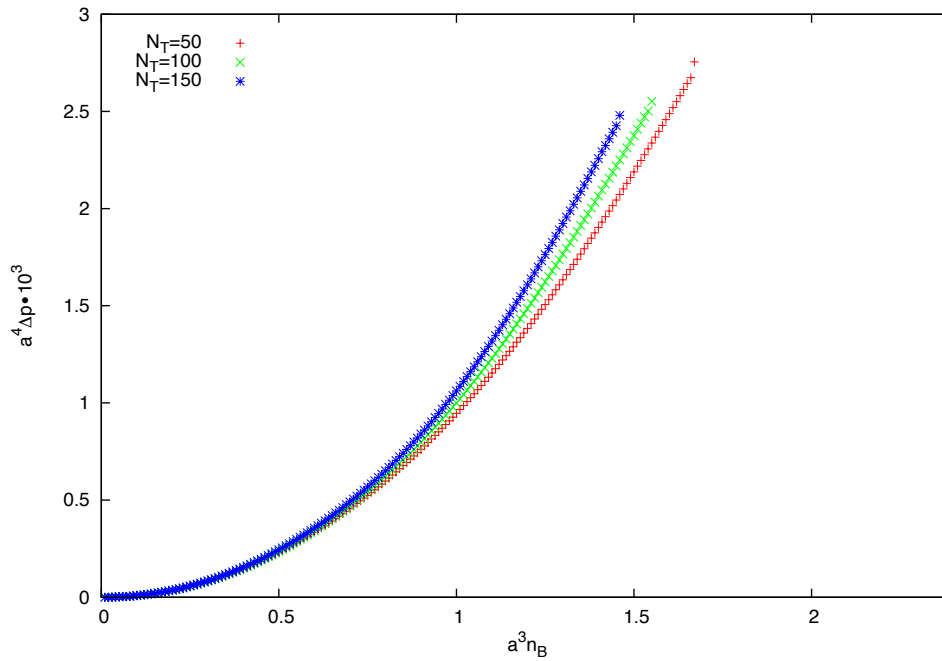


Abb. [4.6]: Druckdifferenz zwischen den Fällen Quarks mit Wechselwirkung und freier Fall bei $N_L = 100$, $\kappa = 0.01$ und für unterschiedliche N_T

Aufgrund der Wechselwirkung gibt es attraktive Quark-Quark-Wechselwirkungen untereinander und der Druck steigt mit steigender Dichte an. Je mehr Quarks sich auf dem Gitter befinden desto verstärkt ist die Wechselwirkung und je größer κ desto stärker ist die einzelne Wechselwirkung zwischen den Quarks. Deshalb steigt der Druck mit steigender Dichte und auch mit steigendem κ . Je größer die Temperatur desto kleiner ist hier die Differenz, da thermische Fluktuationen die Wechselwirkungen unterdrücken.

4.7 Chemisches Potential im kanonischen Ensemble

In Abbildung [4.7] ist das chemische Potential in Abhängigkeit von der Dichte im freien Fall mit Quarks und Antiquarks für unterschiedliche Temperaturen aufgetragen. Damit man den Übergang zu den tiefen Temperaturen erkennt, ist auch der Fall $N_T = 1$ aufgetragen. Das chemische Potential ist für tiefe Temperaturen nahe bei einer Baryonenmasse und verläuft für eine endliche Temperatur zunächst unter dieser, bis es bei einer Dichte von 1.0 Baryonen pro Gitterpunkt ein chemisches Potential von einer Baryonenmasse erreicht und danach für höher Dichten immer etwas größer als diese ist. Es springt auf einen Wert unter einer Baryonenmasse sobald sich Baryonen auf dem Gitter befinden und divergiert dann bei einer Dichte von 2.0. Für hohe Temperaturen ist dieser Übergang glatter. Wie auch beim Druck hat κ im freien Fall keine Auswirkungen auf das chemische Potential. Wenn man nur Quarks auf dem Gitter betrachtet, verläuft das chemische Potential genau gleich und besitzt auch die selben Werte. Erst bei hohen Temperaturen ergibt sich zwischen den Fällen mit Antiquarks und ohne eine Differenz, welche bei $N_T = 1$ im Bereich von 10^{-6} liegt.

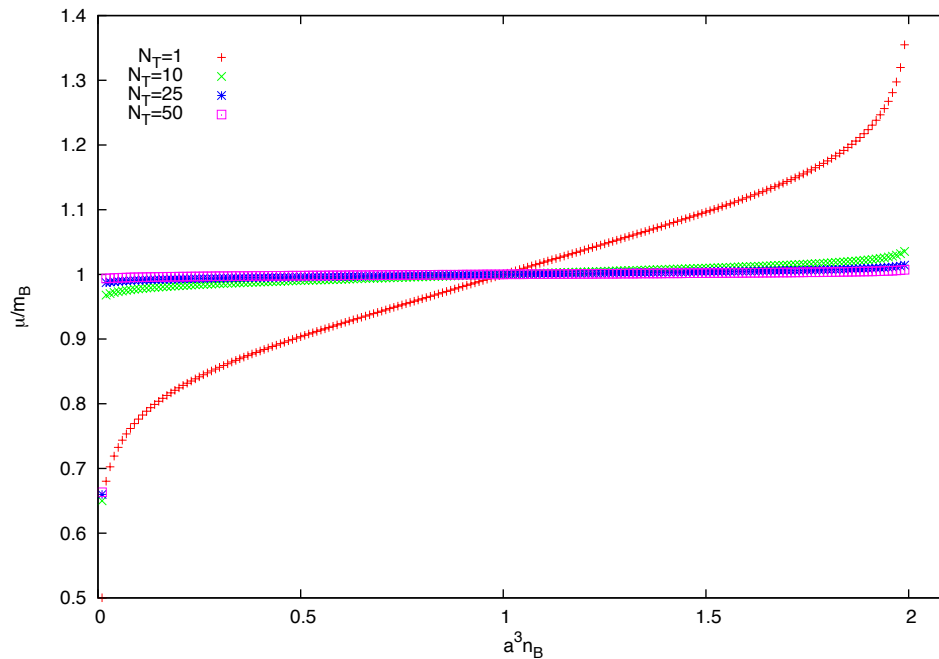


Abb. [4.7]: Chemische Potential im freien Fall mit Quarks und Antiquarks bei $N_L = 100$, $\kappa = 0.015$ und für verschiedene N_T

Sobald sich genug Quarks auf dem Gitter befinden können diese zu Baryonen angeregt werden. Bei niedrigen Temperaturen steckt fast die komplette Energie des Systems in der Ruheenergie. Da wir hier den freien Fall betrachten, kostet die Anregung zu einem Baryon immer die gleiche Energie, die Baryonenmasse. Deshalb liegt bei tiefen Temperaturen der Wert des chemischen Potentials nahezu immer bei 1.0. Wird die Temperatur größer kann die Anregung zu einem Baryon aufgrund thermischer Fluktuationen schon vorher passieren, weshalb bei geringer Baryonendichte ein niedrigeres chemisches Potential vorliegt. Das chemische Potential muss auch wie der Druck bei einer Dichte von 2.0 aufgrund des Pauli-Prinzips dann divergieren.

Schaltet man nun eine Wechselwirkung ein so wird der Übergang zwischen den Dichten 0 und 2.0 immer glatter je größer κ ist (Abbildung [4.8]). Je größer κ , desto stärker gibt es attraktive Quark-Quark-Wechselwirkung und Quarks können früher zu einem Baryon angeregt werden.

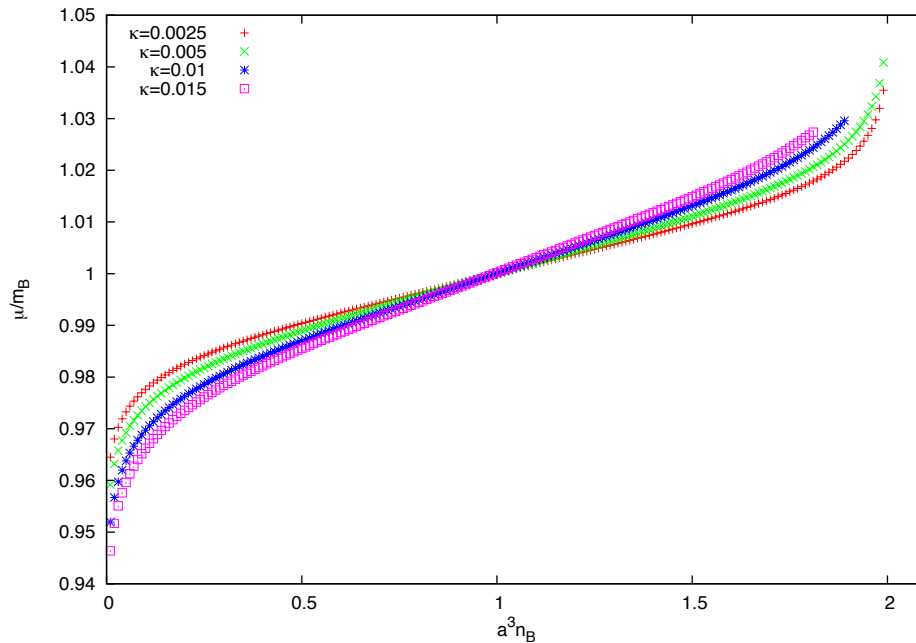
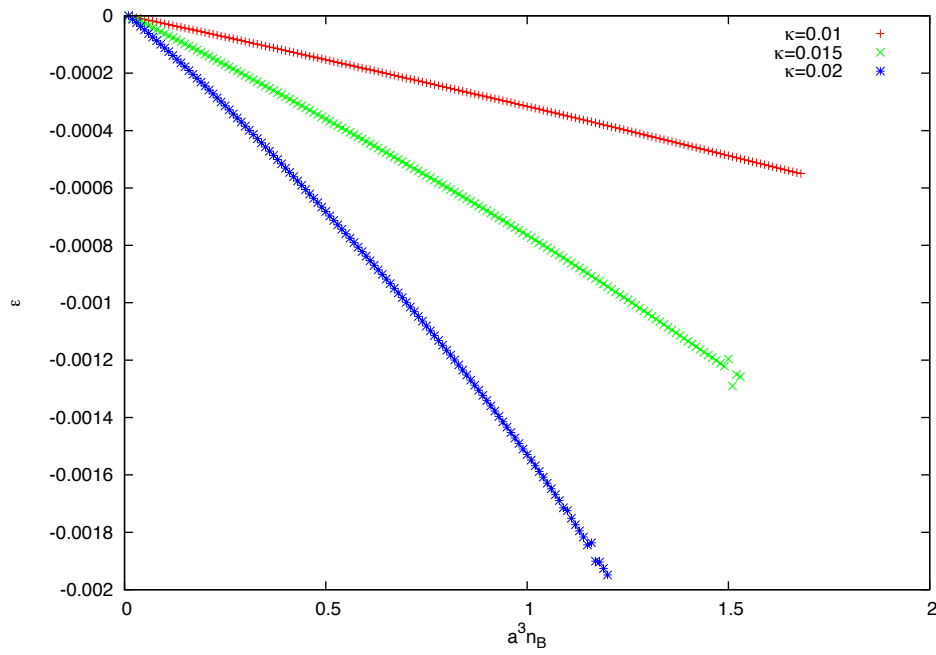
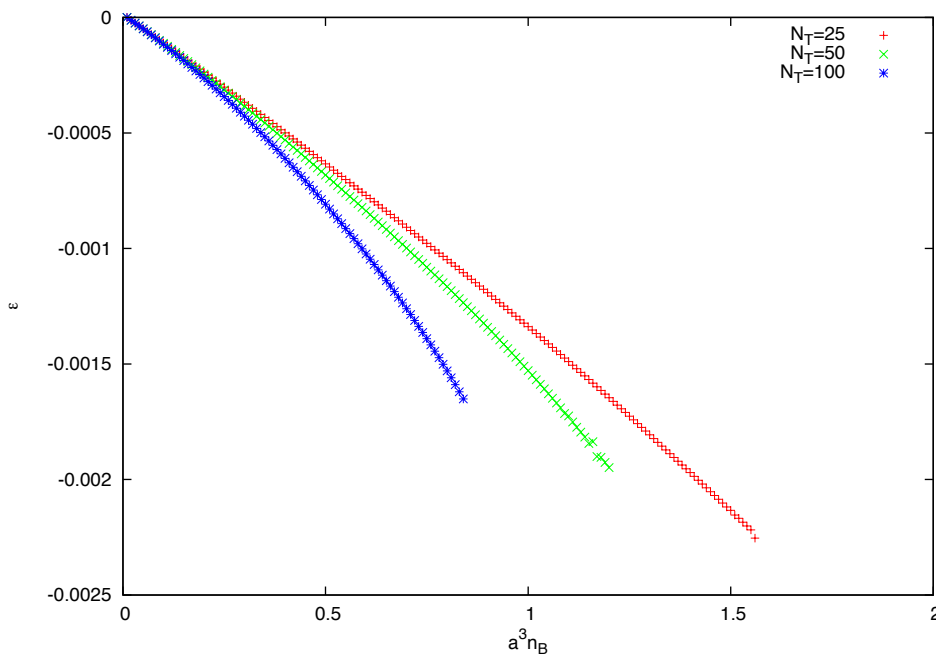


Abb. [4.8]: Chemische Potential für Quarks im wechselwirkenden Fall bei $N_L = 100$, $N_T = 10$ und für verschiedene κ

4.8 Energie im kanonischen Ensemble

Die Bindungsenergie für Quarks im wechselwirkenden Fall ist für unterschiedliche κ in Abbildung [4.9] dargestellt. Deutliche zu erkennen ist eine verstärkte Zunahme des Betrags der Bindungsenergie mit steigender Wechselwirkung κ und zunehmender Dichte.

Abb. [4.9]: Bindungsenergie bei $N_L = 100$, $N_T = 50$ und für verschiedene κ Abb. [4.10]: Bindungsenergie bei $N_L = 100$, $\kappa = 0.02$ und für verschiedene N_T

Für hohe Dichten war die Berechnung der Werte mit dem Programm „Mathematica“ nicht mehr möglich, weshalb die Graphen abbrechen. Aber auch wie beim Druck und

dem chemischen Potential ist eine Divergenz in positive Richtung bei einer Dichte von 2.0 zu erwarten, denn aufgrund des Pauli-Prinzips müsste es unendlich viel Energie kosten ein weiteres Quark auf dem Gitter zu platzieren. In Abbildung [4.10] ist die Auswirkung der Temperatur auf die Bindungsenergie dargestellt. Je höher die Temperatur desto größer sind die kinetischen Anteile in der Energie, weshalb der Betrag der Bindungsenergie für höhere Temperaturen abnimmt. Im freien Fall ist die Bindungsenergie null, da es aufgrund fehlender Wechselwirkung keine Bindungen zwischen den Baryonen gibt.

4.9 Vergleich mit dem großkanonischen Ensemble

Wenn man die beiden Ensembles vergleichen will, muss man berücksichtigen, dass sich bei Wechsel zwischen den Ensembles auch eine der abgängigen Zustandsgrößen ändert. Beim Übergang vom großkanonischen zum kanonischen Ensemble wird dabei das chemische Potential durch die Quarkanzahl ersetzt. Will man nun den Druck und die Energie im großkanonischen Ensemble zu einer gegebenen Dichte bestimmen, so muss man in die großkanonische Zustandssumme das chemische Potential einsetzen, welches man mit Hilfe des kanonischen Ensembles berechnet hat.

In Abbildung [4.11] ist der Druck im freien Fall mit Antiquarks für beide Ensembles dargestellt. N_T und κ haben auch im großkanonischen die gleiche Auswirkung auf den Druck wie im kanonischen. Im hier dargestellten Fall liegt die maximale numerische Differenz im Bereich von 10^{-3} . Auch im wechselwirkenden Fall ist die Übereinstimmung sehr gut und der Fehler befindet sich im selben Bereich.

Um die Auswertung des chemischen Potentials mit dem großkanonischen Ensemble zu vergleichen, berechnet man die mittlere Baryondichte im großkanonischen Ensemble. Die mittlere Quarkdichte im großkanonischen Ensemble ist als die Ableitung nach der Fugazität bei konstanter Temperatur und Volumen definiert. Da die einzige Abhängigkeit der Fugazität in h_1 steckt, kann die Ableitung nach der Kettenregel in eine Ableitung nach h_1 umgeschrieben werden:

$$n_Q = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln[Z_{Gk}(h_1, h_2)]}{\partial z} \Big|_{T,V} = \frac{1}{N_T N_L} \frac{\partial h_1}{\partial z} \frac{\partial \ln[Z_{Gk}(h_1, h_2)]}{\partial h_1} \quad (4.23)$$

Für die Baryondichte gilt dann:

$$n_B = \frac{1}{3} n_Q = \frac{1}{3} \left(\frac{12h_1^3 + 6h_1^6}{z_0'} - 648h_2 \frac{h_1^6(2 + h_1^3)(1 + h_1^3 + h_1^6)}{z_0'^3(1 - 6h_2 \frac{z_1'^2}{z_0'^2})} \right) \quad (4.24)$$

Der Vergleich des chemischen Potentials in beiden Ensembles ist in Abbildung [4.12] dargestellt. Wie beim Druck ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den beiden Ensembles. Der Fehler liegt auch hier in einem Bereich von 10^{-3} .

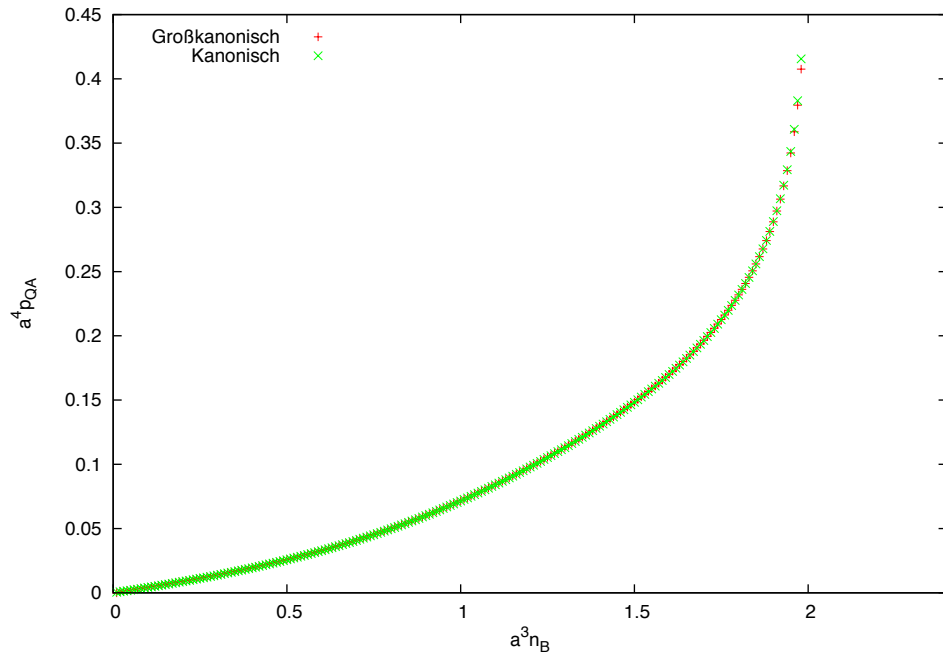


Abb. [4.11]: Druck im kanonischen und großkanonischen Ensemble im freien Fall bei $N_L = 100$, $N_T = 25$ und $\kappa = 0.005$

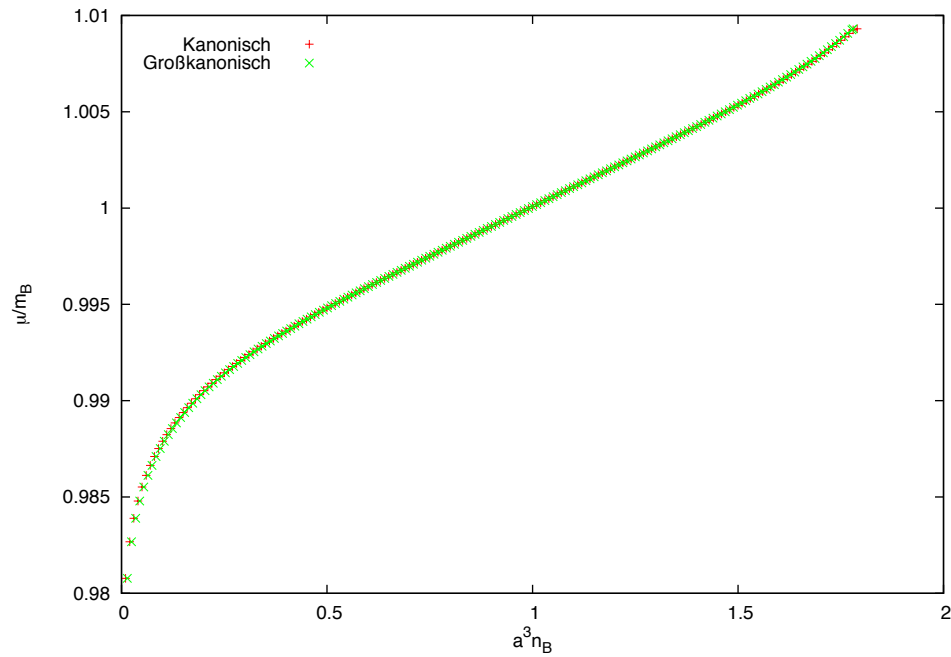


Abb. [4.12]: Chemisches Potential im kanonischen und großkanonischen Ensemble im wechselwirkenden Fall bei $N_L = 100$, $N_T = 25$ und $\kappa = 0.01$

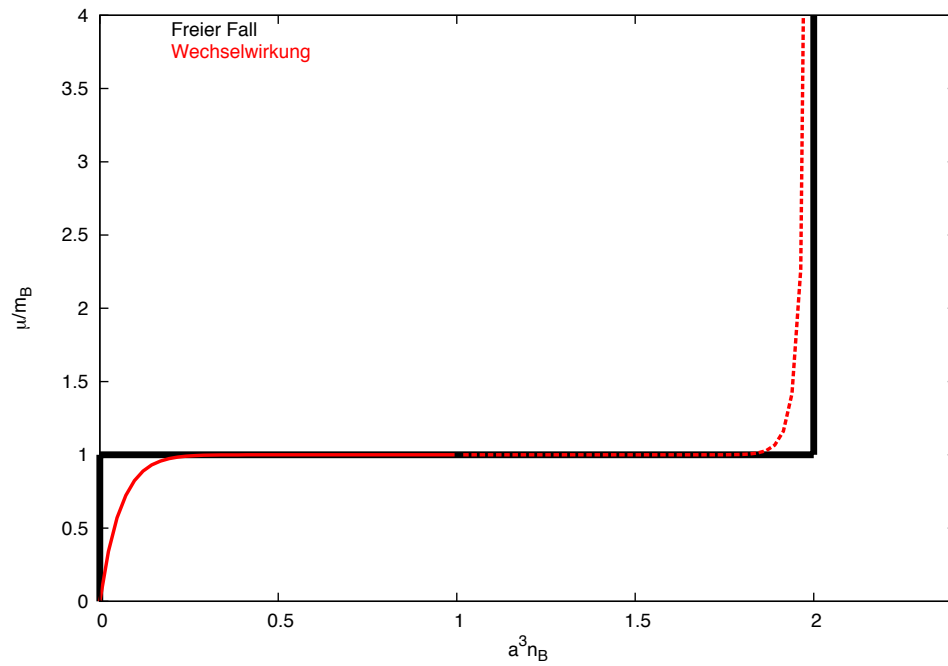
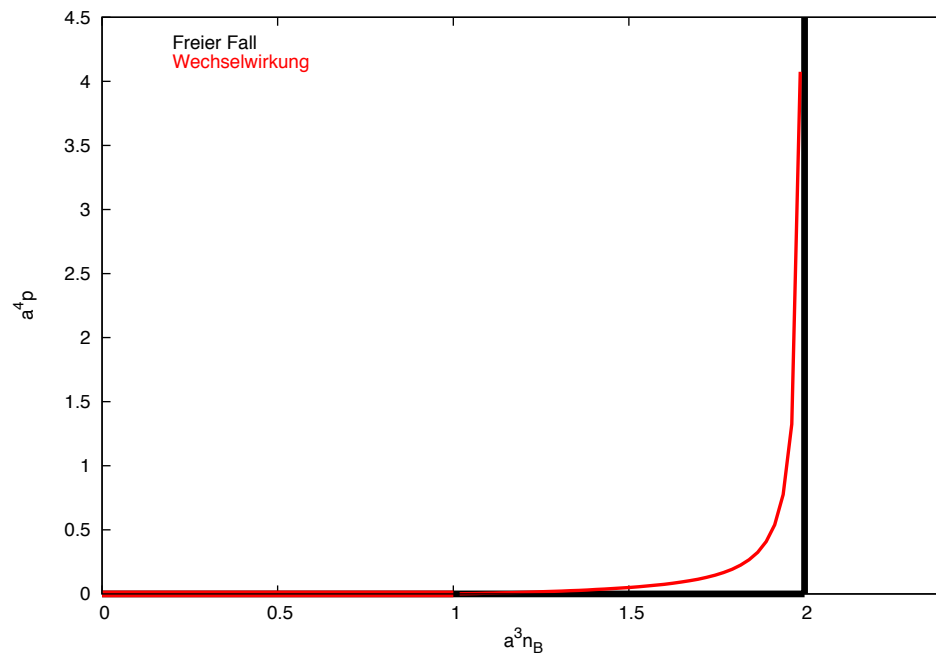
Die Bindungsenergie lässt sich nicht so gut vergleichen, da aufgrund der Ableitung nach der Gitterkonstante sich teilweise starke Abweichungen ergeben. Jedoch bestätigen die Ergebnisse für den Druck und das chemische Potential eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den beiden Ensembles.

4.10 Grenzfall $N_T \rightarrow \infty$

Die Abbildungen [4.13] und [4.14], welche den Grenzfall $N_T \rightarrow \infty$ für das chemische Potential und den Druck zeigen, beruhen nicht auf Daten, sondern sind anhand von Funktionen so modelliert worden, dass sie diesen Grenzfall gut widerspiegeln.

Zunächst betrachten wir den Grenzfall $N_T \rightarrow \infty$ für das chemische Potential, aus welchem man dann relativ leicht auf den Grenzfall des Drucks mit Hilfe des großkanonischen Ensembles schließen kann. Im freien Fall geht das chemische Potential in eine Stufenfunktion über, was sich auch schon an den Verläufen in Abbildung [4.7] erkennen lässt. Dieses Phänomen bezeichnet man auch als Silver-Blaze-Eigenschaft. Sobald sich genug Quarks auf dem Gitter befinden, um Baryonen bilden zu können, bilden sich diese und das chemische Potential springt auf eine Baryonenmasse. Da die Temperatur null beträgt, findet der Phasenübergang von Quarks zu Baryonen erst statt, wenn das chemische Potential zur Anregung der Baryonenmasse erreicht ist und nicht schon vorher. Die Effekte des Gitters verschwinden für eine Temperatur von null, da der Boltzmann-Faktor in unserer kanonischen Zustandssumme für jede Besetzungszahl des Gitters den selben Wert liefert. Das Pauli-Prinzip bleibt jedoch erhalten, weshalb das chemische Potential bei einer Baryondichte von 2.0 sprunghaft divergiert. Den wechselwirkenden Fall können wir anhand unserer Daten zwar nicht komplett extrapolieren, jedoch ist intuitiv klar, dass aufgrund der Wechselwirkung auch bei null Kelvin die Anregung zu einem Baryon schon bei kleinerem chemischen Potential passiert. Deshalb ist die Stufenfunktion im Vergleich zum freien Fall ausgeschmiert.

In Abbildung [4.2] ist gut zu erkennen, dass der Druck im freien Fall für $N_T \rightarrow \infty$ auf null geht. Das Pauli-Prinzip bleibt jedoch wieder erhalten, weshalb der Druck bei einer Dichte von 2.0 sprunghaft divergiert. Der wechselwirkende Fall lässt sich verstehen, wenn man das chemische Potential und die großkanonische Zustandssumme betrachtet. Für eine Dichte unter 1.0 ist das chemische Potential etwas kleiner als die Baryonenmasse, weshalb die Kopplung h_1 in der großkanonischen Zustandssumme exponentiell fällt und der Druck im Grenzfall gegen null strebt. Überschreitet man jedoch eine Dichte von 1.0, so ist das chemische Potential etwas größer als die Baryonenmasse und die Kopplung h_1 wächst exponentiell, weshalb der Druck nun ansteigt. Aufgrund des Pauli-Prinzips divergiert dieser wieder bei einer Dichte von 2.0.

Abb. [4.13]: Schematischer Verlauf des chemischen Potentials im Grenzfall $N_T \rightarrow \infty$ Abb. [4.14]: Schematischer Verlauf des Drucks im Grenzfall $N_T \rightarrow \infty$

Ausblick

Auch wenn die Ergebnisse aus dem kanonischen Ensemble sehr gut mit denen des großkanonischen übereinstimmen, so ist die Transformation auf das kanonische Ensemble doch sehr mühsam. Hinzu kann man aufgrund der Fourier-Transformation für die kanonische Zustandssumme nur Werte für eine feste Gitterpunkt- und mittlerer Quarkanzahl bestimmen, weshalb eine analytische Analyse dieser erschwert ist. Jedoch bietet die Arbeit mit dem kanonischen Ensemble den Vorteil, dass unsere abhängige Zustandsgröße die Quarkanzahl ist. Die physikalischen Ergebnisse lassen sich in Abhängigkeit von der Quarkanzahl meist leichter deuten als in Abhängigkeit des chemischen Potentials.

Weiterführend könnten in weiteren Projekten höhere Ordnungen von κ mit einbezogen werden und auch Korrekturen der Kopplungskonstanten h_1 und h_2 . Die Korrekturen für h_1 und h_2 sollten dabei über den Strong-Coupling-Bereich hinausgehen. Darüberhinaus könnte man versuchen mit höheren Korrekturen eine bessere Konvergenz der Energie zu erreichen und auch versuchen Werte für höhere Dichten zu ermitteln. Weitergehend kann man untersuchen, wie sich der wechselwirkende Fall ändert, wenn man Anitquarks hinzunimmt. Da aber dann die Nullstellen eines sehr viel schweren Polynoms (höhere Ordnungen) zu bestimmen sind, ist die Berechnung der Fourier-Transformation natürlich erschwert.

In dieser Arbeit wird die Volumenableitung durch eine finite Differenz benachbarter Gitterpunkte ersetzt und die Energie über eine Ableitung nach der Gitterkonstanten a berechnet. Dabei wäre es interessant, dafür eine andere Methode zu benutzen, um zu beobachten, wie sich die Art der Ableitung auf unsere Ergebnisse auswirkt. Man könnte versuchen diese effektive Theorie auf einem anisotropen Gitter, mit einer Gitterkonstanten für das räumliche Gitter a_S und eine Gitterkonstanten für die Zeitrichtung a_T , zu formulieren. Die thermodynamischen Größen könnten dann durch eine Ableitung nach diesen Gitterkonstanten bestimmt werden.

Appendix

Liste der Eichintegrale über Polyakov-Loops

$$\int \mathcal{D}U_4 = 1$$

$$\int \mathcal{D}U_4 L_{\vec{x}} L_{\vec{x}}^\dagger = 1$$

$$\int \mathcal{D}U_4 L_{\vec{x}}^3 = 1$$

$$\int \mathcal{D}U_4 (L_{\vec{x}}^\dagger)^3 = 1$$

$$\int \mathcal{D}U_4 L_{\vec{x}}^2 (L_{\vec{x}}^\dagger)^2 = 2$$

Literatur

- [1] Owe Philipsen (2010): Lattice QCD at non-zero temperature, Lecture at the Summer School „Modern perspectives in lattice QCD“, Les Houches, August 3-28, 2009, arXiv:1009.4089v2 [hep-lat], zuletzt überarbeitet 4. Mai 2013
- [2] Christof Gattringer und Christian B. Lang: Quantum Chromodynamics on the lattice: An Introductory Presentation, Lecture Notes in Physics 788, Springer, Berlin Heidelberg, 2010, DOI: 10.1007/978-3-642-01850-3
- [3] Jan Smit: Introduction to Quantum Fields on a Lattice, Cambridge Lecture Notes in Physics (Book 15), Cambridge University Press, 2002, ISBN: 0521890519
- [4] Jens Langelage, Mathias Neumann, Owe Philipsen: Heavy dense QCD and nuclear matter from an effective lattice theory, 17.03.2014, DOI: 10.1007/JHEP09(2014)131, arXiv:1403.4162v1 [hep-lat]
- [5] Michael Creutz: On invariant integration over $SU(N)$, in: Journal of Mathematical Physics 19, Issue 10, 2043, 1978, Online veröffentlicht 11. August 2008; DOI: 10.1063/1.523581
- [6] Mathias Neuman: Effective Theory for Heavy Quark QCD at Finite Temperature and Density with Stochastic Quantization, 2015, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades an der Goethe Universität Frankfurt am Main bei Prof. Owe Phillipsen, http://th.physik.uni-frankfurt.de/philipsen/theses/neuman_diss.pdf
- [7] Jonas Rylund Glesaaen: Heavy Quark QCD at Finite Temperature and Density Using an Effective Theory (noch nicht veröffentlicht), 2016, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades an der Goethe Universität Frankfurt am Main bei Prof. Owe Phillipsen
- [8] István Montvay und Gernot Münster: Quantum fields on the lattice, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press 1994, ISBN: 0521404320
- [9] Andreas Halsch: Some Polyakov loop expectation values with an effective lattice theory, 20. Oktober 2015, Bachelor These bei Prof. Owe Phillipsen, http://th.physik.uni-frankfurt.de/philipsen/theses/halsch_ba.pdf

Abbildungsverzeichnis

- [2.1] Bild entnommen aus [2] S. 55

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit gemäß §30 (12) der Ordnung des Fachbereichs Physik an der Johann Wolfgang von Goethe Universität für den Bachelor- und Masterstudiengang Physik selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegen.

Datum: _____ Unterschrift: _____