

Ideale relativistische Fermi-Gase zur Beschreibung nicht-wechselwirkender Hadronen

Institut für theoretische Physik
Goethe-Universität Frankfurt

Bachelorarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
vorgelegt von

Miguel Salg

am 10. September 2018

Erstgutachter und Betreuer: Prof. Dr. Owe Philipsen
Zweitgutachter: Dr. Marc Wagner

Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit werden die thermodynamischen Eigenschaften eines idealen relativistischen Fermi-Gases berechnet. Dazu wird sowohl die analytische Herleitung der grundlegenden Gleichungen diskutiert, als auch die numerische Lösung der hierbei auftretenden Integrale. Anschließend werden Gemische solcher idealer Fermi-Gase behandelt und die sich ergebenden Effekte untersucht. Die in der vorliegenden Arbeit betrachtete Anwendung dieses Modells stellt ein Gas nicht-wechselwirkender Hadronen dar.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	2
1. Einleitung	5
2. Masselose Teilchen / ultrarelativistischer Limes	6
2.1. Analytische Berechnungen	6
2.1.1. Herleitung des großkanonischen Potentials	6
2.1.2. Der Polylogarithmus	7
2.1.3. Herleitung der thermodynamischen Größen	8
2.1.4. Grenzfallbetrachtungen	9
2.2. Numerische Lösung und Plots	10
2.2.1. Verwendung von <i>Mathematica</i>	10
2.2.2. Diskussion der Plots (Abbildungen s. Anhang A.1)	10
3. Allgemeiner Fall: massive Teilchen	11
3.1. Analytische Berechnungen	11
3.1.1. Herleitung des großkanonischen Potentials	11
3.1.2. Herleitung der grundlegenden thermodynamischen Größen	11
3.1.3. Herleitung der Schallgeschwindigkeit	12
3.1.4. Grenzfallbetrachtung für $T \rightarrow 0$	13
3.1.5. Die (modifizierten) Besselfunktionen	16
3.1.6. Grenzfallbetrachtung für das nicht-entartete Gas	17
3.2. Numerische Lösung und Plots	18
3.2.1. Numerische Integration mit <i>Mathematica</i>	18
3.2.2. Diskussion der Plots (Abbildungen s. Anhang A.2)	19
4. Gemische idealer relativistischer Fermi-Gase	22
4.1. Analytische Berechnungen	22
4.2. Numerische Lösung, Plots und Datenanalyse	23
4.2.1. Beispiel: zweikomponentiges Gemisch (Abbildungen s. Anhang A.3)	24
4.2.2. Physikalische Anwendung: Gas nicht-wechselwirkender Hadronen (Abbildungen s. Anhang A.4)	26
4.2.3. Extrahieren der Teilchensorten aus Daten (Abbildungen s. Anhang A.5)	28
5. Fazit	31
Danksagung	32
A. Anhang	33
A.1. Plots für den masselosen Fall	33
A.2. Plots für den allgemeinen (massiven) Fall	34
A.3. Plots für das zweikomponentige Gemisch	38
A.4. Plots für das Gas nicht-wechselwirkender Hadronen	42

A.5. Plots für die Datenanalyse 43

1. Einleitung

Aus der „klassischen“, Newtonschen Physik ist bekannt, dass sich zwei Gegenstände, so identisch sie auch auf den ersten Blick scheinen mögen, stets unterscheiden, d. h. insbesondere nummerieren, lassen. In der Quantenphysik ist dies grundlegend anders: hier existiert das Konzept ununterscheidbarer Teilchen. Vertauscht man zwei solcher Teilchen, darf sich an den Eigenschaften des Gesamtsystems, also letztlich am Betragsquadrat der Vielteilchen-Wellenfunktion, keine Änderung ergeben. Dementsprechend unterscheidet man zwei verschiedene Arten solcher identischer Teilchen: Fermionen und Bosonen. Bei Bosonen bleibt die Vielteilchen-Wellenfunktion exakt gleich, wenn man zwei Teilchen vertauscht. Bei Fermionen hingegen ergibt sich hierbei ein zusätzliches globales Minuszeichen. Dadurch kann sich in jedem Einteilchen-Zustand immer nur maximal ein Fermion aufhalten, denn sonst würde die Vielteilchen-Wellenfunktion verschwinden (Pauli-Prinzip). Diese Einschränkung existiert bei Bosonen nicht. Gemäß dem Spin-Statistik-Theorem entsprechen Fermionen den Teilchen mit halbzahligem Spin und Bosonen denen mit ganzzahligem Spin. Daher muss es sich bei den Nukleonen, denjenigen Teilchen, aus denen Atomkerne aufgebaut sind, um Fermionen handeln: sie haben einen Spin von $1/2$. Die vorliegende Arbeit befasst sich aus diesem Grund ausschließlich mit Fermionen. Insgesamt werden all diejenigen Elementarteilchen, aus denen die sichtbare Materie aufgebaut ist, vom Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben: die fermionischen Quarks und Leptonen sowie die bosonischen Austauscheteilchen. Die Nukleonen sind hierbei nicht als elementar, sondern als zusammengesetzt aus jeweils drei Valenzquarks zu verstehen.

Zusätzlich gilt es zu beachten, dass bei Impulsen, die groß gegenüber der Masse eines Teilchens sind, die Gleichungen der nicht-relativistischen Physik ihre Gültigkeit verlieren. Daher sind die Effekte der speziellen Relativitätstheorie zu berücksichtigen. Dies betrifft hier insbesondere die Verwendung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}$, statt der klassischen Relation $E = |\mathbf{k}|^2/2m$.

Diese Arbeit befasst sich damit, unter Berücksichtigung der oben diskutierten Effekte eine Theorie für ein Gas idealer, d. h. wechselwirkungsfreier, Fermionen bei endlicher Temperatur zu entwickeln. Aus diesem Modell sollen die grundlegenden thermodynamischen Eigenschaften des Systems hergeleitet werden. Die dabei auftretenden Integrale werden mithilfe des Computerprogramms `Mathematica` numerisch gelöst und die Ergebnisse davon anhand von Plots erörtert. Anschließend wird diese Diskussion für ein Gemisch solcher idealer Fermi-Gase wiederholt. Angewendet werden soll dieses Modell schließlich auf ein Gas nicht-wechselwirkender Hadronen (genauer: Baryonen), in dem verschiedene Spezies vorhanden sein können.

2. Masselose Teilchen / ultrarelativistischer Limes

2.1. Analytische Berechnungen

2.1.1. Herleitung des großkanonischen Potentials

Zur thermodynamischen Beschreibung eines quantenmechanischen Vielteilchensystems bietet sich die Verwendung des großkanonischen Ensembles an. Denn hier faktorisiert die Zustandssumme für nicht-wechselwirkende Systeme, da über alle Teilchenzahlen summiert wird [1]. Es gilt dann:

$$Z(T, V, \mu) = \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} = \prod_r \left(\sum_{n_r} e^{-\beta n_r (\epsilon_r - \mu)} \right). \quad (2.1)$$

Hierbei stellt r einen vollständigen Satz von Quantenzahlen dar. Da für Fermionen, wie eingangs erwähnt, das Pauli-Prinzip gilt, kann n_r nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Zusätzlich ist noch zu beachten, dass die Möglichkeit spontaner Paarerzeugung besteht. Folglich muss die Existenz von Antiteilchen grundsätzlich berücksichtigt werden. Diese besitzen dieselbe Energie wie die zugehörigen Teilchen, aber das negative chemische Potential: $\mu_{\text{Antiteilchen}} = -\mu_{\text{Teilchen}}$. Damit ergibt sich für den Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme:

$$\ln Z(T, V, \mu) = \sum_r \left[\ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_r + \mu)} \right) \right]. \quad (2.2)$$

Dies stellt den allgemeinen Ausdruck für jedes System nicht-wechselwirkender Fermionen dar.

Im Folgenden wird nun angenommen, dass die Energie ϵ_r eines Einteilchen-Zustandes r nur vom Impuls des Teilchens abhängt, nicht von anderen Quantenzahlen wie z. B. Spin oder Isospin. Für diese lässt sich dann ein Entartungsfaktor g einführen: $\sum_r = g \sum_{\mathbf{k}}$, da $\epsilon_r = \epsilon_{\mathbf{k}}$.

Die betrachteten Fermionen befinden sich in einem Volumen V (z. B. Kubus mit Kantenlängen L_i , $i = 1, 2, 3$), für das im Folgenden periodische Randbedingungen angenommen werden. Folglich können die Komponenten des Impulsvektors nur diskrete Werte annehmen [1]:

$$k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta k = \frac{(2\pi)^3}{V}. \quad (2.3)$$

Hierbei ist Δk das mittlere Volumen eines Zustandes im Impulsraum. Betrachtet man nun den thermodynamischen Limes, d. h. $V \rightarrow \infty$, so werden die Komponenten des Impulsvektors wieder kontinuierlich. Dann lässt sich die Summe über die Impulse durch ein Integral ersetzen [1]: $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow 1/\Delta k \int d^3 k = V/(2\pi)^3 \int d^3 k$.

Damit lautet das großkanonische Potential in natürlichen Einheiten ($\hbar = c = k_B = 1$):

$$\Omega(T, V, \mu) = -T \ln Z(T, V, \mu) = -T \frac{gV}{(2\pi)^3} \int d^3 k \left[\ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \mu)} \right) \right]. \quad (2.4)$$

Nimmt man nun weiter an, dass die Einteilchen-Energien nur vom Betrag des Impulsvektors abhängen, nicht jedoch von seiner Richtung, kann man das Integral in Kugelkoordinaten ausführen und erhält:

$$\Omega(T, V, \mu) = -T \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[\ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_k + \mu)} \right) \right]. \quad (2.5)$$

Unter den getroffenen Annahmen ist dieser Ausdruck immer noch für jedes System nicht-wechselwirkender Fermionen gültig. Das System wird durch seine Energie-Impuls-Relation ϵ_k charakterisiert. Im hier betrachteten Fall gilt, wie eingangs erwähnt, $\epsilon_k = \sqrt{m^2 + k^2} = k$ für $m = 0$. Substituiert man nun im Integral $x = \beta k \Rightarrow dk = 1/\beta dx = T dx$ und führt die Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ ein, so ergibt sich:

$$\Omega(T, V, \mu) = -T^4 \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \left[\ln \left(1 + z e^{-x} \right) + \ln \left(1 + z^{-1} e^{-x} \right) \right]. \quad (2.6)$$

Hier ist es nun möglich, eine mathematisch wohlbekanntere Funktion, den sogenannten Polylogarithmus, zu identifizieren.

2.1.2. Der Polylogarithmus

Der Polylogarithmus lässt sich als Fermi-Dirac-Integral definieren [2]:

$$\text{Li}_p(z) = \frac{z}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x - z} dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{z^{-1} e^x - 1} dx, \quad (2.7)$$

falls $p > 0$ ist und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Durch partielle Integration folgt eine wichtige Formel für die Ableitung dieser Funktion [2]:

$$z \frac{d}{dz} \text{Li}_p(z) = \text{Li}_{p-1}(z). \quad (2.8)$$

Damit lässt sich eine alternative Darstellung des Polylogarithmus herleiten:

$$\text{Li}_p(-z) = -\frac{1}{\Gamma(p-1)} \int_0^\infty x^{p-2} \ln(1 + z e^{-x}) dx. \quad (2.9)$$

Im Folgenden sollen noch zwei Grenzfälle des Polylogarithmus diskutiert werden, die für die physikalische Anwendung besonders relevant sind. Setzt man für das Argument z des Polylogarithmus (bzw. das vollständige Argument ist hier $-z$, siehe Gleichung (2.13)) nun die Fugazität $e^{\beta\mu}$ ein, so ergeben sich zwei interessante Fälle. Im Fall $\beta \rightarrow \infty$ trägt für positive chemische Potentiale nur der Bereich mit $x < \beta\mu$ wesentlich zum Integral bei. Dort ist wegen des exponentiell verschwindenden Terms $e^{x-\beta\mu}$ der Nenner in Gleichung (2.7) nahezu eins [2], sodass in erster Näherung gilt:

$$\text{Li}_p(-e^{\beta\mu}) \approx -\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\beta\mu} x^{p-1} dx = -\frac{(\beta\mu)^p}{\Gamma(p+1)}. \quad (2.10)$$

Führt man für den Nenner eine Reihenentwicklung durch, so erkennt man, dass der nächste Korrekturterm proportional zu $(\beta\mu)^{p-2}$ ist [2]. Im Fall $\beta\mu \rightarrow 0$ hingegen ist das Argument des Polylogarithmus exakt -1 , und es folgt mit Reihenentwicklung:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \text{Li}_p(-e^{\beta\mu}) = \text{Li}_p(-1) = -\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x + 1} dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^p} \quad (2.11)$$

$$= -\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p} + 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^p} = (2^{1-p} - 1)\zeta(p), \quad (2.12)$$

wobei $\zeta(p)$ die Riemannsche Zeta-Funktion ist [2].

2.1.3. Herleitung der thermodynamischen Größen

Setzt man nun die Definition des Polylogarithmus (2.9) in die Gleichung für das großkanonische Potential (2.6) ein, so ergibt sich mithilfe der Gibbs-Duhem-Relation für den Druck [1]:

$$\Omega(T, V, \mu) = -PV = \frac{gVT^4}{\pi^2} (\text{Li}_4(-z) + \text{Li}_4(-z^{-1})). \quad (2.13)$$

Die Teilchenzahl errechnet sich gemäß [1]

$$\begin{aligned} N &= - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = - \frac{gVT^3}{\pi^2} \left(z \frac{\partial}{\partial z} \text{Li}_4(-z) - z^{-1} \frac{\partial}{\partial (z^{-1})} \text{Li}_4(-z^{-1}) \right) \\ &= - \frac{gVT^3}{\pi^2} (\text{Li}_3(-z) - \text{Li}_3(-z^{-1})) = N_{\text{Teilchen}} - N_{\text{Antiteilchen}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Folglich ist N hier die Netto-Teilchenzahl, nicht die Gesamt-Teilchenzahl. Dies ist auch konsistent, da in der speziellen Relativitätstheorie kein Erhaltungssatz für die Teilchenzahl existiert, sondern lediglich für die Netto-Teilchenzahl.

Die Energie ist der Erwartungswert des Hamiltonoperators. Daher folgt aus der Definition der großkanonischen Zustandssumme (2.1) die Gleichung [1]

$$E = \langle \hat{H} \rangle = - \left(\frac{\partial \ln Z(T, V, \mu)}{\partial \beta} \right)_{V,\mu} + \mu N, \quad (2.15)$$

wobei in diesem Fall

$$\left(\frac{\partial \ln Z(T, V, \mu)}{\partial \beta} \right)_{V,\mu} = -3PV + \mu N \quad (2.16)$$

ist, d. h.

$$E = 3PV. \quad (2.17)$$

Damit ist bereits die kalorische Zustandsgleichung für das ultrarelativistische ideale Fermi-Gas gefunden. Die Entropie kann aus der fundamentalen thermodynamischen Relation

$$S = \frac{1}{T} (PV + E - \mu N) = \frac{1}{T} \left(\frac{4}{3} E - \mu N \right) \quad (2.18)$$

berechnet werden, wobei die kalorische Zustandsgleichung (2.17) verwendet wurde.

Die Schallgeschwindigkeit ist für jedes relativistische hydrodynamische System als die Wurzel aus der Ableitung des Drucks nach der totalen Energiedichte definiert, wobei die Entropie pro Teilchen konstant zu halten ist [3]:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)_{S/N}. \quad (2.19)$$

Dies kann man einsehen, indem man eine kleine, ortsabhängige Störung zu den Werten von Druck P und Energiedichte $e = E/v$ eines idealen Fluids im globalen thermodynamischen Gleichgewicht zulässt: $e = e_0 + \delta e(x)$, $P = P_0 + \delta P(x)$ und $u^\mu \approx (1, \mathbf{v})$. Dies wird in die Erhaltungsgleichung für den Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids eingesetzt:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \text{ mit } T^{\mu\nu} = (e + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Berücksichtigt man nur Terme erster Ordnung in $\delta e(x)$, $\delta P(x)$ und \mathbf{v} , so erhält man schließlich:

$$\partial_t^2 \delta e - \nabla^2 \delta P = \partial_t^2 \delta e - \frac{\partial P}{\partial e} \nabla^2 \delta e = 0. \quad (2.21)$$

Denn $\partial P/\partial e$ ist durch die Zustandsgleichung des Systems bestimmt und nimmt folglich auch nach Anwendung der Störung noch global denselben Wert an. (2.21) hat die Form einer Wellengleichung für δe , die sich mit einer quadrierten Geschwindigkeit von $c_s^2 = \partial P/\partial e$ ausbreitet. Weiterhin wird das Fluid als ideal angenommen, d. h. Energiedissipation durch innere Reibung (Zähigkeit) und Wärmeaustausch zwischen den einzelnen Fluidelementen werden vernachlässigt. Das Fehlen des Wärmeaustauschs bedeutet, dass alle Bewegungen adiabatisch ablaufen, und zwar in jedem der Fluidelemente [4]. Folglich muss die Entropie pro Teilchen konstant gehalten werden. Da bei einer Schallwelle Dichteänderungen auftreten, ist dies nicht äquivalent mit der Forderung, die Entropie pro Volumen konstant zu halten.

Bei dem in diesem Kapitel betrachteten ultrarelativistischen idealen Fermi-Gas hängt jedoch der Druck gemäß Gleichung (2.17) nur von e ab, sodass obige Diskussion hier irrelevant ist. Es kann daher eine totale Ableitung verwendet werden:

$$c_s^2 = \frac{dP}{de} = \frac{1}{3}. \quad (2.22)$$

Somit ist c_s^2 hier unabhängig von T und μ .

2.1.4. Grenzfallbetrachtungen

Im *vollständig entarteten* Limes $\beta\mu \rightarrow \pm\infty$, d. h. z. B. $T \rightarrow 0$ und $\mu = \text{const.}$, befindet sich das Vielteilchensystem im niedrigsten möglichen Energiezustand. Wegen des Pauli-Prinzips können sich aber nicht alle Fermionen im Einteilchen-Grundzustand aufhalten. Also verschwinden in diesem Grenzfall nicht alle thermodynamischen Größen. Die entsprechenden Werte können durch Einsetzen der Grenzfallrelation (2.10) für die Polylogarithmen berechnet werden. Ist das chemische Potential positiv, trägt nur der Term für die Teilchen bei, bei dem das Argument des Polylogarithmus $-e^{\beta\mu}$ ist. Der Term für die Antiteilchen besitzt das Argument $-e^{-\beta\mu} \rightarrow 0$, dieser Term verschwindet also. Bei negativem chemischen Potential sind die Verhältnisse entsprechend genau umgekehrt, nur die Antiteilchen tragen bei, nicht die Teilchen. Insgesamt gilt mit $n = N/V$:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P = \frac{g\mu^4}{24\pi^2}, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} N = \frac{gV\mu^3}{6\pi^2} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{1/3} n^{4/3}, \quad (2.23)$$

d. h. hier folgt $P(n)$ einer Polytrope mit Exponent $4/3$. Energie und Entropie ergeben sich nach wie vor aus $E = 3PV$ und $S = 1/T(4PV - \mu N)$. Da die nächste Korrektur zu $\text{Li}_p(-e^{\beta\mu})$ proportional zu $(\beta\mu)^{p-2}$ ist, ist $P/T \propto \beta^{-1} \propto T$; das gleiche gilt für N . Also ist $\lim_{T \rightarrow 0} S = \mathcal{O}(T) \rightarrow 0$, wie nach dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik zu erwarten.

Im *nicht-entarteten* Limes $\beta\mu \rightarrow 0$ (d. h. z. B. $\mu \rightarrow 0$ und $T = \text{const.}$) hingegen müssen sowohl Teilchen als auch Antiteilchen berücksichtigt werden. Unter Verwendung von Gleichung (2.12) ergibt sich mit $\zeta(4) = \pi^4/90$:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} P = \lim_{\mu \rightarrow 0} P_{\text{Teilchen}} + \lim_{\mu \rightarrow 0} P_{\text{Antiteilchen}} = \frac{7\pi^2 g T^4}{360}; \quad (2.24)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} N = \lim_{\mu \rightarrow 0} N_{\text{Teilchen}} - \lim_{\mu \rightarrow 0} N_{\text{Antiteilchen}} = 0. \quad (2.25)$$

Für $\mu \rightarrow 0$ ist also erwartungsgemäß die Zahl der Teilchen genauso groß wie die Zahl der Antiteilchen.

2.2. Numerische Lösung und Plots

2.2.1. Verwendung von Mathematica

Zur numerischen Auswertung der analytisch gefundenen Ausdrücke wird in der vorliegenden Arbeit durchgängig das Programm `Mathematica` verwendet. Bei dem in diesem Kapitel betrachteten ultrarelativistischen Grenzfall ist, wie in Abschnitt 2.1 erläutert, die Lösung der auftretenden Integrale noch bekannt. Ziel ist es also, diese Polylogarithmen numerisch auszuwerten und die Ergebnisse zu plotten. Dabei ist stets darauf zu achten, dass alle aufgetragenen Größen einheitenlos sind. Da, wie bereits erwähnt, in dieser Arbeit ausnahmslos im natürlichen Einheitensystem gerechnet wird, ist die einzige auftretende Basisdimension Energie. Die beiden in diesem Modell vorkommenden Größen mit Dimension Energie sind Temperatur T und chemisches Potential μ . Man kann sich also stets entscheiden, ob man die eingangs berechneten Größen pro Temperatur oder pro chemischem Potential plotten möchte. Zur Umrechnung dient der einheitenlose Faktor $\beta\mu = \mu/T$. Als Entartungsfaktor wird hier und im Weiteren, wo nicht anders erwähnt, stets $g = 2$ gewählt (also z. B. ein Teilchen mit Spin $1/2$ und keinen weiteren Freiheitsgraden).

2.2.2. Diskussion der Plots (Abbildungen s. Anhang A.1)

In Abb. A.1 ist die Netto-Teilchendichte geplottet, links pro Temperatur und gegen das chemische Potential, rechts pro chemischem Potential und gegen die Temperatur. Man erkennt, dass die Teilchendichte mit dem chemischen Potential bzw. der Temperatur stetig und monoton ansteigt. Für positives chemisches Potential ist auch $n > 0$, d. h. $n_{\text{Teilchen}} > n_{\text{Antiteilchen}}$, die Teilchen überwiegen. Für negatives chemisches Potential hingegen überwiegen die Antiteilchen, denn dort ist $n < 0$. Für $\mu = 0$ ist $n = 0$ und somit die Zahl der Teilchen gleich der Zahl der Antiteilchen. Dies ist konsistent mit dem nicht-entarteten Grenzfall (s. Gleichung (2.25)). Aus Abb. A.2 lässt sich Entsprechendes für den Druck ablesen: dieser steigt ebenfalls mit T und $|\mu|$ an. Im Gegensatz zur Teilchendichte ist dieser stets positiv (oder null), da auch Antiteilchen einen positiven Druck ausüben (s. Gleichung (2.13)). Insgesamt betrachtet ist der Druck als Funktion von Temperatur und chemischem Potential genauso wie die Teilchendichte überall glatt. Es existieren keine einzelnen Punkte mit speziellen Strukturen.

Der Druck in Abhängigkeit der Teilchendichte, also die thermische Zustandsgleichung, ist in Abb. A.3 aufgetragen. Wie zu erwarten, steigt der Druck stets mit der Teilchendichte an. Im Limes $n \rightarrow 0$ bleibt der Druck endlich, denn n ist die Netto-, nicht die Gesamt-Teilchendichte. Also sind auch bei $n = 0$ noch Teilchen und Antiteilchen im System vorhanden, die einen endlichen Druck ausüben, außer bei $T = 0$ (vgl. Gleichungen (2.24) und (2.25)).

In Abb. A.4 lässt sich die Entropie pro chemischem Potential als Funktion der Temperatur erkennen. Wie bereits analytisch gezeigt, verschwindet diese für $T \rightarrow 0$ und steigt mit zunehmender Temperatur dann an. Auch diese Kurve ist überall glatt.

3. Allgemeiner Fall: massive Teilchen

Die beabsichtigte Anwendung des Modells freier Fermi-Gase stellt in der vorliegenden Arbeit ein Gas von Hadronen dar. Diese können im Allgemeinen schwer im Vergleich zu ihren Impulsen sein, z. B. innerhalb eines Atomkerns. Daher müssen die bisherigen Betrachtungen auf den allgemeineren Fall massiver Teilchen ausgeweitet werden. Dazu werden die zugrundeliegenden thermodynamischen Größen zunächst wieder analytisch hergeleitet. Anschließend erfolgt die numerische Lösung der auftretenden Integrale.

3.1. Analytische Berechnungen

3.1.1. Herleitung des großkanonischen Potentials

Für den Fall massiver Teilchen ist nun in die grundlegende Formel für das großkanonische Potential eines Systems aus idealen Fermionen (2.5) die vollständige relativistische Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ einzusetzen:

$$\Omega(T, V, \mu) = -\frac{gVT}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[\ln \left(1 + ze^{-\beta m \sqrt{1+(k/m)^2}} \right) + \ln \left(1 + z^{-1} e^{-\beta m \sqrt{1+(k/m)^2}} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Um wieder zu einer dimensionslosen Integrationsvariable zu gelangen und die Wurzel im Exponenten zu eliminieren, bietet sich nun folgende Substitution an [3]: $k/m = \sinh x \Rightarrow dk = m \cosh x dx$. Damit wird die Wurzel im Exponenten $\sqrt{1+(k/m)^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \cosh x$:

$$\Omega(T, V, \mu) = -\frac{gVT}{2\pi^2} m^3 \int_0^\infty dx \sinh^2 x \cosh x \left[\ln \left(1 + ze^{-\beta m \cosh x} \right) + \ln \left(1 + z^{-1} e^{-\beta m \cosh x} \right) \right]. \quad (3.2)$$

3.1.2. Herleitung der grundlegenden thermodynamischen Größen

Der Druck ergibt sich wie in Gleichung (2.13) direkt aus dem vorstehend berechneten großkanonischen Potential. Hier bietet es sich noch an, einmal partiell zu integrieren:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx \sinh^2 x \cosh x \ln \left(1 + e^{\beta(\pm\mu - m \cosh x)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sinh^3 x \ln \left(1 + e^{\beta(\pm\mu - m \cosh x)} \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{3} \beta m \int_0^\infty dx \frac{\sinh^4 x}{e^{\beta(m \cosh x \mp \mu)} + 1} \\ &= \frac{1}{3} \beta m \int_0^\infty dx \frac{\sinh^4 x}{e^{\beta(m \cosh x \mp \mu)} + 1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

da $\sinh(0) = 0$ ist und mithilfe von $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh^3 x \ln \left(1 + e^{\beta(\pm\mu - m \cosh x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh^3 x e^{\beta(\pm\mu - m \cosh x)} = 0 \quad (3.4)$$

3. Allgemeiner Fall: massive Teilchen

folgt. Somit kann der Druck auch geschrieben werden als

$$P = \frac{gm^4}{6\pi^2} \int_0^\infty dx \sinh^4 x \left[\frac{1}{e^{\beta(m \cosh x - \mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(m \cosh x + \mu)} + 1} \right]. \quad (3.5)$$

Die Vorteile dieser Schreibweise gegenüber der in Gleichung (3.2) verwendeten mit den Logarithmen im Integranden werden in Abschnitt 3.1.4 beim Studium des vollständig entarteten Grenzfalls klar.

Die Netto-Teilchenzahl kann analog zu Gleichung (2.14) gemäß

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \frac{gVm^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \sinh^2 x \cosh x \left[\frac{1}{z^{-1}e^{\beta m \cosh x} + 1} - \frac{1}{ze^{\beta m \cosh x} + 1} \right] \quad (3.6)$$

berechnet werden. Unter Verwendung von Gleichung (2.15) ergibt sich die Energie hier zu

$$E = \frac{gVm^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \sinh^2 x \cosh^2 x \left[\frac{1}{z^{-1}e^{\beta m \cosh x} + 1} + \frac{1}{ze^{\beta m \cosh x} + 1} \right]. \quad (3.7)$$

Die einfache kalorische Zustandsgleichung (2.17), die im ultrarelativistischen Grenzfall gefunden wurde, gilt also im Allgemeinen nicht mehr. Trotzdem fällt der Faktor 3 im Vergleich von Gleichung (3.7) für die Energie mit Gleichung (3.5) für den Druck noch auf. Doch der hyperbolische Vorfaktor im Integranden unterscheidet sich deutlich. Zur Herleitung der Entropie kann die gleiche fundamentale thermodynamische Relation wie in Gleichung (2.18) verwendet werden. Dabei sind jetzt obige Ausdrücke für Druck, Energie und Teilchenzahl einzusetzen.

3.1.3. Herleitung der Schallgeschwindigkeit

Bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit muss jetzt, im Gegensatz zum ultrarelativistischen Grenzfall, darauf geachtet werden, dass die Entropie pro Teilchen beim Ableiten konstant zu halten ist. Da die Funktion $P(e)$ nicht in geschlossener Form bekannt ist, wird zunächst einmal die Kettenregel verwendet, um stattdessen jeweils P und e nach dem chemischen Potential abzuleiten:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)_{s/n} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{s/n}}{\left(\frac{\partial e}{\partial \mu} \right)_{s/n}}. \quad (3.8)$$

Hierbei ist $s = S/V$, d. h. $s/n = S/N$ ist die Entropie pro Teilchen.

Die grundlegende Schwierigkeit besteht nun darin, dass die Ableitung bei konstantem s/n durchzuführen ist, P und e aber jeweils nur als Funktion von chemischem Potential und Temperatur bekannt sind. Nimmt man eine funktionale Abhängigkeit zwischen T , μ und s/n an (die mithilfe der besagten fundamentalen thermodynamischen Relation hergestellt werden kann), so lässt sich für das Differential von P schreiben:

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T d\mu + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\mu dT \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T d\mu + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\mu \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)_{s/n} d\mu + \left(\frac{\partial T}{\partial (s/n)} \right)_\mu d \left(\frac{s}{n} \right) \right] \\ &= \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\mu \left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)_{s/n} \right] d\mu + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\mu \left(\frac{\partial T}{\partial (s/n)} \right)_\mu d \left(\frac{s}{n} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{s/n} = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\mu \left(\frac{\partial T}{\partial \mu} \right)_{s/n}. \quad (3.10)$$

Eine analoge Rechnung kann auch für die Energiedichte anstelle des Drucks durchgeführt werden. Denn diese ist genauso als Funktion von T und μ bekannt. Damit ergibt sich für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit:

$$c_s^2 = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\mu \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{s/n}}{\left(\frac{\partial e}{\partial \mu}\right)_T + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\mu \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{s/n}} = \frac{n + s \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{s/n}}{\left(\frac{\partial e}{\partial \mu}\right)_T + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\mu \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{s/n}}. \quad (3.11)$$

Hierbei wurden die partiellen Ableitungen des großkanonischen Potentials $N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = V \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_T$ und $S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{\mu,V} = V \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\mu$ [1] verwendet.

Bis auf die Ableitung $\left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{s/n}$ sind nun alle nötigen Größen bekannt bzw. durch einfaches Ableiten aus den oben hergeleiteten Gleichungen zu bestimmen. Um diese fehlende Größe zu errechnen, betrachtet man wieder s/n als Funktion von T und μ . Damit kann man schreiben:

$$d\left(\frac{s}{n}\right) = \left(\frac{\partial(s/n)}{\partial T}\right)_\mu dT + \left(\frac{\partial(s/n)}{\partial \mu}\right)_T d\mu \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{s/n} = -\frac{\left(\frac{\partial(s/n)}{\partial \mu}\right)_T}{\left(\frac{\partial(s/n)}{\partial T}\right)_\mu}. \quad (3.12)$$

Diese Ableitungen ergeben sich nun wieder direkt aus den bekannten Formeln, denn nur noch T und μ treten als unabhängige Variablen auf. Durch konsequentes Einsetzen der Ableitungen des großkanonischen Potentials nach T und μ sowie der fundamentalen Relation $e + P = Ts + \mu n$ erhält man [5]:

$$c_s^2 = \frac{n^2 \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} - 2sn \frac{\partial^2 P}{\partial T \partial \mu} + s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2}}{(e + P) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T \partial \mu} \right)^2 \right)}. \quad (3.13)$$

Hierbei versteht sich der Druck als Funktion von T und μ , d. h. bei den partiellen Ableitungen nach einer dieser Variablen ist jeweils die andere konstant zu halten.

3.1.4. Grenzfallbetrachtung für $T \rightarrow 0$

Im Anschluss sollen wieder zwei besonders relevante Grenzfälle diskutiert werden, in denen die Integrale analytisch lösbar sind. Zunächst einmal wird der *vollständig entartete* Limes $T \rightarrow 0$ betrachtet. In den Integralen für Druck (3.5), Netto-Teilchenzahl (3.6) und Energie (3.7) treten die folgenden Terme auf:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta(m \cosh x \mp \mu)} + 1} = \begin{cases} 1, & m \cosh x < \pm \mu \\ 0, & m \cosh x > \pm \mu \end{cases} = \Theta(\pm \mu - m \cosh x). \quad (3.14)$$

Hierbei steht das obere Vorzeichen für die Teilchen und das untere Vorzeichen für die Antiteilchen. Analog zur Fermi-Dirac-Verteilung ergibt sich im Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$ eine Heaviside-Stufenfunktion, wenn man $m \cosh x$ mit der Energie identifiziert. Dies wird durch die anfangs im großkanonischen Potential durchgeführte Substitution gerechtfertigt. Es tritt also, wie für ein fermionisches System zu erwarten, die Fermi-Dirac-Verteilung als wesentlicher Bestandteil aller Integranden in den grundlegenden thermodynamischen Größen auf. Anschaulich gesprochen, besetzen die Teilchen im vollständig entarteten Limes „von unten herauf“ die energetisch am niedrigsten liegenden Zustände vollständig bis zum chemischen Potential μ , wobei jeweils auf die Erfüllung des Pauli-Prinzips zu achten ist.

3. Allgemeiner Fall: massive Teilchen

Setzt man dies in die Gleichung für die Teilchenzahl (3.6) ein, so sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Ist $\mu > m$, so trägt nur der Term für die Teilchen bei. Der Term für die Antiteilchen verschwindet hier stets, da $m \cosh x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ gilt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} N(\mu) &= \frac{gVm^3}{2\pi^2} \int_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} dx \sinh^2 x \cosh x = \frac{gVm^3}{6\pi^2} \sinh^3 \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{\mu}{m} \right) \right) \\ &= \frac{gVm^3}{6\pi^2} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1 \right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Für $\mu < -m$ tragen umgekehrt nur die Antiteilchen bei:

$$N(\mu) = -\frac{gVm^3}{2\pi^2} \int_0^{\operatorname{arccosh}(-\mu/m)} dx \sinh^2 x \cosh x = -N(-\mu). \quad (3.16)$$

Hierbei wurde verwendet, dass der hyperbolische Kosinus und folglich auch seine Umkehrfunktion gerade Funktionen sind. Das zusätzliche Minuszeichen vor dem Integral ist nötig, weil Antiteilchen stets negativ zur Netto-Teilchenzahl beitragen. Ist nun im letzten Fall $|\mu| \leq m$, so verschwinden sowohl der Term für die Teilchen als auch der für die Antiteilchen, und damit die Netto-Teilchenzahl ebenfalls.

Für den Druck und die Energie gelten analoge Aussagen, mit dem Unterschied, dass es kein zusätzliches Minuszeichen im Fall $\mu < -m$ gibt, da auch Antiteilchen einen positiven Druck ausüben und positive Energie besitzen. Die entsprechenden Integrale sind wieder analytisch lösbar. Für den Fall $\mu > m$ führt eine mehrfache Anwendung der Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen sowie von $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ auf

$$\begin{aligned} P &= \frac{gm^4}{6\pi^2} \int_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} dx \sinh^4 x = \frac{gm^4}{48\pi^2} \int_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} dx [\cosh(4x) - 4 \cosh(2x) + 3] \\ &= \frac{gm^4}{48\pi^2} \left[3x + \frac{\sinh(4x)}{4} - 2 \sinh(2x) \right]_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} \\ &= \frac{gm^4}{48\pi^2} \left[3x + \sinh x \cosh^3 x + \sinh^3 x \cosh x - 4 \sinh x \cosh x \right]_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} \\ &= \frac{gm^4}{48\pi^2} \left[3 \operatorname{arccosh} \left(\frac{\mu}{m} \right) + \left(\frac{\mu}{m} \right)^3 \sqrt{\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1} + \frac{\mu}{m} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1 \right]^{3/2} - 4 \frac{\mu}{m} \sqrt{\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1} \right]; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{gVm^4}{2\pi^2} \int_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} dx \sinh^2 x \cosh^2 x = \frac{gVm^4}{2\pi^2} \int_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} dx (\sinh^4 x + \sinh^2 x) \\ &= \frac{gVm^4}{16\pi^2} \int_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} dx [\cosh(4x) - 1] = \frac{gVm^4}{16\pi^2} \left[\frac{\sinh(4x)}{4} - x \right]_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} \\ &= \frac{gVm^4}{16\pi^2} \left[\sinh x \cosh^3 x + \sinh^3 x \cosh x - x \right]_0^{\operatorname{arccosh}(\mu/m)} \\ &= \frac{gVm^4}{16\pi^2} \left[-\operatorname{arccosh} \left(\frac{\mu}{m} \right) + \left(\frac{\mu}{m} \right)^3 \sqrt{\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1} + \frac{\mu}{m} \left[\left(\frac{\mu}{m} \right)^2 - 1 \right]^{3/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die übrigen Fälle ergeben sich aus den eingangs besprochenen Relationen.

Weil die Fermi-Dirac-Verteilung um den Punkt $T = 0$ nicht analytisch ist (alle Ableitungen nach T verschwinden im Limes $T \rightarrow 0$), lässt sie sich dort nicht in eine Potenzreihe nach T entwickeln. Folglich ist es nicht ohne weiteres möglich, einen führenden Korrekturterm zu

obigen Gleichungen anzugeben, so wie dies im masselosen Fall getan wurde. Ist jedoch bei endlichen, aber tiefen Temperaturen zusätzlich $|\mu| \ll m$ (und zwar so klein, dass trotz der tiefen Temperaturen $\beta|\mu| \ll 1$ gilt), so lässt sich analytisch zeigen, dass $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$ ist, wie nach dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik zu erwarten. Für Details dazu siehe Abschnitt 3.1.6. Bei der numerischen Lösung der Integrale wird sich aber zeigen, dass dieses Resultat, zumindest im Rahmen der numerischen Genauigkeit, auch für beliebige chemische Potentiale gilt.

Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit bedeutet dies, dass die Entropie (und somit auch die Entropie pro Teilchen) automatisch konstant bleibt, solange zuerst der Limes $T \rightarrow 0$ und anschließend die Ableitung ausgeführt wird. Daher kann hier wieder eine totale Ableitung verwendet werden. Nachdem die Temperatur auf null gesetzt wurde, bleibt noch eine unabhängige Variable übrig, die als das chemische Potential gewählt werden kann. Anwenden der Kettenregel wie in Gleichung (3.8) ergibt dann im Fall $\mu > m$:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)_{s/n} = \frac{dP}{de} = \frac{dP/d\mu}{de/d\mu} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{(\mu/m)^2} \right]. \quad (3.19)$$

Da für $\mu < -m$ $P(\mu) = P(-\mu)$ ist und analog für die Energiedichte, gilt das Ergebnis auch in diesem Fall. Man erkennt, dass im ultrarelativistischen Limes $m \rightarrow 0$ der zweite Term in der Klammer irrelevant wird, und, wie erwartet, c_s^2 gegen $1/3$ strebt. Ist hingegen $|\mu| \leq m$, so sind Druck und Energiedichte exakt null, also verschwindet hier auch die Schallgeschwindigkeit.

Nimmt man zusätzlich an, dass relativistische Effekte unerheblich sind, so lassen sich die Gleichungen (3.15), (3.17) und (3.18) weiter vereinfachen. Dies entspricht dem Fall, dass der (Fermi-)Impuls der Teilchen vernachlässigbar gegenüber ihrer Masse ist: $p_F = \sqrt{\epsilon_F^2 - m^2} = \sqrt{\mu^2 - m^2} \ll m$. Denn die Fermi-Energie ϵ_F ist gerade als das chemische Potential bei $T = 0$ definiert. Die Annahme für das chemische Potential muss also sein, dass $(\mu/m)^2 - 1 \ll 1$ ist, also $\mu \approx m$. Beim speziell-relativistischen chemischen Potential ist nämlich stets die Ruheenergie der Teilchen mitberücksichtigt. Für das „Newtonsche chemische Potential“ bedeutet dies somit, dass $\mu_N = \mu - m \approx 0$ ist. Zur Durchführung der Entwicklung um diesen Punkt wird Folgendes benötigt:

$$(x^2 - 1)^{3/2} = 2^{3/2}(x - 1)^{3/2} + \mathcal{O}\left((x - 1)^{5/2}\right); \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \\ &= \sqrt{2}(x - 1)^{1/2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - 1)^{3/2} + \frac{3}{80\sqrt{2}}(x - 1)^{5/2} + \mathcal{O}\left((x - 1)^{7/2}\right); \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$x(x^2 - 1)^{3/2} = 2^{3/2}(x - 1)^{3/2} + \frac{7}{\sqrt{2}}(x - 1)^{5/2} + \mathcal{O}\left((x - 1)^{7/2}\right); \quad (3.22)$$

$$x\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2}(x - 1)^{1/2} + \frac{5}{2\sqrt{2}}(x - 1)^{3/2} + \frac{7}{16\sqrt{2}}(x - 1)^{5/2} + \mathcal{O}\left((x - 1)^{7/2}\right); \quad (3.23)$$

$$x^3\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2}(x - 1)^{1/2} + \frac{13}{2\sqrt{2}}(x - 1)^{3/2} + \frac{119}{16\sqrt{2}}(x - 1)^{5/2} + \mathcal{O}\left((x - 1)^{7/2}\right). \quad (3.24)$$

Einsetzen in Gleichungen (3.15) und (3.17) ergibt mit $x = \mu/m$:

$$n = \frac{\sqrt{2}gm^3}{3\pi^2} \left(\frac{\mu}{m} - 1 \right)^{3/2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu}{m} - 1\right)^{5/2}\right); \quad (3.25)$$

$$P = \frac{2\sqrt{2}gm^4}{15\pi^2} \left(\frac{\mu}{m} - 1 \right)^{5/2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu}{m} - 1\right)^{7/2}\right). \quad (3.26)$$

3. Allgemeiner Fall: massive Teilchen

Folglich lässt sich hier $P(n)$ wieder als Polytrope angeben:

$$P = \frac{1}{5m} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} n^{5/3}. \quad (3.27)$$

Vergleicht man dies mit dem ultrarelativistischen Resultat (2.23), so fallen eine Reihe von Unterschieden auf. Zunächst einmal hat sich der Exponent der Polytrope geändert. Das ultrarelativistische vollständig entartete Gas hat den Polytropenexponent $4/3$, während das nicht-relativistische den Polytropenexponent $5/3$ hat. Man sagt auch, im nicht-relativistischen Fall ist die Zustandsgleichung *härter* bzw. im ultrarelativistischen Fall *weicher*. Denn bei großem Polytropenexponent Γ mit $P \propto n^\Gamma$ bewirken bereits kleine Änderungen in der Dichte große Änderungen im Druck, während bei kleinem Γ kleine Änderungen der Dichte auch den Druck nur wenig ändern. Der Vorfaktor, die sogenannte Polytropenkonstante, unterscheidet sich ebenfalls. Weitere Details zu polytropen Zustandsgleichungen im Allgemeinen können in Abschnitt 2.4.7 von [3] gefunden werden. Insgesamt kann man jedoch festhalten, dass vollständig entartete ideale Fermi-Gase in zwei Grenzfällen eine polytrope (thermische) Zustandsgleichung aufweisen: im ultrarelativistischen und im nicht-relativistischen Limes.

3.1.5. Die (modifizierten) Besselfunktionen

Im nicht-entarteten Grenzfall können die Integrale, die zur Bestimmung der grundlegenden thermodynamischen Größen zu berechnen sind, durch modifizierte Besselfunktionen genähert werden. Daher werden im Folgenden kurz die dazu nötigen Definitionen aufgelistet, die allesamt aus [6] entnommen sind. Allgemein sind Besselfunktionen diejenigen Funktionen $J_{\pm\nu}(z)$, die die Besselsche Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2)y = 0 \quad (3.28)$$

lösen. Hierbei sind z und ν beliebige komplexe Zahlen. Ist speziell ν eine ganze Zahl, so sind die beiden Lösungen $J_{\pm\nu}(z)$ nicht mehr linear unabhängig. Daher existiert hier eine weitere Art von Lösungen, die sogenannten Besselfunktionen zweiter Gattung $Y_\nu(z)$.

Für die Betrachtungen in dieser Arbeit sind jedoch lediglich die sogenannten modifizierten Besselfunktionen (Besselfunktionen mit rein imaginärem Argument) von Bedeutung, die die Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y = 0 \quad (3.29)$$

lösen. Auch hier existieren wieder zwei Arten von Lösungen, die modifizierten Besselfunktionen erster Gattung $I_\nu(z)$ und die zweiter Gattung $K_\nu(z)$. Diese sind definiert durch

$$I_\nu(z) = \begin{cases} e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ze^{\pi i/2}), & -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}; \\ e^{3\nu\pi i/2} J_\nu(ze^{-3\pi i/2}), & \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi; \end{cases} \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (3.30)$$

Falls $|\arg z| < \pi/2$ ist, lässt sich die modifizierte Besselfunktion zweiter Gattung in integraler Form darstellen als

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt. \quad (3.31)$$

Für $z \rightarrow \infty$ geht sie im Fall $|\arg z| < 3\pi/2$ exponentiell gegen null:

$$K_\nu(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (3.32)$$

Außerdem lassen sich eine ganze Reihe von Rekursionsformeln für Besselfunktionen zeigen, von denen jedoch nur die für diese Arbeit relevanten angegeben werden sollen:

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z}K_{\nu}(z); \quad (3.33)$$

$$zK'_{\nu}(z) - \nu K_{\nu}(z) = -zK_{\nu+1}(z). \quad (3.34)$$

3.1.6. Grenzfallbetrachtung für das nicht-entartete Gas

Die Anwendung der modifizierten Besselfunktionen zweiter Gattung kann in diesem Modell für den *nicht-entarteten* Grenzfall erfolgen. Dann lässt sich für $\beta|\mu| \ll 1$ die Fermi-Dirac-Verteilung durch eine Maxwell-Jüttner-Verteilung nähern [3]:

$$\frac{1}{e^{(m \cosh x \mp \mu)/T} + 1} \approx e^{-(m \cosh x \mp \mu)/T}. \quad (3.35)$$

Dies ist nicht nur, wie in Abschnitt 3.1.4 erwähnt, für geringe Temperaturen möglich, sondern für alle endlichen Temperaturen, wenn entsprechende Bedingungen an das chemische Potential gestellt werden. In der Tat ist für größere Temperaturen diese Bedingung sogar leichter, d. h. für einen weiteren Bereich von chemischen Potentialen, erfüllt. Allein für unendlich hohe Temperaturen $T \rightarrow \infty$ ist die Entwicklung nicht mehr anwendbar, da dann die Exponentialfunktion im Nenner unabhängig von μ gegen eins läuft, anstatt groß gegenüber eins zu werden. Der Übergang zur Maxwell-Jüttner-Verteilung entspricht gerade dem Fall, in dem Quanteneffekte vernachlässigt werden können. Nimmt man nun zusätzlich noch an, dass auch relativistische Effekte unerheblich sind, gelangt man zu *klassischen* Gasen, d. h. solchen, denen man im Alltag ausgesetzt ist und die sich mit klassischer statistischer Physik akkurat beschreiben lassen.

Doch hier soll das nicht-entartete Gas zunächst allgemein, d. h. relativistisch, beschrieben werden. Dann ergibt das Einsetzen der Näherung (3.35) in die Gleichung für die Teilchenzahl (3.6) unter Verwendung der Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen, der Definition der modifizierten Besselfunktionen zweiter Gattung (3.31) und der Rekursionsrelation (3.33):

$$\begin{aligned} N &\approx \frac{gVm^3}{2\pi^2}(z - z^{-1}) \int_0^{\infty} dx \sinh^2 x \cosh x e^{-(m \cosh x)/T} \\ &= \frac{gVm^3}{8\pi^2}(z - z^{-1}) \left(K_3\left(\frac{m}{T}\right) - K_1\left(\frac{m}{T}\right) \right) = \frac{gVm^2T}{2\pi^2}(z - z^{-1})K_2\left(\frac{m}{T}\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Analog folgt für Druck und Energie:

$$P \approx \frac{gm^2T^2}{2\pi^2}(z + z^{-1})K_2\left(\frac{m}{T}\right); \quad E \approx \frac{gVm^4}{16\pi^2}(z + z^{-1}) \left(K_4\left(\frac{m}{T}\right) - K_0\left(\frac{m}{T}\right) \right). \quad (3.37)$$

Die Entropie kann mithilfe von Gleichung (3.34) berechnet werden:

$$\begin{aligned} S &= V \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\mu} \approx \frac{gm^2}{2\pi^2} \left[(z + z^{-1}) \left(2TK_2\left(\frac{m}{T}\right) - mK'_2\left(\frac{m}{T}\right) \right) - \mu(z - z^{-1})K_2\left(\frac{m}{T}\right) \right] \\ &= \frac{gm^3}{2\pi^2} \left[(z + z^{-1})K_3\left(\frac{m}{T}\right) - \frac{\mu}{m}(z - z^{-1})K_2\left(\frac{m}{T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aufgrund der Eigenschaft (3.32) der modifizierten Besselfunktionen zweiter Gattung verschwindet die Entropie für $T \rightarrow 0$, wie nach dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik zu erwarten.

3. Allgemeiner Fall: massive Teilchen

Sind nun zusätzlich die Effekte von Antiteilchen zu vernachlässigen (was aber für den hier betrachteten Fall $\beta|\mu| \ll 1$ nicht für sehr niedrige Temperaturen möglich ist), ergibt sich eine lineare thermische Zustandsgleichung: $P = n \cdot T$. Dies entspricht gerade der aus der „klassischen“ Physik bekannten Zustandsgleichung idealer Gase. Weitere Betrachtungen für diesen Spezialfall und den bereits erwähnten nicht-relativistischen Limes, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr eingegangen wird, finden sich in den Abschnitten 2.4.2 und 2.4.3 von [3].

3.2. Numerische Lösung und Plots

3.2.1. Numerische Integration mit Mathematica

Um die in Abschnitt 3.1 berechneten Eigenschaften numerisch auszuwerten, muss man zuerst wieder zu einheitenlosen Größen übergehen. Im Vergleich zum ultrarelativistischen Limes kommt im allgemeinen Fall nun eine weitere Größe mit Dimension Energie hinzu: die Masse der Teilchen m . Da vornehmlich das Verhalten des Systems in Abhängigkeit von Temperatur und chemischem Potential diskutiert werden soll, wird die Teilchenmasse im Folgenden als Referenz für alle Größen verwendet. Zur Vereinfachung der Notation werden bei der Eingabe der Gleichungen in den Computer die folgenden Abkürzungen genutzt: $w = \mu/m$ und $\alpha = m/T$. Beide sind einheitenlos. Weitere einheitenlose Größen sind dann z. B. n/m^3 , P/m^4 , e/m^4 , Ts/m^4 oder c_s^2 .

Außer in den beiden oben diskutierten Grenzfällen sind die hier auftretenden Integrale nicht mehr analytisch lösbar bzw. als wohlbekannt mathematische Funktionen auszudrücken. Daher muss die Lösung der Integrale im Allgemeinen numerisch erfolgen. **Mathematica** bietet hierzu die vorgefertigte Funktion `NIntegrate` an, die diesen Prozess weitgehend automatisiert. So wird z. B. der optimale Integrationsalgorithmus standardmäßig aus einer Reihe von eingebauten Algorithmen automatisch ausgewählt. In der Regel werden dabei sogenannte adaptive Strategien verwendet. Diese unterteilen das Integrationsintervall rekursiv in einzelne Abschnitte, um Bereiche mit starker Veränderung des Integranden gründlicher zu behandeln. Die maximale Anzahl der rekursiven Schritte ist in der Regel auf 10 voreingestellt. Für die meisten der in der vorliegenden Arbeit auftretenden Integrale muss dieser Parameter jedoch auf 30 erhöht werden. So ist es möglich, für einen weiteren Bereich von Temperaturen und chemischen Potentialen eine hinreichende Genauigkeit des numerischen Ergebnisses zu gewährleisten und größere Fluktuationen zu vermeiden. Das Problem liegt hier mit großer Wahrscheinlichkeit darin begründet, dass das Integrationsintervall nicht endlich ist. Daher muss es z. B. mittels der Substitution $t = 1/x$ zunächst auf ein endliches Intervall abgebildet werden. Für zu große Werte von w und/oder α kann es vorkommen, dass der resultierende Integrand stark oszilliert. In diesem Fall sind entsprechend mehr rekursiv-adaptive Intervall-Unterteilungen nötig, um das Integral hinlänglich präzise berechnen zu können.

Auch wenn **Mathematica** den Integranden zunächst symbolisch analysiert, kann man durch geeignete manuelle Umformung wesentlich dazu beitragen, die Qualität des numerischen Ergebnisses zu verbessern und die Rechenzeit zu optimieren. Für den Druck und die Energie bietet sich hier folgende Substitution an [7]:

$$\alpha \cosh x = \sqrt{y^2 + \alpha^2} \Rightarrow x = \operatorname{arccosh} \sqrt{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + 1} \Rightarrow \sinh x = \frac{y}{\alpha} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \alpha^2}}. \quad (3.39)$$

Einsetzen in Gleichung (3.5) für den Druck bzw. Gleichung (3.7) für die Energie ergibt:

$$P = \frac{gm^4}{6\pi^2\alpha^4} \int_0^\infty dy \frac{y^4(y^2 + \alpha^2)^{-1/2}}{e^{\sqrt{y^2 + \alpha^2} - \alpha w} + 1}; \quad E = \frac{gVm^4}{2\pi^2\alpha^4} \int_0^\infty dy \frac{y^2\sqrt{y^2 + \alpha^2}}{e^{\sqrt{y^2 + \alpha^2} - \alpha w} + 1}. \quad (3.40)$$

Theoretisch wäre diese Substitution auch auf die Teilchenzahl anwendbar. Hier hat sich jedoch bei der Auswertung der Integrale gezeigt, dass es dabei keine wesentlichen Verbesserungen in der Qualität des Ergebnisses oder der Rechenzeit gegenüber der Verwendung von Gleichung (3.6) gibt. Die Entropie lässt sich mithilfe der bereits mehrfach zitierten fundamentalen thermodynamischen Relation $S = 1/T(PV + E - \mu N)$ berechnen, sodass hierfür kein neues Integral formuliert werden muss.

3.2.2. Diskussion der Plots (Abbildungen s. Anhang A.2)

In Abb. A.5 ist die Teilchendichte gegen das chemische Potential für verschiedene Werte von m/T geplottet. Grob betrachtet, zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie im masselosen Fall. Im Limes $T \rightarrow 0$ gibt es jedoch einen wesentlichen Unterschied. Wie in Abschnitt 3.1.4 diskutiert, ist hier im Bereich $|\mu|/m \leq 1$ die Teilchendichte exakt null. Dabei handelt es sich um die sogenannte *silver blaze*-Eigenschaft [8]. Erst bei größeren Werten von $|\mu|/m$ nimmt die Dichte endliche Werte an. Im vollständig entarteten Fall gibt es also bei $\mu = \pm m$ einen Übergang, die Teilchenentstehung fängt an. Allerdings lässt sich die genaue Lage des Punktes nur sehr schwer mit bloßen Augen anhand des Plots erkennen. Eine genaue Aussage war hier nur möglich, da der Punkt bereits in analytischen Rechnungen zuvor identifiziert worden war. Anhand von gemessenen Daten ließe sich aus dieser Darstellung z. B. nicht die genaue Masse der Teilchen anhand des Übergangspunktes herausfinden, weil die Steigung so langsam zunimmt. Nur die ungefähre Stelle, an der die Dichte endlich wird, ließe sich numerisch aus den Daten ablesen. Ferner handelt es sich hierbei um keinen Phasenübergang im strengen Sinne. Phasenübergänge treten nur im thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$ auf, der hier betrachtete Übergang existiert aber auch für endliche Volumina. Es handelt sich um die sogenannte *onset transition*, wie sie beispielsweise in [8] behandelt wird. Daher wird der Begriff „Phasenübergang“ in der vorliegenden Arbeit vermieden. Stattdessen ist stets von „Übergang“ die Rede. Für endliche Temperaturen ist dieser Übergang fließend. Hier ist die Teilchendichte eine glatte Funktion des chemischen Potentials und daher für alle $\mu \neq 0$ endlich.

Betrachtet man nun die Ableitung der Teilchendichte nach dem chemischen Potential (s. Abb. A.6), sind diese Aspekte deutlicher zu erkennen. Während für endliche Temperaturen die Ableitung der Teilchendichte stets endlich bleibt, verschwindet sie für $T \rightarrow 0$ im Bereich $|\mu|/m \leq 1$. Aber auch diese erste Ableitung ist am Übergangspunkt noch stetig. Die Unstetigkeiten treten erst in höheren Ableitungen der Teilchendichte nach dem chemischen Potential auf. In Abb. A.7 ist beispielsweise die zweite Ableitung gezeigt. Hier gibt es für $T \rightarrow 0$ eine Divergenz, verbunden mit einem Sprung, am Übergangspunkt. Diese Diskontinuität existiert, wie vorstehend erläutert, auch bei Systemen mit endlichen Volumina. Dies ist der Beleg dafür, dass es sich hierbei um keinen Phasenübergang handelt. Für endliche Temperaturen bleibt die zweite Ableitung (und auch alle weiteren) überall stetig.

Für Energiedichte und Druck als Funktion des chemischen Potentials (s. Abb. A.8 und A.9) gelten analoge Aussagen. Auch diese beiden Größen verschwinden, wie in Abschnitt 3.1.4 analytisch gezeigt, für $T \rightarrow 0$ im Bereich $|\mu|/m \leq 1$. Die genaue Lage der Übergänge ist hier ebenfalls nur sehr schwer zu erkennen. Für endliche Temperaturen gibt es wieder keinen scharfen Übergang. Im Gegensatz zur Netto-Teilchendichte sind Energiedichte und Druck aber auch

3. Allgemeiner Fall: massive Teilchen

für $\mu = 0$ strikt positiv. Denn es existieren sehr wohl thermische Anregungen im System. Jedoch herrscht ein Gleichgewicht an Teilchen und Antiteilchen, sodass n verschwindet, P und e hingegen nicht.

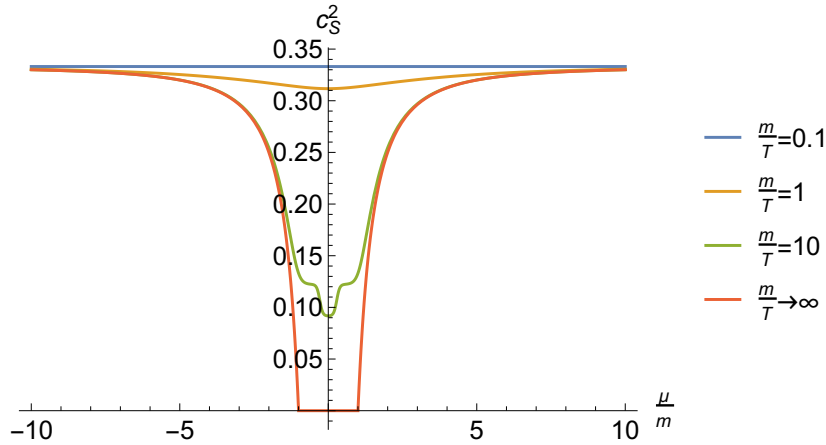
Der Druck als Funktion der Teilchendichte, also die thermische Zustandsgleichung, ist in Abb. A.10 aufgetragen. Auch hier zeigt sich besonders für hohe Temperaturen ein ähnliches Verhalten wie im masselosen Fall. Dabei nimmt $P(n=0)$ wieder einen endlichen Wert an, weil zwar die Netto-Teilchenzahl verschwindet, jedoch nicht die Zahl der Teilchen und Antiteilchen jeweils für sich genommen. Im hier gezeigten Beispiel $m/T = 5$ ist $P(n=0)$ zwar sehr klein, aber immer noch positiv. Für $T \rightarrow 0$ ist dies nicht der Fall. Wie in Abschnitt 3.1.4 gezeigt, existiert hier ein Bereich, in dem weder Teilchen noch Antiteilchen im System vorhanden sind. Daher ist hier $P(n=0) = 0$.

Im nicht-relativistischen vollständig entarteten Grenzfall (d. h. $T \rightarrow 0$ und $\mu \approx m$) sollte diese Kurve gemäß Gleichung (3.27) einer Polytrope mit Exponent $5/3$ folgen. Um dies zu sehen, trägt man am besten P gegen $n^{5/3}$ auf. Dort sollte sich ein linearer Zusammenhang feststellen lassen. In der Tat beobachtet man in Abb. A.11, dass das „exakte“ Ergebnis für den Druck bei sehr kleinen Werten von $n^{5/3}$ gut mit dieser Polytrope übereinstimmt.

Im nicht-entarteten Grenzfall hingegen sollte sich ein linearer Zusammenhang zwischen Druck und Teilchendichte einstellen, falls der Einfluss der Antiteilchen vernachlässigbar ist. In Abb. A.12 ist die Zustandsgleichung für $m/T = 10$ und $\mu/m \in [0,001; 1,3]$ gezeigt, sodass für die kleinsten Werte von μ/m (und damit n) der nicht-entartete Fall, d. h. $\beta\mu \ll 1$, eintritt. Man erkennt, dass in diesem Bereich das „exakte“ Ergebnis für den Druck tatsächlich in etwa mit der Kurve $P = n \cdot T$, d. h. $P/m^4 = n/m^3 \cdot T/m$, übereinstimmt. Somit konnten sämtliche analytisch hergeleiteten Grenzfälle für $P(n)$ durch numerische Lösung der vollen Integrale reproduziert werden.

In Abb. A.13 ist die Entropiedichte multipliziert mit dem chemischen Potential als Funktion der Temperatur im nicht-entarteten Grenzfall gezeigt. Für das chemische Potential wurde hier der Wert $\mu/m = 0,5$ gewählt. Tatsächlich stimmt diese Näherung im betrachteten Bereich relativ gut mit dem durch numerische Integration gewonnenen „exakten“ Ergebnis überein. Insbesondere kann das analytisch hergeleitete Resultat, dass im nicht-entarteten Grenzfall $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$ gilt, bestätigt werden. Dies sollte nach dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik allerdings auch allgemein der Fall sein. Betrachtet man beispielsweise $\mu/m = 10$, wie in Abb. A.14, stellt man auch hier eindeutig fest, dass für $T \rightarrow 0$ die Entropie verschwindet. Für sehr kleine Temperaturen, $T/m \ll 0,1$, lassen sich die entsprechenden Integrale leider nicht mehr zuverlässig numerisch lösen. Denn dort sind sowohl w als auch α (vgl. Gleichung (3.40)) groß, und der Integrand oszilliert so stark, dass das Ergebnis zu große numerische Artefakte enthält. Trotzdem lässt sich der erwartete Trend hier noch gut erkennen.

Wie bereits diskutiert, ist selbst im Fall $T \rightarrow 0$ der Übergangspunkt der Teilchen nur schwer aus der Teilchendichte ablesbar. In der Schallgeschwindigkeit (s. Abb. 3.1) hingegen fallen zahlreiche Strukturen auf. Zunächst einmal lässt sich feststellen, dass für den ultrarelativistischen Limes $m \rightarrow 0$ die quadrierte Schallgeschwindigkeit, wie erwartet, gegen $1/3$ konvergiert. Zum einen ist dies für $\mu/m \rightarrow \pm\infty$ bei allen eingezeichneten Kurven, d. h. allen Temperaturen, der Fall. Zum anderen tritt dieses Verhalten bei kleinen Werten von m/T für alle chemischen Potentiale ein. Speziell für $T \rightarrow 0$ ist die Schallgeschwindigkeit, wie in Abschnitt 3.1.4 erläutert, im Bereich $|\mu/m| \leq 1$ exakt null. Am Übergangspunkt $\mu = \pm m$ ist dann ein scharfer Knick zu erkennen. Die Teilchen fangen an auszufallen, und damit erhält das System abrupt eine endliche Schallgeschwindigkeit. Diese Struktur lässt sich sogar bei endlichen, aber niedrigen Temperaturen (z. B. $m/T = 10$) noch gut erkennen. Da hier der Übergang jedoch sanft verläuft,

Abbildung 3.1.: Schallgeschwindigkeit für $m \neq 0$

wird die Struktur mit zunehmenden Temperaturen mehr und mehr ausgewaschen. Wird die Temperatur schließlich vergleichbar mit der Masse der Teilchen, verschwindet die Struktur des ehemaligen Übergangs vollständig. Bei hinreichend tiefen Temperaturen gibt es jedoch zusätzlich zu dem abgeflachten „Teilchenentstehungsknick“ noch eine weitere Auffälligkeit: Bei sehr kleinen chemischen Potentialen $|\mu|/m \ll 1$ existiert eine „Mulde“ in c_s^2 , während die Kurve bei $T = 0$ dort flach bleibt. Diese Struktur rührt von der Existenz der Antiteilchen her, die sich erst bei solch kleinen chemischen Potentialen bemerkbar machen. Ruft man sich in Erinnerung, dass gemäß Gleichung (2.19) die quadrierte Schallgeschwindigkeit den Anstieg des Drucks bei Erhöhung der Energiedichte quantifiziert, so lässt dies folgende Interpretation zu: Für $\mu \lesssim m$ befinden sich alleinig thermische Anregungen im System (fast ausschließlich Teilchen, da die Antiteilchen exponentiell $\propto e^{-\beta\mu}$ unterdrückt sind). Bei einer Erhöhung der Energiedichte kommen mehr Teilchen ins System, die aufgrund des Pauli-Prinzips nicht alle den Grundzustand besetzen können. In der Folge steigt der Druck an, $c_s^2 > 0$. Senkt man nun das chemische Potential weiter, können immer mehr Niveaus der Antiteilchen genutzt werden, um die zusätzliche Energiedichte unterzubringen. Effektiv können also mehr Teilchen Zustände mit niedrigen Impulsen besetzen. Der Anstieg des Drucks mit der Energiedichte nimmt ab, bleibt aber stets positiv. Im Fall $T = 0$ sind die Antiteilchen für nicht-negative chemische Potentiale vollständig unterdrückt. Daher macht sich der Effekt hier nicht bemerkbar. Entfernt man alle Terme für Antiteilchen aus den Gleichungen und plottet erneut die quadrierte Schallgeschwindigkeit als Funktion des chemischen Potentials, so verschwindet die Struktur tatsächlich (s. Abb. A.15). Allerdings zeigen auch die Antiteilchen für sich genommen (ohne Teilchen) keine derartige Struktur. Die numerische Genauigkeit der Ergebnisse wurde mithilfe der *arbitrary-precision*-Arithmetik von *Mathematica* überprüft. Stellt man die `WorkingPrecision` der numerischen Integration auf 100 ein, so hat das Ergebnis für die Schallgeschwindigkeit immer noch eine sehr hohe Präzision von ca. 96. Dies stützt ebenfalls die Theorie, dass diese zusätzliche Struktur eine Auswirkung der Antiteilchen ist, und kein numerisches Artefakt.

Insgesamt kann man also sagen, dass die Schallgeschwindigkeit eine wesentlich bessere Observable als die Teilchendichte ist, um den Übergangspunkt zu identifizieren und weitere Strukturen auszumachen.

4. Gemische idealer relativistischer Fermi-Gase

In diesem Kapitel soll nun die Anwendung der in den Kapiteln 2 und 3 entwickelten Theorie auf ein physikalisches Gas nicht-wechselwirkender Hadronen beleuchtet werden. Da jedoch in einem solchen Gas unter den entsprechenden Bedingungen (Temperatur, chemisches Potential) verschiedene Spezies von Hadronen erzeugt werden können, müssen für eine akkurate Beschreibung Gemische betrachtet werden. Im Folgenden wird zunächst wieder das analytische Gerüst zur Behandlung von Gemischen idealer relativistischer Fermi-Gase aufgebaut. Anschließend wird ein einfaches Beispiel, ein zweikomponentiges Gemisch, diskutiert, um schließlich auf das Hadronengas zu kommen.

4.1. Analytische Berechnungen

Die grundlegende Annahme ist, wie stets in der vorliegenden Arbeit, dass die Teilchen der verschiedenen Komponenten nicht miteinander wechselwirken. Folglich lässt sich der Hamiltonoperator des Systems als Summe über die Hamiltonoperatoren der einzelnen Komponenten j schreiben: $\hat{H} = \sum_j \hat{H}_j$. Wie in Gleichung (2.1) faktorisiert die großkanonische Zustandssumme daher:

$$Z(T, V, \mu) = \prod_j Z_j(T, V, \mu), \quad (4.1)$$

ihr Logarithmus ist also additiv.

Hierbei wurde ausgenutzt, dass das gesamte System sich im globalen thermischen Gleichgewicht befindet. Damit nimmt die Temperatur nicht nur an allen Punkten im Raum, sondern auch für alle Komponenten denselben Wert an. Weiterhin wurde vorausgesetzt, dass alle Komponenten dasselbe chemische Potential teilen, das mit einer gemeinsamen Erhaltungsgröße verknüpft ist. Beim Hadronengas ist dies beispielsweise die Baryonenzahl, da ausschließlich Baryonen betrachtet werden (Mesonen sind Bosonen und daher nicht mit dieser Theorie zu beschreiben). Im Folgenden wird zusätzlich angenommen, dass alle Komponenten dieselbe Ladung bezüglich dieser Erhaltungsgröße aufweisen. Für das Hadronengas ist dies der Fall, da alle Teilchen Baryonenzahl 1 besitzen (ausgenommen ihre Antiteilchen, die aber bereits durch entsprechende Terme im Modell berücksichtigt sind). Ansonsten ergibt sich ein zusätzlicher Parameter, der vom Komponenten-Index j abhängt und diese Ladung quantifiziert, multiplikativ zu μ (vgl. hierzu die Diskussion zu Bosonen am Ende von Abschnitt 4.2.3).

Mit den obigen Überlegungen gilt für den Logarithmus der Zustandssumme:

$$\ln Z(T, V, \mu) = \sum_j \ln Z_j(T, V, \mu) = \sum_j \sum_r \left[\ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_{jr} - \mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_{jr} + \mu)} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Hierbei ist die Einteilchen-Energie wieder durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon_{jr} = \sqrt{m_j^2 + k^2} = \epsilon_{jk}$ gegeben, die jetzt aber auch vom Komponenten-Index j abhängt. Denn die Massen der verschiedenen Teilchenspezies unterscheiden sich im Allgemeinen.

Der Druck ergibt sich wie in Gleichung (2.13) direkt aus dem großkanonischen Potential, das wiederum linear mit $\ln Z$ zusammenhängt, und ist daher ebenfalls additiv: $P = \sum_j P_j$. Teilchenzahl, Energie und Entropie lassen sich als erste Ableitungen des großkanonischen Potentials formulieren und sind aufgrund der Linearität der ersten Ableitung somit auch additiv. Dies ist konsistent mit der Beobachtung, dass der Teilchenzahloperator für alle Systeme definitionsgemäß additiv ist: $\hat{N} = \sum_j \hat{N}_j$ [1]. Daher muss sein Erwartungswert $N = \langle \hat{N} \rangle$ diese Bedingung genauso erfüllen.

Bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit kann dieselbe Argumentation wie in Abschnitt 3.1.3 verwendet werden. Gleichung (3.11) gilt hier also ebenfalls, wobei die entsprechenden Ausdrücke für die Gesamt-Teilchendichte $n = \sum_j n_j$, Gesamt-Energiedichte $e = \sum_j e_j$ und Gesamt-Entropiedichte $s = \sum_j s_j$ einzusetzen sind. Es ist also

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \mu}\right)_T = \sum_j \left(\frac{\partial e_j}{\partial \mu}\right)_T \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\mu = \sum_j \left(\frac{\partial e_j}{\partial T}\right)_\mu \quad \text{sowie} \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{s/n} = - \frac{\left(\frac{\partial(\sum_j s_j / \sum_i n_i)}{\partial \mu}\right)_T}{\left(\frac{\partial(\sum_j s_j / \sum_i n_i)}{\partial T}\right)_\mu}. \quad (4.4)$$

Die Formel für c_s^2 hat also eine deutlich nicht-lineare Form und ist daher nicht additiv. Dies war auch nicht zu erwarten, da die Schallgeschwindigkeit in einem Gemisch von den Gesamteigenschaften des Mediums abhängen sollte. Schon alleine wegen der Forderung $c_s \leq 1$ ($= c$) kann weder die Schallgeschwindigkeit noch ihr Quadrat rein additiv sein.

Auch im Grenzfall $T \rightarrow 0$ lassen sich einfach die in Abschnitt 3.1.4 gefundenen Ausdrücke für die einzelnen Komponenten addieren. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Bedingung für das Verschwinden der thermodynamischen Größen sich aufgrund der verschiedenen Massen von Komponente zu Komponente unterscheidet. Entsprechend tragen nur Spezies bei, für die $|\mu| > m_j$ gilt. Nur wenn dies für keine der Komponenten erfüllt ist, verschwinden die Gesamt-Größen.

Bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit im Limes $T \rightarrow 0$ gilt es zu berücksichtigen, dass sich im Gegensatz zu Gleichung (3.19) der Entartungsfaktor nicht kürzt, da dieser für jede Teilchensorte einen anderen Wert annehmen kann. Entsprechend lässt sich die Formel nun ein Stück weniger weit vereinfachen:

$$c_s^2 = \frac{dP/d\mu}{de/d\mu} = \frac{\sum_j dP_j/d\mu}{\sum_i de_i/d\mu} = \frac{1}{3} \frac{\sum_j g_j m_j^4 \frac{m_j}{\mu} ((\mu/m_j)^2 - 1)^2}{\sum_i g_i m_i^4 \frac{\mu}{m_i} ((\mu/m_i)^2 - 1)}. \quad (4.5)$$

Zu beachten ist, dass diese Formel nur gilt, wenn für mindestens eine der Komponenten $|\mu| > m_j$ erfüllt ist. Ansonsten sind, wie oben diskutiert, $P = e = 0$ und damit verschwindet auch die Schallgeschwindigkeit.

4.2. Numerische Lösung, Plots und Datenanalyse

Um die in Abschnitt 4.1 berechneten Eigenschaften numerisch auszuwerten, muss man zuerst wieder zu einheitenlosen Größen übergehen. Im Vergleich zum reinen Gas gibt es jetzt mehrere Teilchenmassen m_j und Entartungsfaktoren g_j . Aus Gründen der Einheitlichkeit wird im Folgenden stets die Masse der ersten Teilchenspezies (die willkürlich wählbar ist) als Referenz

für alle Größen verwendet: $w = \mu/m_1$, $\alpha = m_1/T$ etc. Für die anderen Teilchenmassen wird jeweils das Verhältnis zur Masse der ersten Spezies m_j/m_1 betrachtet.

4.2.1. Beispiel: zweikomponentiges Gemisch (Abbildungen s. Anhang A.3)

Um zu sehen, welche neuen Strukturen sich bei Gemischen gegenüber reinen Gasen ergeben, wird nun zunächst ein zweikomponentiges Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$ und $g_1 = g_2 = 2$ als Beispiel besprochen.

In Abb. A.16 ist die Gesamt-Netto-Teilchendichte als Funktion des chemischen Potentials für verschiedene Werte von m_1/T gezeigt. Die beim reinen Gas diskutierten Eigenschaften sind dort ebenso zu erkennen, weil die Teilchendichte additiv ist. Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ kommt nun allerdings ein weiterer Knick am Entstehungspunkt der zweiten Teilchensorte bei $\mu = \pm m_2$, d. h. $\mu/m_1 = \pm m_2/m_1 = \pm 2$ hinzu. Genau wie beim reinen Gas ist der präzise Punkt, an dem die Teilchenerzeugung einsetzt, aus dieser Darstellung aber nur sehr schwer auszumachen. Insgesamt gibt es also (im Bereich $\mu \geq 0$) drei Abschnitte: Für $\mu/m_1 \leq 1$ ist $n = 0$, weder Teilchen der ersten noch der zweiten Sorte sind vorhanden. Für $1 < \mu/m_1 \leq 2$ besteht das System nur aus Teilchen der ersten Sorte. Für $\mu/m_1 > 2$ tragen letztlich beide Spezies zum Gemisch bei. Bei endlichen Temperaturen verlaufen beide Übergänge wieder fließend.

Diese Strukturen sind in der Ableitung der Teilchendichte nach dem chemischen Potential (s. Abb. A.17) wesentlich besser zu erkennen. Hier sind nun die drei angesprochenen Abschnitte im chemischen Potential deutlich voneinander zu unterscheiden. Aber an beiden Übergängen bleibt die erste Ableitung der Teilchendichte selbst im Limes $T \rightarrow 0$ stetig. Wie beim reinen Gas treten Unstetigkeiten erst ab der zweiten Ableitung auf.

Für Energiedichte und Druck als Funktion des chemischen Potentials (s. Abb. A.18 und A.19) gelten wieder analoge Aussagen. Hier existieren nun ebenfalls jeweils zwei Übergangspunkte für $T \rightarrow 0$, die zu den jeweiligen Spezies gehören. Doch auch aus diesen Diagrammen lassen sich deren genaue Positionen nur sehr schwer ablesen.

Der Druck als Funktion der Teilchendichte, also die thermische Zustandsgleichung, ist für den vollständig entarteten Grenzfall $T \rightarrow 0$ in Abb. A.20 aufgetragen. Hier gibt es, zusätzlich zu dem abrupten Anstieg bei $n = 0$, der von der Entstehung der ersten Spezies herrührt, nun ebenfalls einen zweiten Knick bei $\mu = m_2$, was $n/m_1^3 = \sqrt{3}/\pi^2 \approx 0,175$ entspricht. Dieser ist zwar etwas besser zu erkennen, als wenn man Druck bzw. Teilchendichte jeweils für sich gegen das chemische Potential plottet. Allerdings erscheint auch diese Darstellung zur Identifikation der Übergangspunkte weitgehend ungeeignet, insbesondere wenn die ohnehin schon schwachen Strukturen durch endliche Temperaturen oder geringere Werte von m_2/m_1 noch weiter ausgewaschen werden.

In der Schallgeschwindigkeit hingegen fällt im Vergleich zum reinen Gas bei dem Gemisch eine weitere, besonders deutliche Struktur auf. In Abb. 4.1 ist die quadrierte Schallgeschwindigkeit für verschiedene Werte von m_1/T gezeigt. Im Fall $T \rightarrow 0$ steigt diese im Bereich $1 < \mu/m_1 < 2$ strikt an, exakt wie beim reinen Gas. Denn in diesem Bereich ist lediglich eine Komponente vorhanden. Genau am Entstehungspunkt der zweiten Komponente $\mu = m_2$, d. h. $\mu/m_1 = 2$, findet sich dann eine scharfe Spitze. Danach fällt die quadrierte Schallgeschwindigkeit zunächst wieder ab, um schließlich noch einmal zu steigen und im Grenzfall $\mu/m_1 \rightarrow \infty$ wie erwartet gegen $1/3$ zu konvergieren. Ruft man sich die Definition $c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial e}\right)_{s/n}$ in Erinnerung, so lässt dies folgende Interpretation zu: Bei $T = 0$ besetzen die Teilchen die verfügbaren Einteilchen-Energieniveaus so, dass die Gesamtenergie minimiert wird. Aufgrund des Pauli-Prinzips können sich jedoch

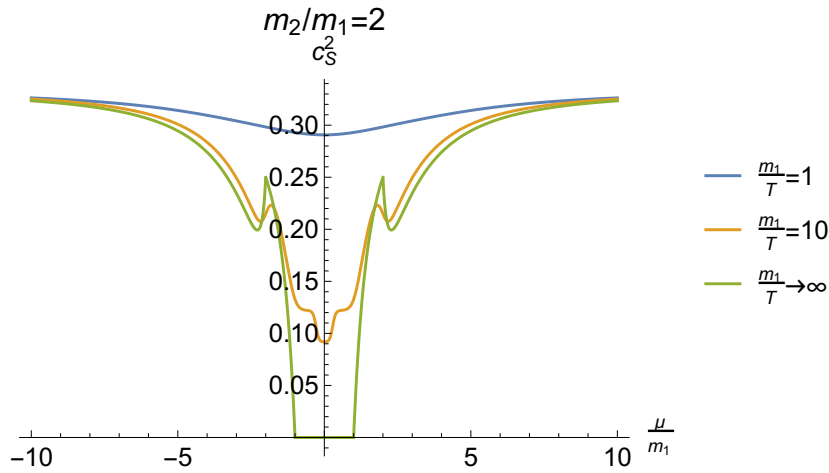


Abbildung 4.1.: Schallgeschwindigkeit für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$

nicht alle Teilchen im Grundzustand befinden. Deshalb werden mit steigendem chemischen Potential immer mehr Zustände mit höheren Impulsen „von unten herauf“ besetzt. Erhöht man nun die Energiedichte, so müssen die neu hinzukommenden Teilchen dementsprechend Zustände mit größeren Impulsen belegen. Der Anstieg des Drucks mit der Energiedichte wird also immer größer, die Schallgeschwindigkeit steigt im Allgemeinen mit dem chemischen Potential an. Kommt nun jedoch abrupt eine zweite Komponente hinzu, so stehen schlagartig noch unbesetzte Einteilchen-Niveaus mit niedrigen Impulsen zur Verfügung. Bei einer Erhöhung der Energiedichte werden also zunächst diese Zustände bevorzugt besetzt. Daher wird der Anstieg des Drucks (und damit die Schallgeschwindigkeit) kleiner, bleibt aber positiv. Bei noch größeren chemischen Potentialen haben sich die Besetzungsverhältnisse bei der zweiten Komponente wieder entsprechend angepasst, sodass auch hier nur noch Niveaus mit großen Impulsen frei sind. Daher steigt die Schallgeschwindigkeit letztlich wieder an. Dieser Effekt ist selbst bei geringen, aber endlichen Temperaturen (z. B. $m_1/T = 10$) noch deutlich zu erkennen.

Wenn sich nun die Massen der beiden Spezies annähern, wird jedoch auch in der Schallgeschwindigkeit diese Struktur immer weniger signifikant. Dies ist z. B. für $m_2/m_1 = 1,1$ in Abb. A.21 gezeigt. Im Limes $m_2/m_1 \rightarrow 1$ verschwindet die zusätzliche Struktur schließlich vollständig bzw. verschmilzt mit der des ersten Übergangs. In obiger Auslegung lässt sich dieser Effekt wie folgt verstehen: Je ähnlicher sich die Massen der beiden Komponenten sind, desto geringer ist der Besetzungsunterschied in den Einteilchen-Niveaus am Entstehungspunkt der zweiten Komponente. Daher fällt die Schallgeschwindigkeit weniger stark ab. Auch das Intervall in μ , das benötigt wird, bis sich die Besetzungsverhältnisse angeglichen haben und die Schallgeschwindigkeit wieder zu steigen beginnt, ist kleiner.

Insgesamt bestätigt sich indes das folgende beim reinen Gas gefundene Bild: Im Vergleich zu Teilchendichte, Energiedichte oder Druck sind die Ableitungen dieser Größen sowie die Schallgeschwindigkeit wesentlich bessere Observablen zur Identifikation der Übergangspunkte.

Betrachtet man die vorstehend besprochenen Größen als Funktion des Massenverhältnisses m_2/m_1 , so lässt sich der Übergang ebenfalls feststellen. In Abb. A.22 ist dies für die Teilchendichte mit $\mu/m_1 = 2$ dargestellt. Für $T \rightarrow 0$ können im Bereich $m_2/m_1 < 2$ die Teilchen der zweiten Spezies erzeugt werden, wobei ihr Einfluss mit zunehmender Masse immer geringer wird. Daher sinkt hier die Teilchendichte ab. Ab $m_2 = \mu = 2m_1$ besteht das System nur noch aus

Teilchen der ersten Spezies. Weil deren Eigenschaften von m_2 unabhängig und damit in dieser Darstellung konstant sind, bleibt die Teilchendichte für höhere Werte von m_2/m_1 konstant. Bei endlichen Temperaturen wird dieser Übergang entsprechend ausgewaschen.

Ein ähnliches Bild zeichnet sich bei der Schallgeschwindigkeit als Funktion des Massenverhältnisses (s. Abb. A.23). Für $T \rightarrow 0$ ist diese im Bereich $m_2/m_1 \geq 2$ ebenfalls konstant, da hier nur Teilchen der ersten Spezies vorhanden sind. Senkt man das Massenverhältnis, so sinkt zunächst auch c_s^2 . Denn nun stehen mehr Zustände mit niedrigen Impulsen zur Verfügung, sodass, wie bereits erläutert, der Anstieg des Drucks mit der Energiedichte und damit die Schallgeschwindigkeit geringer ausfällt. Für noch kleinere Massenverhältnisse steigt diese wieder an, da nun die Einteilchen-Zustände der zweiten Spezies energetisch immer niedriger liegen und somit bei festem chemischen Potential immer mehr von diesen besetzt werden können. Bei sehr niedrigen Massenverhältnissen $m_2/m_1 \ll 1$ macht sich hingegen Folgendes bemerkbar: Das Absinken der Schallgeschwindigkeit mit steigendem μ durch die Entstehung der zweiten Komponente wie in Abb. 4.1 wird immer massiver und wirkt sich schließlich auch auf den in Abb. A.23 dargestellten Bereich $\mu/m_1 = 2$ aus. Daher nimmt die Schallgeschwindigkeit dort noch einmal ab. Bei endlichen Temperaturen ist dieser Effekt weniger stark ausgeprägt, sodass es für den hier gezeigten Fall $m_1/T = 10$ kein zusätzliches Absinken der Schallgeschwindigkeit bei sehr kleinen Werten von m_2/m_1 gibt. Im Bereich $m_2/m_1 \geq 2$ kommen thermische Anregungen hinzu, sodass die Schallgeschwindigkeit erst bei noch höheren Werten von m_2/m_1 annähernd konstant wird und gegen einen größeren Wert konvergiert als bei $T = 0$.

Allerdings ist diese Darstellung eher von akademischem Interesse, da in der Praxis keine Teilchen mit beliebigen Massen existieren und einzelne Spezies häufig nicht isoliert werden können. Dadurch ist es eher schwierig, eine gute Werteabdeckung für m_2/m_1 zu erzielen. Doch selbst in diesen Plots ist der Übergangspunkt in der Schallgeschwindigkeit etwas besser zu identifizieren als in der Teilchendichte.

4.2.2. Physikalische Anwendung: Gas nicht-wechselwirkender Hadronen (Abbildungen s. Anhang A.4)

Setzt man in die in Abschnitt 4.1 hergeleiteten Formeln für die Massen der einzelnen Teilchen m_j und ihre Entartungsfaktoren g_j die entsprechenden physikalischen Werte aus [9] ein, so lässt sich mit dieser Theorie ein Gas nicht-wechselwirkender Hadronen beschreiben. In realen Hadronengasen kommt es zu einem Zusammenspiel von attraktiven und repulsiven Wechselwirkungen. Bei tiefen Temperaturen und schweren Quarks kann ein wechselwirkendes Gas von Hadronen hinreichend gut durch das in der vorliegenden Arbeit beschriebene wechselwirkungsfreie Gas genähert werden. Dementsprechend stimmen thermodynamische Größen, die in Gitter-QCD mit relativ großen Quarkmassen berechnet wurden, bei tiefen Temperaturen auch gut mit den Ergebnissen eines freien Hadronengases überein, wenn dort die Hadronmassen an die großen Quarkmassen der Gitterrechnungen angepasst werden [10]. Die Effekte, die sich durch die Änderung der Quarkmassen ergeben, werden weiter unten noch ausführlicher diskutiert.

Doch zunächst einmal sollen physikalische, d. h. experimentell gemessene Massen verwendet werden. Die berücksichtigten Teilchen mit den jeweiligen Werten für Masse und Entartungsfaktor finden sich in Tabelle 4.1. Teilchen mit sehr ähnlichen Massen innerhalb von ca. 10 MeV wurden hierbei als entartet angenommen, und entsprechend eine gerundete mittlere Masse verwendet. Um nun ein System mit beliebig vielen Spezies numerisch mit `Mathematica` zu behandeln, müssen die Integrale für jeweils eine Komponente auf eine Liste von Massenverhältnissen m_j/m_1 und Entartungsfaktoren g_j angewendet und die entsprechenden Resultate aufsummiert

werden. Dazu definiert man zuerst die jeweiligen Ein-Komponenten-Funktionen, und wickelt diese danach mithilfe der eingebauten Funktion `Thread` über die Listen für die Massen und Entartungsfaktoren ab. Die Ergebnisse werden im Anschluss mithilfe von `Plus` direkt addiert. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit muss diese Prozedur zuerst auf einzelne Teile der Formel angewendet werden, die anschließend weiter verrechnet werden (s. z. B. Gleichung (4.5)).

Tabelle 4.1.: Berücksichtigte Hadronen und deren Eigenschaften [9]

Teilchen	Masse [MeV]	Entartungsfaktor
Nukleon (p/n)	939	4
Λ	1116	2
Σ	1193	6
Δ	1232	16
Ξ	1318	4
Σ^*	1385	12
Ξ^*	1533	8
Ω	1672	4

Wirft man nun einen Blick auf die Ergebnisse für die Teilchendichte als Funktion des chemischen Potentials in Abb. A.24, so erkennt man, dass es mehrere Übergänge gibt, für jede Spezies aus Tabelle 4.1 einen. Hierbei wurde stets der Fall $T \rightarrow 0$ geplottet. Denn es gibt, wie in Abb. A.25 zu sehen, für dieses wechselwirkungsfreie Modell keinen exakten Übergang bei endlichen Temperaturen. Dort lassen sich also keine besonderen Strukturen feststellen. Als Referenzteilchen 1 wurde das leichteste hier berücksichtigte Teilchen, das Nukleon, gewählt. In der Teilchendichte lassen sich selbst bei $T = 0$ die Übergangspunkte wieder nur sehr schwer ausmachen (s. linker Teil A.24a). Daher ist im rechten Teil A.24b zusätzlich die erste Ableitung der Teilchendichte nach dem chemischen Potential gezeigt. Hier zeichnen sich diese Punkte etwas deutlicher ab. Auffällig ist jedoch, dass einige der Übergänge wesentlich markanter sind als andere. Ein Vergleich mit Tabelle 4.1 zeigt, dass diese zu den Teilchensorten mit hohen Entartungsfaktoren gehören (z. B. Δ , Σ^*). Denn der Beitrag einer Spezies zur Teilchendichte und damit auch zu deren Ableitung ist proportional zum jeweiligen Entartungsfaktor. Folglich steuern nur Teilchensorten mit großen Entartungsfaktoren wesentlich zur Teilchendichte bei, sodass auch nur deren Entstehungspunkte deutlich sichtbar sind.

In der Schallgeschwindigkeit als Funktion des chemischen Potentials (s. Abb. A.26) zeigen sich nun ebenfalls mehrere Strukturen (scharfe Spitzen für den hier dargestellten Fall $T \rightarrow 0$), eine an jedem Übergang. Diese lassen sich wiederum erheblich besser erkennen als in den entsprechenden Plots der Teilchendichte. Doch auch hier sieht man, dass diejenigen Punkte, die zu Teilchen mit hohen Entartungsfaktoren gehören, eine bedeutendere Struktur besitzen als diejenigen, die zu Teilchen mit niedrigeren Entartungsfaktoren gehören. Weiterhin fällt auf, dass die Strukturen ausgeprägter sind, wenn der Abstand zum nächsten Übergang größer ist. Dies kann man sich z. B. anhand des starken Abfalls von c_s^2 zwischen Δ - und Ξ -Übergang im Vergleich zur sichtbar kleineren Struktur zwischen Σ - und Δ -Übergang verdeutlichen. Insgesamt stellt man also fest, dass mit steigendem chemischen Potential immer mehr höhere Resonanzen bzw. schwerere Teilchensorten erzeugt werden und somit zum Gemisch beitragen.

In einer Reihe von QCD-Rechnungen werden nun Quarkmassen verwendet, die schwerer sind als die physikalischen. Dies ist bei manchen Gitterrechnungen der Fall [10], damit der Rechenaufwand geringer ausfällt. Der wichtigste Einfluss auf die Hadronmassen ergibt sich hierbei allerdings aus dem Gitterabstand. Denn erst im Kontinuumslimit stimmen die Hadronmassen

4. Gemische idealer relativistischer Fermi-Gase

mit den physikalischen Werten (unter Berücksichtigung der entsprechend angepassten Quarkmassen) überein, während es bei endlichen Gitterabständen stets sogenannte „Cutoff-Effekte“ gibt. Da die Gitterrechnungen bei festem (imaginär-)zeitlichem Abstand N_τ durchgeführt werden, stellt man die Temperatur durch Variation des Gitterabstandes a ein: $T = 1/N_\tau a$. Gerade bei tiefen Temperaturen, bei denen das nicht-wechselwirkende Modell anwendbar ist, sind also der Gitterabstand und damit auch die „Cutoff-Effekte“ größer [10].

Vor allem in effektiven Modellen weichen jedoch auch die Quarkmassen beträchtlich von ihren physikalischen Werten ab. Grund dafür ist eine Reihenentwicklung, die, insbesondere bei tiefen Temperaturen, nur für schwere Quarks konvergiert [11]. Dadurch ändern sich gleichfalls die Massen der verschiedenen Hadronen. Im physikalischen Fall setzen sich diese zum größten Teil dynamisch aus der Wechselwirkung der Quarks untereinander zusammen: Gluonen und Seequarks [12]. Sind nun die Quarkmassen deutlich höher, so entfällt ein größerer Teil der Hadronmassen auf die Ruhemassen der Valenzquarks, anstatt auf die Wechselwirkung. Deswegen wird der Massenunterschied zwischen Hadronen, die sich aus denselben Valenzquarks (z. B. up/down) zusammensetzen, geringer, während der Unterschied steigt, wenn andere, schwerere Quarks (z. B. strange) hinzukommen. Für die in Tabelle 4.1 aufgelisteten Hadronen heißt dies konkret, dass sich die Masse der Δ -Teilchen stärker der der Nukleonen annähern wird, während alle anderen Teilchen deutlich schwerer werden, da sie strange-Valenzquarks enthalten. Folglich wird sich für schwere Quarkmassen im Vergleich zu Abb. A.26 der Δ -Übergang deutlich näher an $\mu/m_1 = 1$ befinden, während die restlichen erst bei höheren chemischen Potentialen zu finden sein werden. Im Limes sehr hoher Quarkmassen tritt also der oben diskutierte Fall ein, dass die Struktur am Δ -Übergang immer weniger signifikant wird, bis sie schließlich mit der der Nukleonen verschmilzt. Damit tragen in QCD-Rechnungen mit schweren Quarks also bereits bei relativ niedrigen chemischen Potentialen höhere Resonanzen wie die Δ -Teilchen zum Hadronen-Gas-Gemisch bei.

4.2.3. Extrahieren der Teilchensorten aus Daten (Abbildungen s. Anhang A.5)

Abschließend soll noch darauf eingegangen werden, wie aus gegebenen Messdaten (mit statistischem Fehler) Informationen über die im System vorhandenen Teilchensorten extrahiert werden können. Eine Möglichkeit besteht darin, diese aus der Messung der Teilchendichte als Funktion des chemischen Potentials im Grenzfall $T \rightarrow 0$ zu erhalten. Für ein reines Gas lässt sich allgemein ein Fit nach Gleichung (3.15) verwenden. Ist das Gas nicht-relativistisch, wie bei Hadrongasen oftmals der Fall, ist sogar die einfachere Beziehung (3.25) anwendbar. Dann kann man die Teilchendichte gegen $(\mu/m - 1)^{3/2}$ auftragen und den Entartungsfaktor aus der Steigung eines linearen Fits berechnen. Bei mehreren Spezies sind die Massen m_j , die als Referenz für μ zu verwenden sind, verschieden, weshalb sich kein linearer Zusammenhang mehr herstellen lässt. Dann kann man stückweise, d. h. jeweils von Übergangspunkt zu Übergangspunkt, einen Fit der Daten an die Teilchendichten der einzelnen Spezies erstellen. Für den nächsten Abschnitt sind die Beiträge aller bereits identifizierter Komponenten abzuziehen. Dadurch ist jeweils effektiv nur der Beitrag einer Teilchensorte zu bestimmen, sodass wieder Gleichung (3.15) bzw. (3.25) verwendet werden kann.

In Abb. A.27 ist die Teilchendichte als Funktion des chemischen Potentials für ein vollständig entartetes Gas von Baryonen gezeigt, die nur aus up- und down-Valenzquarks zusammengesetzt sind. Die Gesamtzahl der berücksichtigten Freiheitsgrade (Summe aller Entartungsfaktoren) beträgt 800. Baryonen, die andere Flavours (strange, charm, bottom) enthalten, wurden hier nicht mit in Betracht gezogen, damit das Modell mit den Rechnungen in [11] verglichen werden kann, in denen ebenfalls nur zwei (entartete) Quark-Flavours verwendet werden. Die benötigten Daten

für die Baryonen wurden mithilfe der in `Mathematica` eingebauten Funktion `ParticleData` gewonnen, können im Prinzip aber auch aus [9] abgelesen werden. Die exakten Werte können zwischen den beiden Quellen geringfügig voneinander abweichen, da `ParticleData` auf den Teilchentabellen der PDG von 2006 basiert, während in [9] die Werte von 2018 verwendet werden. Diese Diskrepanzen sind aber im Allgemeinen so klein, dass die Identifikation der Teilchen dadurch nicht beeinflusst wird. Außerdem enthält `ParticleData` einige hypothetische höhere Resonanzen, die in [9] nicht mit allen Eigenschaften aufgelistet sind.

Die Teilchendichte wird nun an diskreten Punkten von μ/m_1 ausgewertet (hier mit einem Abstand von 0,01), um einen Datensatz für die Analyse zu erhalten. Die wie eingangs beschrieben durchgeführten Fits sind in Abb. A.28 zu finden. Für die erste Spezies, die Nukleonen ($g = 4$), ergibt sich eine Steigung von $0,2332 \pm 0,0017$ (s. linker Teil A.28a) und nach Gleichung (3.25) damit ein Entartungsfaktor von $g = 0,2332 \cdot 3\pi^2/\sqrt{2} \approx 4,882 \pm 0,036$. Für die zweite Spezies, die Δ -Teilchen ($g = 16$), resultiert eine Steigung von $1,690 \pm 0,016$ (s. rechter Teil A.28b) oder $g \approx 15,74 \pm 0,15$. Die Abweichungen der Ergebnisse von den „tatsächlichen“ Werten sind größer als die Fehlerbereiche, weil in den Daten relativistische Effekte enthalten sind, die ein linearer Fit gemäß Gleichung (3.25) nicht berücksichtigt. Für alle weiteren Spezies (hier nicht gezeigt) ist ein solcher Fit nicht mehr sinnvoll, da die Abweichung von einer Geraden dort zu groß wird.

Problematisch an dieser Methode ist, dass sich, wie mehrfach diskutiert, die Übergangspunkte aus der Teilchendichte nur schwer erkennen lassen. Folglich kann man die Intervalle, auf denen die einzelnen Fits auszuführen sind, in der Praxis schlecht festlegen.

Zu einer anderen Herangehensweise gelangt man, wenn man davon ausgeht, dass bekannt ist, welche Teilchen (und damit Kombinationen von Masse und Entartungsfaktor) überhaupt vorkommen können. Dies ist bei QCD-Modellen mit schweren Quarks in der Regel nicht erfüllt, sondern ausschließlich im physikalischen Fall. Dort ist es also überflüssig, diese Daten durch einen Fit zu gewinnen. Stattdessen ist es ausreichend, alle möglichen Kombinationen von Teilchen zu betrachten und die dafür berechnete Dichte mit den Daten zu vergleichen. Entsprechend ist das gesuchte Szenario dasjenige mit den geringsten (quadratischen) Abweichungen der Daten vom Modell. Die Zahl der zu testenden Konfigurationen verringert sich hierbei wesentlich, wenn man zusätzlich berücksichtigt, dass die Reihenfolge, in der die Teilchen erzeugt werden, ebenfalls bekannt ist. Denn es ist davon auszugehen, dass keine schwerere Spezies im System vorhanden ist, während eine leichtere es noch nicht ist.

Um das Vorgehen zu automatisieren, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Funktion in `Mathematica` entwickelt, die alle Rechenschritte übernimmt und die bevorzugte Teilchenkombination ausgibt. Sie benötigt die Daten sowie eine Liste aller möglichen Baryonen als Eingabe. Die Baryontabelle wird vom Algorithmus zunächst in eine Liste von möglichen Kombinationen unterteilt. Standardmäßig wird dabei obiges Wissen angewendet, dass die Teilchen in einer spezifischen Reihenfolge entstehen. Man kann durch Setzen der Option `tryAll` jedoch erzwingen, dass alle mathematisch möglichen Kombinationen überprüft werden. Bei sehr langen Baryontabellen ist die Anzahl dieser Möglichkeiten (Potenzmenge!) allerdings so hoch, dass ein Büro-PC damit nicht mehr umgehen kann. Im nächsten Schritt wird für jede der Optionen der totale quadratische Abstand der Datenpunkte von dem Modell berechnet. Der Eintrag mit dem geringsten Abstand wird schließlich nach den Wünschen des Benutzers formatiert (Option `method`) und ausgegeben.

Bei der Anwendung der Funktion auf die generierten Daten zeigt sich, dass in der Regel die zuvor eingestellte Teilchenkombination erkannt wird. Selbst wenn man zu den exakten Daten Zufallszahlen mit einer maximalen relativen Abweichung von maximal 5% addiert, um fehlerbehaftete Daten zu simulieren, sind die Ergebnisse noch relativ gut verwertbar.

4. Gemische idealer relativistischer Fermi-Gase

Allerdings kann es passieren, dass bei zu großen Fehlern die Fluktuationen stärker sind als die zu identifizierenden Strukturen. Somit wird unter Umständen ein anderes Szenario bevorzugt, als bei der Simulation der Daten verwendet wurde. Auf die Gesamtzahl der Freiheitsgrade (Summe aller Entartungsfaktoren) ist das Verfahren jedoch empfindlicher. Auch bei stärkerer Fehlerbehaftung der Daten ist diese Größe noch immer recht nahe am gesuchten Wert.

Eine weitere sinnvolle Alternative stellt die Messung der Schallgeschwindigkeit als Funktion des chemischen Potentials dar, falls entsprechende Daten verfügbar sind. Dort sind die Übergänge deutlich einfacher zu identifizieren. Auch hier sind die beiden oben vorgestellten Methoden (stückweise Fits oder Vergleich mit verschiedenen Szenarien für die vorhandenen Teilchen) anwendbar. Gerade bei den stückweisen Fits ist es von Vorteil, dass sich die Massenverhältnisse direkt aus einer Grafik wie Abb. A.26 ablesen lassen. Es ist jedoch zu beachten, dass man in Gleichung (4.5) einen der Entartungsfaktoren herauskürzen kann, sodass zunächst nur Verhältnisse von Entartungsfaktoren fixiert werden können. Kennt man eine der Spezies (z. B. die Nukleonen), lassen sich damit die übrigen Entartungsfaktoren bestimmen.

Für den in [11] diskutierten Fall ist das Vorgehen noch etwas einfacher, wenn man in erster Näherung annimmt, dass die Wechselwirkungen vernachlässigbar sind. Denn dort werden, wie in Abschnitt 4.2.2 diskutiert, schwere Quarks betrachtet, sodass der Massenunterschied der Baryonen, die nur aus up- und down-Valenzquarks zusammengesetzt sind, vernachlässigbar ist. Folglich kann für den Parameter m für alle Spezies in etwa der gleiche Wert verwendet werden, und Gleichung (3.15) bzw. (3.25) gilt mit $g = \sum_j g_j$. Es kann also (im nicht-relativistischen Grenzfall) ein globaler linearer Fit verwendet werden. Auch die Zustandsgleichung $P(n)$ ist dann gemäß Gleichung (3.27) polytrop. Insgesamt stellt man aufgrund der hohen Zahl an Freiheitsgraden auch hier fest, dass höhere Resonanzen zum Hadronen-Gas-Gemisch beitragen müssen.

In dem Modell in [8] existieren für $T \rightarrow 0$ jedoch nicht nur die bekannten fermionischen Baryonen, sondern zusätzliche bosonische Di-Baryon-Zustände. Diese kondensieren alle in den Grundzustand (*Bose-Einstein-Kondensation*). Da es sich um den Zustand mit verschwindendem Impuls handelt, steuern die Bosonen nicht zum Druck des Systems bei [1]. Sie besitzen aber Baryonenzahl $B = 2$ und liefern somit einen endlichen Beitrag zur Baryondichte:

$$n_{B,\text{Bosonen}} = B n_{\text{BEC}} = B \frac{g}{V} \left[\frac{e^{\beta(B\mu-m)}}{1 - e^{\beta(B\mu-m)}} - \frac{e^{\beta(-B\mu-m)}}{1 - e^{\beta(-B\mu-m)}} \right]. \quad (4.6)$$

Wie bei den Fermionen verschwindet der zweite Term für die Antiteilchen im Limes $T \rightarrow 0$ bei positivem μ . Dieses muss, wie bei der allgemeinen Behandlung von Gemischen erläutert, mit der Baryonenzahl B der Bosonen multipliziert werden, um deren chemisches Potential zu erhalten. Die Einschränkung lautet hier wegen der Anwesenheit der Antiteilchen $|B\mu| \leq m$ [13]. In der kondensierten Phase strebt nun $e^{\beta(B\mu-m)} \rightarrow 1$, d. h. $B\mu \rightarrow m$, unabhängig von der Bosondichte n_{BEC} . In der nicht-wechselwirkenden Theorie kann n_{BEC} also für $T \rightarrow 0$ beliebige Werte annehmen. Denn der Grundzustand kann von beliebig vielen Teilchen besetzt werden, die sich aufgrund fehlender Wechselwirkung beliebig dicht im Ortsraum sammeln können. Gibt man hingegen ein $\mu < m/B$ vor, so ist der Anteil der Bosonen an der Baryondichte im thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$ zu vernachlässigen. Zur korrekten Beschreibung des bosonischen Beitrags in realen Hadronen-Gas-Gemischen müssen also Wechselwirkungen berücksichtigt werden.

5. Fazit

In dieser Arbeit wurden die thermodynamischen Eigenschaften eines idealen relativistischen Fermi-Gases sowie von Gemischen solcher Gase errechnet. Jene können als erste, nicht-wechselwirkende Näherung für komplizierte physikalische Systeme wie Hadronengase dienen. Besonders bei niedrigen Temperaturen und schweren Quarks stimmen die Ergebnisse ausreichend gut mit den aus Gitter-QCD ermittelten Werten für ein wechselwirkendes Gas von Hadronen überein.

Für das ideale Gas wurde im Grenzfall $T \rightarrow 0$ die sogenannte *onset transition* identifiziert, also der Entstehungspunkt der Teilchen bei $\mu = \pm m$. Bei endlichen Temperaturen gibt es für nicht-wechselwirkende Systeme keinen solchen exakten Punkt, sondern nur einen sanften Übergang. Es wurde in allen untersuchten Fällen bestätigt, dass die Schallgeschwindigkeit eine deutlich besser geeignete Observable zur Bestimmung dieser Übergangspunkte ist als beispielsweise die Teilchendichte, der Druck oder die Energiedichte. Denn in der Schallgeschwindigkeit sind die Strukturen an diesen Punkten deutlich besser zu erkennen, sogar für endliche, aber tiefe Temperaturen.

Betrachtet man Gemische solcher idealer relativistischer Fermi-Gase mit verschiedenen Komponenten, so gibt es mehrere dieser Übergänge, für jede Spezies einen. Auch hier erwies sich die Schallgeschwindigkeit als die bessere Observable zur Betrachtung der Übergänge. Speziell für das Hadronengas zeigte sich, dass schon bei relativ niedrigen Werten für das chemische Potential höhere Resonanzen zu entstehen beginnen. Dies verstärkt sich erheblich, wenn man QCD-Modelle mit Quarkmassen betrachtet, die deutlich größer sind als die physikalischen. Denn dann sind die Massenverhältnisse von Baryonen mit gleichem Valenzquark-Inhalt nahe bei eins.

Schließlich wurden Methoden erarbeitet, um aus (eventuell fehlerbehafteten) Daten für die Netto-Teilchendichte eines Hadronengases bei $T = 0$ dessen Freiheitsgrade zu extrahieren. Hierzu kann man stückweise Fits der Daten an die analytisch hergeleitete Gleichung für ein reines Gas erstellen. Allerdings müssen dafür die Übergangspunkte manuell aus den Daten abgelesen werden, was sich aber häufig als zu ungenau herausstellte. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit eine alternative Herangehensweise konzipiert: Man vergleicht die sich aus den analytischen Rechnungen ergebende Theorie für alle möglichen Kombinationen von Teilchen mit den Daten. Hieraus ermittelt man das Szenario mit den geringsten Abweichungen. Dieses Vorgehen ist robuster gegenüber fehlerbehafteten Daten als das Berechnen von Fits. Auch hier erkennt man durch die Gegenüberstellung mit freien Gasen, dass in QCD-Modellen mit schweren Quarks zahlreiche höhere Resonanzen zum Gemisch beitragen.

Die hier beschriebenen Ergebnisse dienen als Grundlage, um in der Zukunft die Zahl der Freiheitsgrade in diesem effektiven Modell präziser zu bestimmen. Darüber hinaus wird es sehr interessant sein, den genauen Ursprung ihres großen Wertes sowie den Beitrag der Bosonen zu ermitteln.

Danksagung

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. Owe Philipsen für die Möglichkeit danken, diese Bachelorarbeit in seiner Arbeitsgruppe verfassen zu können. Auch für zahlreiche Beratungen, Hilfestellungen und inspirierende Gespräche bedanke ich mich. Zudem bin ich Sebastian Schmalzbauer überaus dankbar, der mir bei sämtlichen Problemen stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden ist und diese Arbeit aufmerksam gelesen hat. Besonderer Dank gilt ebenso meiner Familie, die mich auf dem Weg durch mein Studium begleitet und unterstützt hat wie niemand sonst.

A. Anhang

A.1. Plots für den masselosen Fall

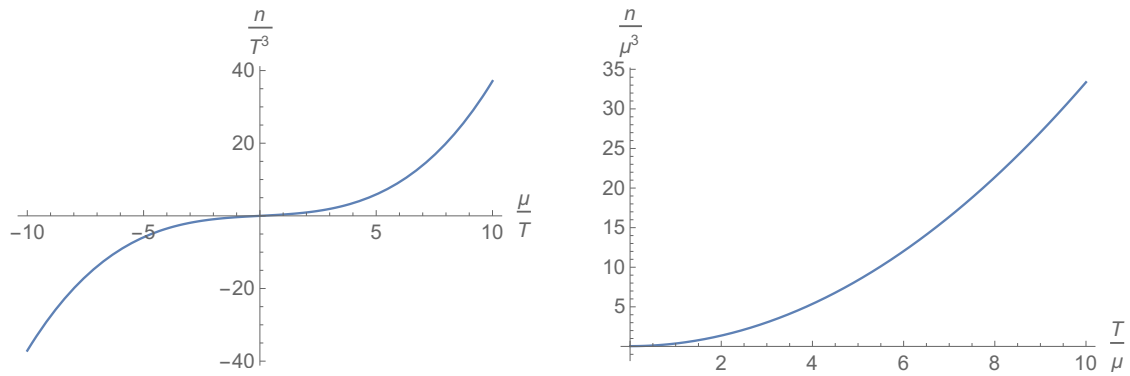


Abbildung A.1.: Teilchendichte für $m = 0$

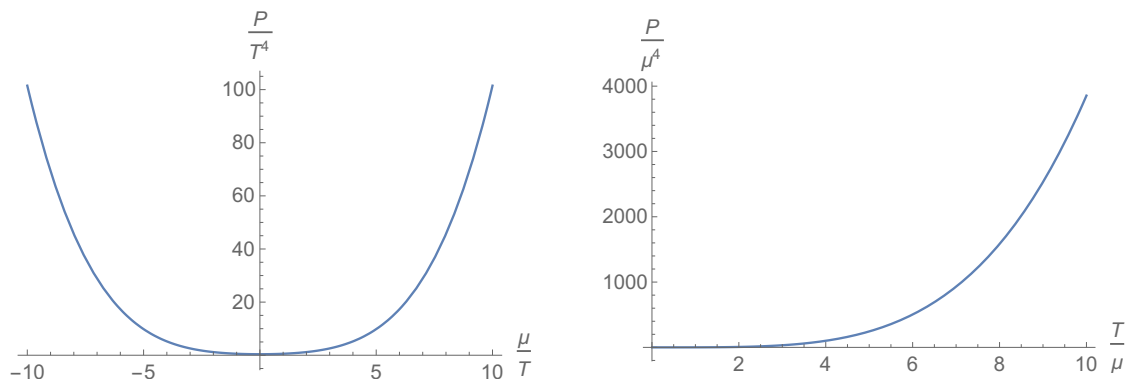


Abbildung A.2.: Druck für $m = 0$

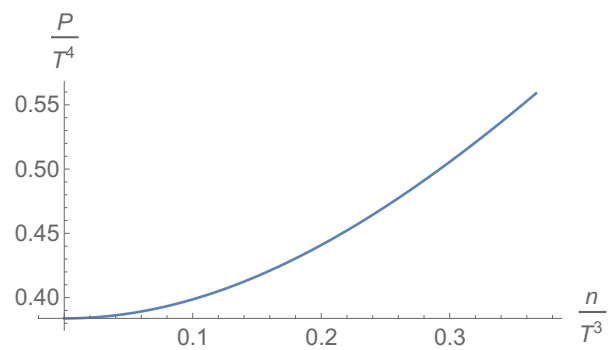


Abbildung A.3.: Druck gegen Teilchendichte für $m = 0$

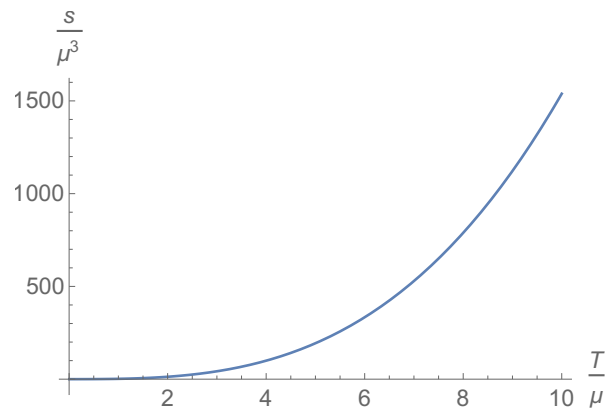


Abbildung A.4.: Entropiedichte pro chemischem Potential für $m = 0$

A.2. Plots für den allgemeinen (massiven) Fall

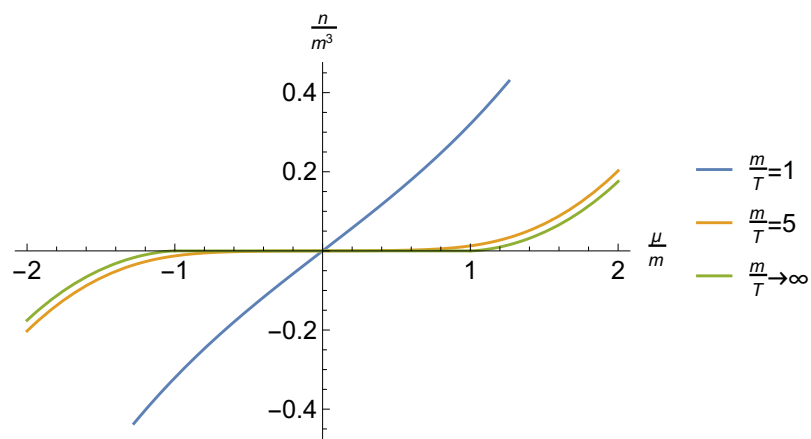


Abbildung A.5.: Teilchendichte für $m \neq 0$

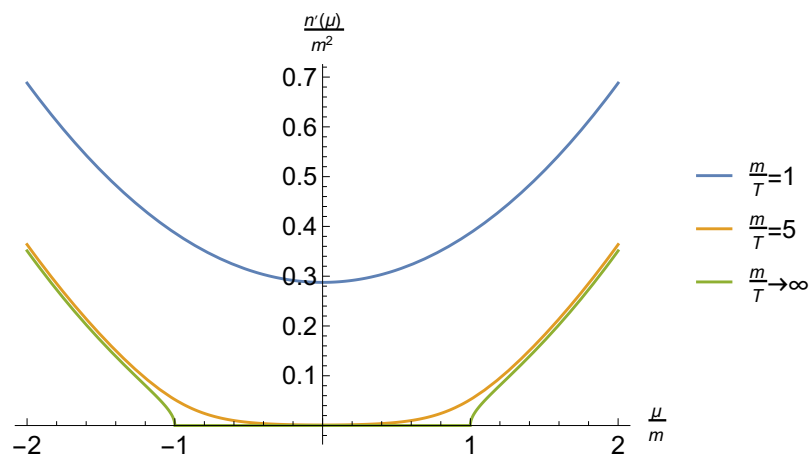


Abbildung A.6.: Erste Ableitung der Teilchendichte nach μ für $m \neq 0$

A.2. Plots für den allgemeinen (massiven) Fall

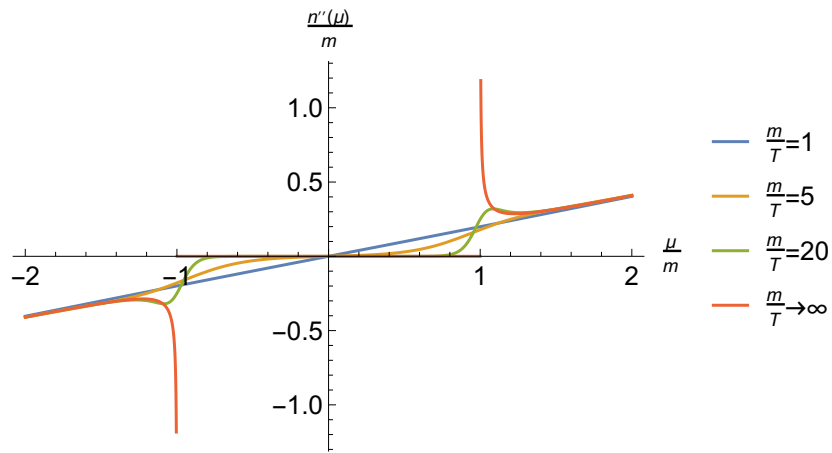


Abbildung A.7.: Zweite Ableitung der Teilchendichte nach μ für $m \neq 0$

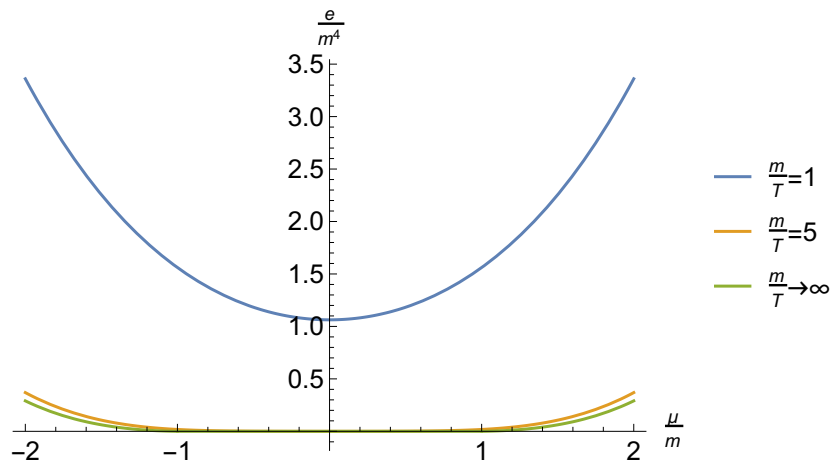


Abbildung A.8.: Energiedichte für $m \neq 0$

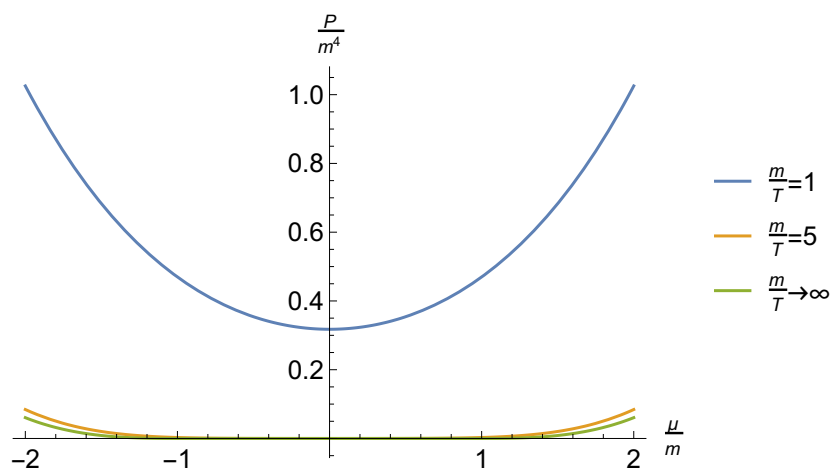


Abbildung A.9.: Druck für $m \neq 0$

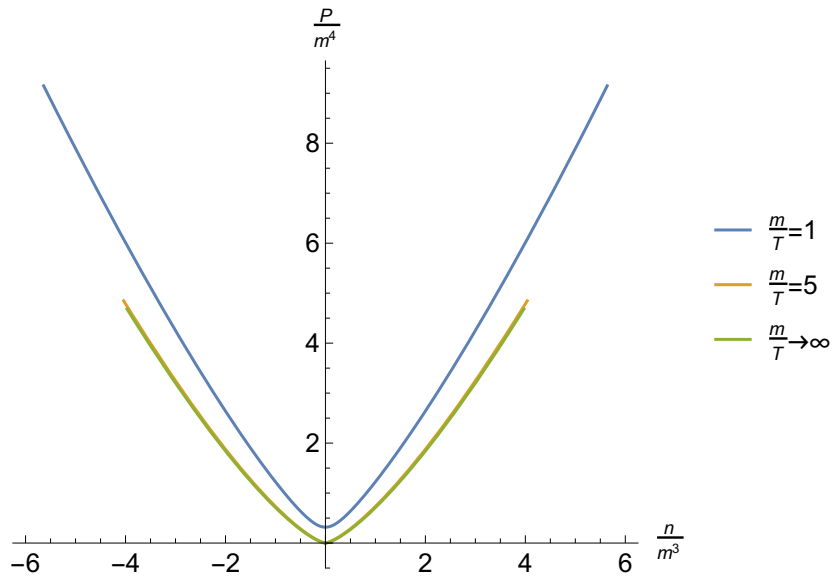


Abbildung A.10.: Druck gegen Teilchendichte für $m \neq 0$

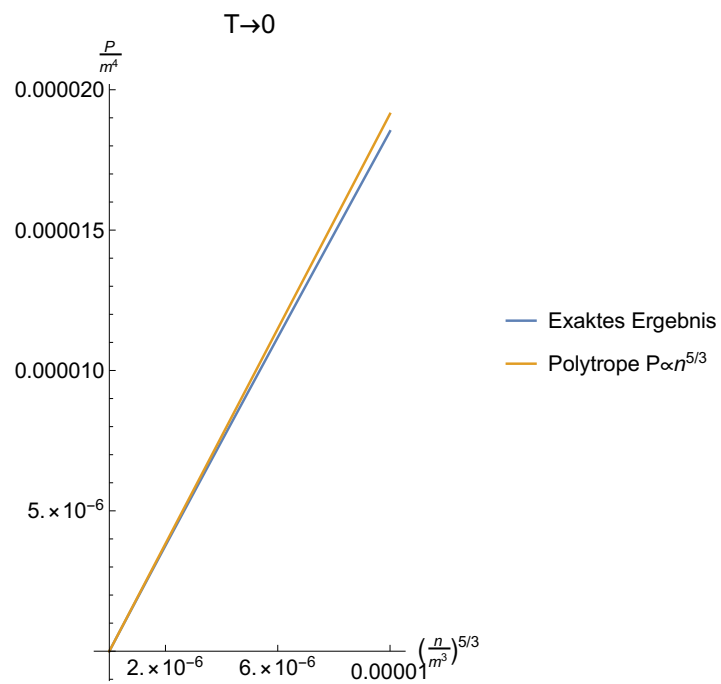


Abbildung A.11.: Druck gegen Teilchendichte für $T \rightarrow 0$ und $\mu \approx m$ für $m \neq 0$

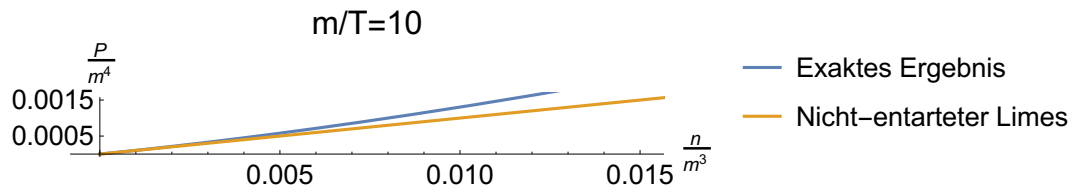


Abbildung A.12.: Druck gegen Teilchendichte im nicht-entarteten Limes für $m \neq 0$

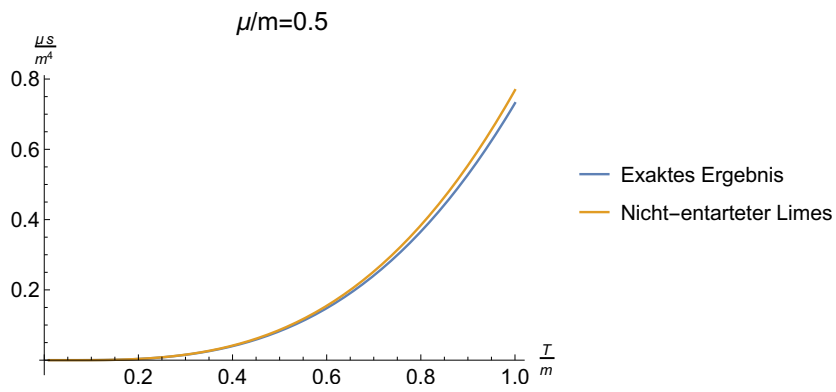


Abbildung A.13.: Entropiedichte pro chemischem Potential im nicht-entarteten Limes für $m \neq 0$

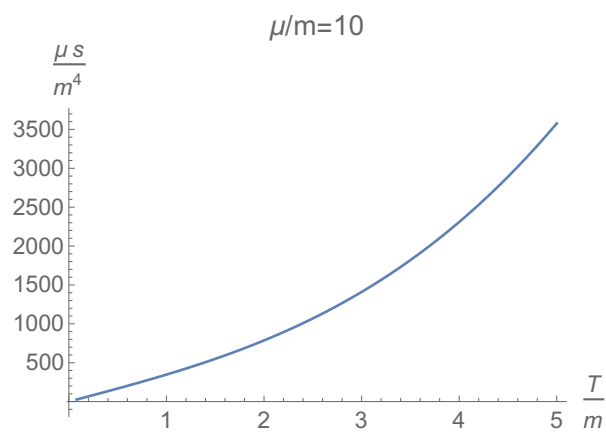


Abbildung A.14.: Entropiedichte pro chemischem Potential für $m \neq 0$

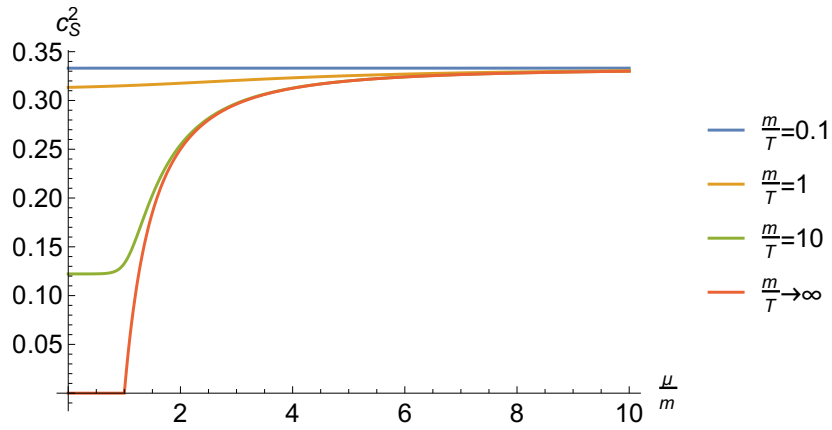


Abbildung A.15.: Schallgeschwindigkeit für $m \neq 0$ ohne Antiteilchen

A.3. Plots für das zweikomponentige Gemisch

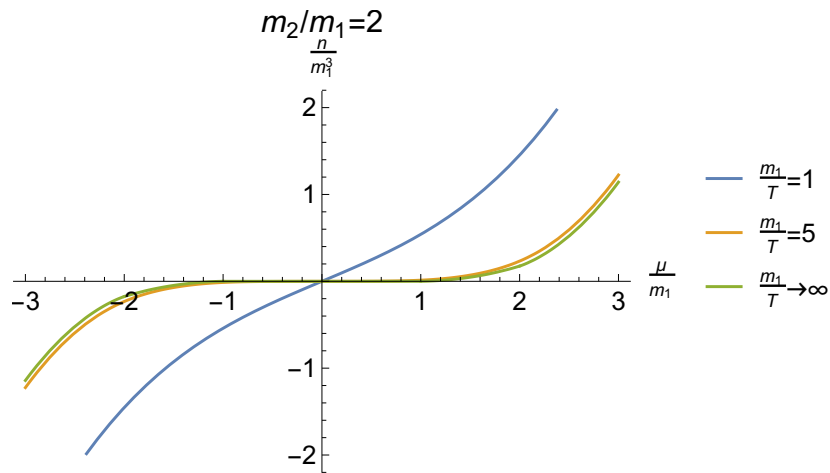


Abbildung A.16.: Teilchendichte für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$

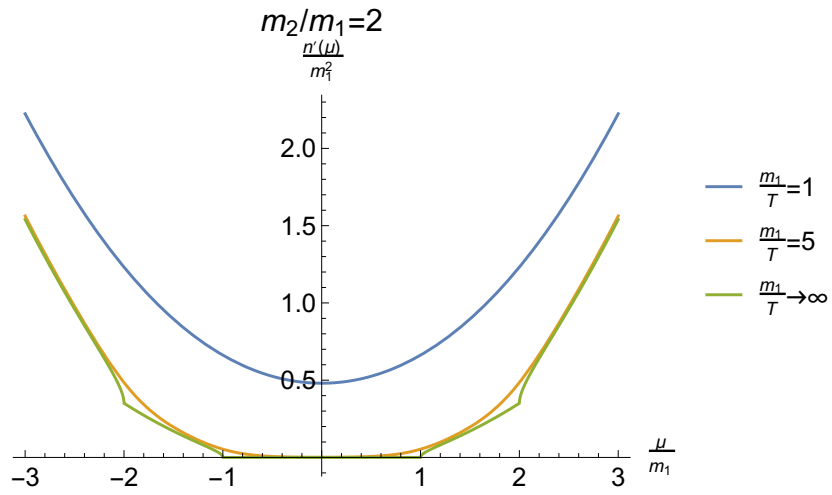


Abbildung A.17.: Erste Ableitung der Teilchendichte nach μ für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$

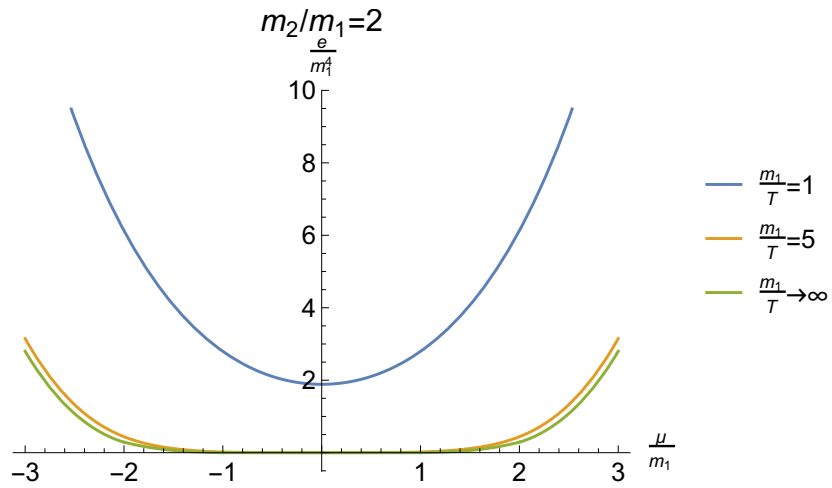


Abbildung A.18.: Energiedichte für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$

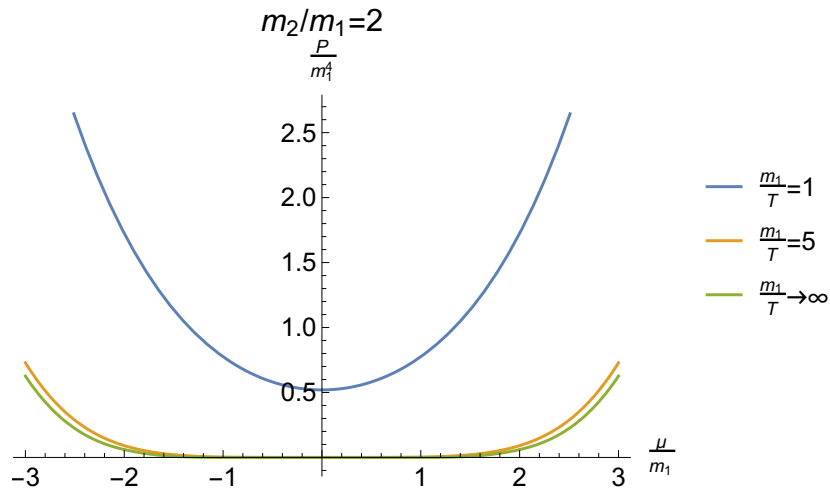


Abbildung A.19.: Druck für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$

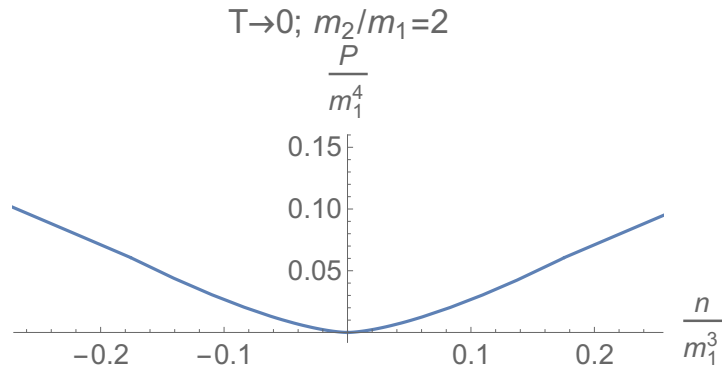


Abbildung A.20.: Druck gegen Teilchendichte im Grenzfall $T \rightarrow 0$ für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$

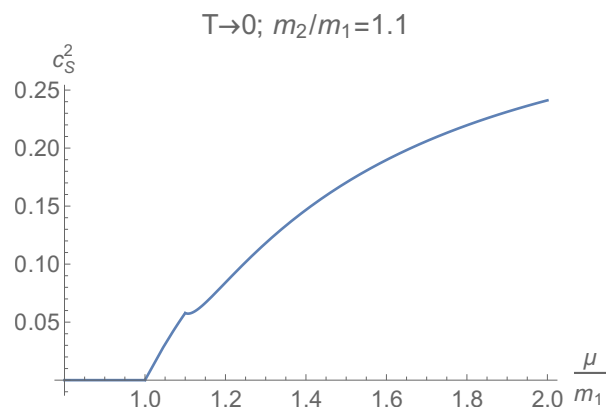


Abbildung A.21.: Schallgeschwindigkeit im Grenzfall $T \rightarrow 0$ für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 1,1$

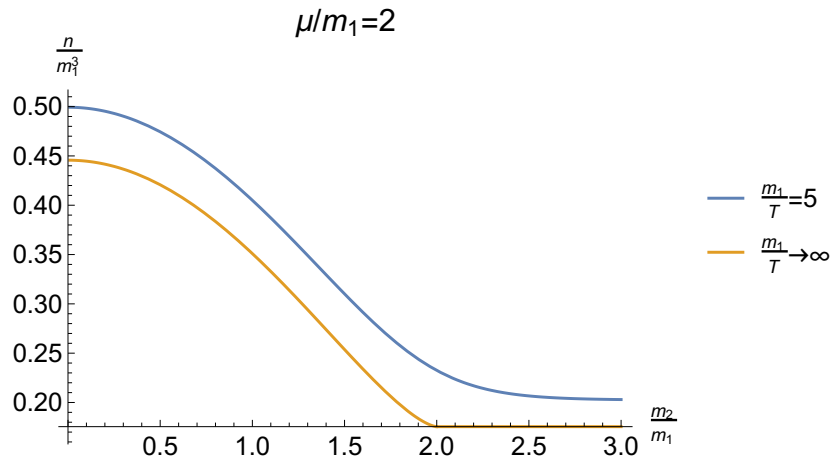


Abbildung A.22.: Teilchendichte als Funktion von m_2/m_1 für das zweikomponentige Gemisch mit $\mu/m_1 = 2$

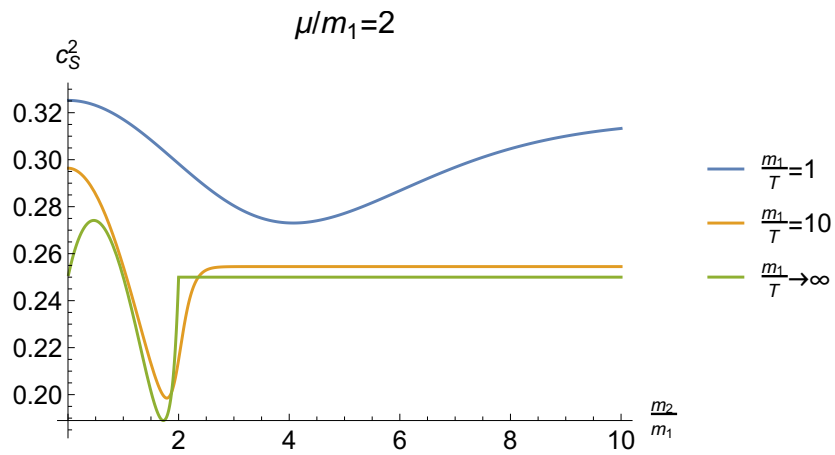


Abbildung A.23.: Schallgeschwindigkeit als Funktion von m_2/m_1 für das zweikomponentige Gemisch mit $\mu/m_1 = 2$

A.4. Plots für das Gas nicht-wechselwirkender Hadronen

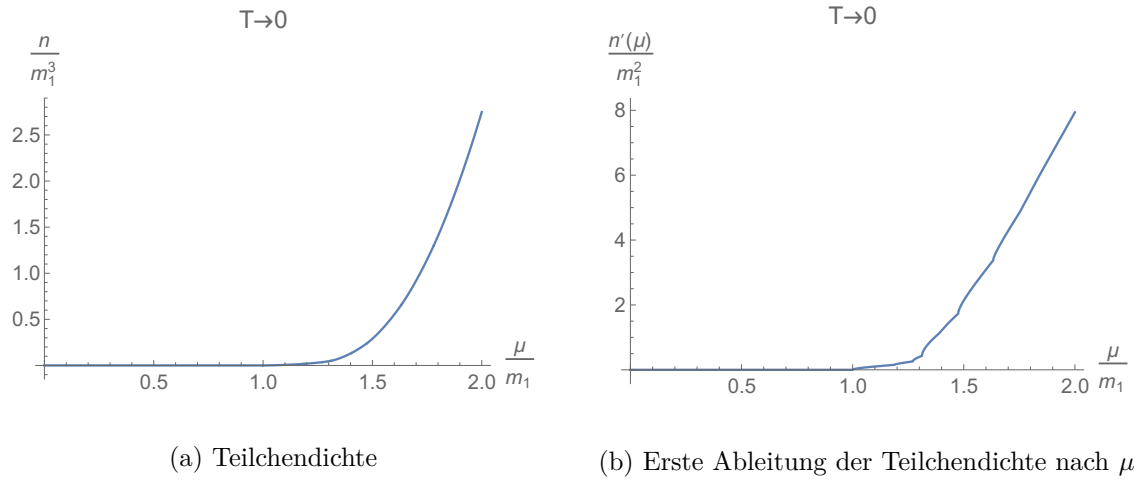


Abbildung A.24.: Teilchendichte für das vollständig entartete Gas nicht-wechselwirkender Hadronen in Tabelle 4.1

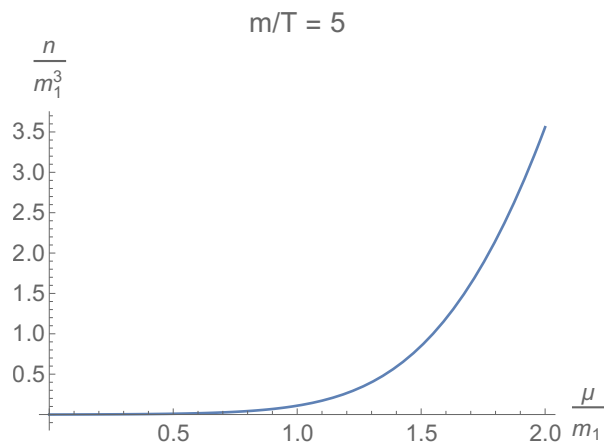


Abbildung A.25.: Teilchendichte für das Gas nicht-wechselwirkender Hadronen in Tabelle 4.1 mit $m/T = 5$

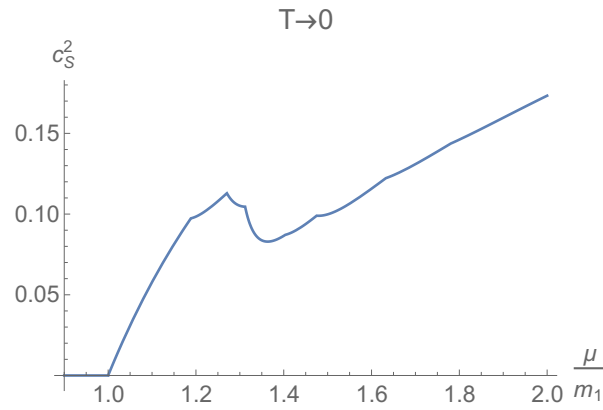


Abbildung A.26.: Schallgeschwindigkeit für das vollständig entartete Gas nicht-wechselwirkender Hadronen in Tabelle 4.1

A.5. Plots für die Datenanalyse

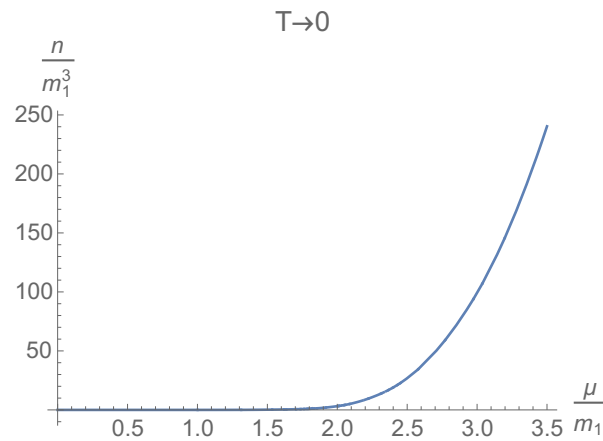


Abbildung A.27.: Teilchendichte für ein vollständig entartetes Gas nicht-wechselwirkender Baryonen nur aus u- und d-Quarks

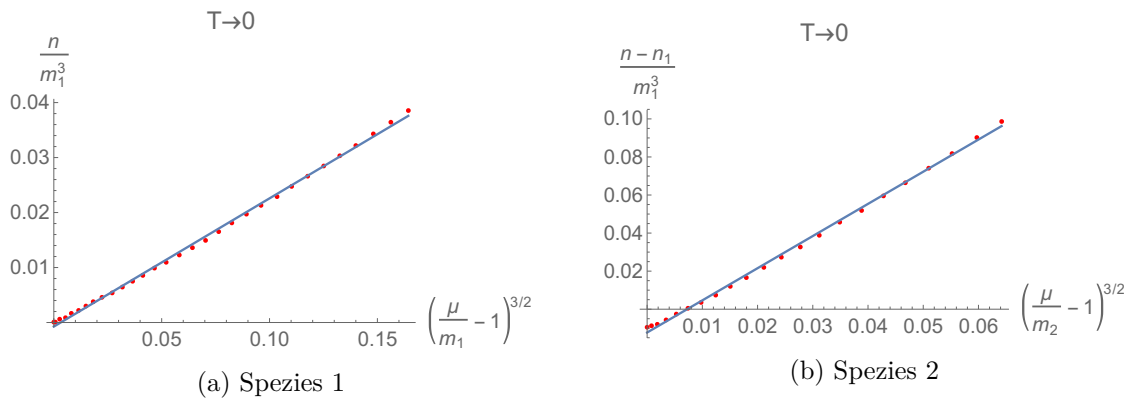


Abbildung A.28.: Fits an die Daten für die Teilchendichte

Literatur

- [1] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 6. Statistische Physik*. 7. Aufl. Bd. 6. Grundkurs: Theoretische Physik / Wolfgang Nolting. Berlin [u. a.]: Springer Spektrum, 2014.
- [2] David Wood. *The Computation of Polylogarithms*. Techn. Ber. 15-92*. University of Kent, Canterbury, UK: University of Kent, Computing Laboratory, Juni 1992, S. 182–196. URL: <http://www.cs.kent.ac.uk/pubs/1992/110>.
- [3] Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford: Oxford University Press, 2013.
- [4] Lev Davidovič Landau und Evgenij M. Lifšic. *Hydrodynamik*. 5., überarb. Aufl. Bd. 6. Lehrbuch der theoretischen Physik / L. D. Landau ; E. M. Lifschitz. Berlin: Akademie Verlag, 1991.
- [5] Stefan Floerchinger und Mauricio Martinez. „Fluid dynamic propagation of initial baryon number perturbations on a Bjorken flow background“. In: *Physical Review C* 92 (6 Dez. 2015), S. 064906. DOI: 10.1103/PhysRevC.92.064906. arXiv: 1507.05569 [nucl-th].
- [6] George N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 2. ed., reprinted. Bd. 382. CAM. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
- [7] Sergei I. Blinnikov, N. V. Dunina-Barkovskaya und Dmitrij K. Nadyozhin. „Equation of State of a Fermi Gas: Approximations for Various Degrees of Relativism and Degeneracy“. In: *Astrophysical Journal Supplement* 106 (Sep. 1996), S. 171–203. DOI: 10.1086/192334.
- [8] Jens Langelage, Mathias Neuman und Owe Philipsen. „Heavy dense QCD and nuclear matter from an effective lattice theory“. In: *Journal of High Energy Physics* 2014.9 (Sep. 2014), S. 131. DOI: 10.1007/JHEP09(2014)131. arXiv: 1403.4162 [hep-lat].
- [9] Masaharu Tanabashi u. a. (Particle Data Group). „Review of Particle Physics“. In: *Physical Review D* 98 (3 Aug. 2018), S. 030001. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001.
- [10] Pasi Huovinen und Péter Petreczky. „QCD equation of state and hadron resonance gas“. In: *Nuclear Physics A* 837 (Juni 2010), S. 26–53. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2010.02.015. arXiv: 0912.2541 [hep-ph].
- [11] Jonas Glesaaen, Mathias Neuman und Owe Philipsen. „Equation of state for cold and dense heavy QCD“. In: *Journal of High Energy Physics* 2016.3 (März 2016), S. 100. DOI: 10.1007/JHEP03(2016)100. arXiv: 1512.05195 [hep-lat].
- [12] Bogdan Povh. *Teilchen und Kerne. Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*. 9. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin [u. a.]: Springer Spektrum, 2014.
- [13] Howard E. Haber und H. Arthur Weldon. „Thermodynamics of an Ultrarelativistic Ideal Bose Gas“. In: *Physical Review Letters* 46 (23 Juni 1981), S. 1497–1500. DOI: 10.1103/PhysRevLett.46.1497.

Abbildungsverzeichnis

Logo Goethe-Uni entnommen von https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Goethe-Logo.svg	1
3.1. Schallgeschwindigkeit für $m \neq 0$	21
4.1. Schallgeschwindigkeit für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$	25
A.1. Teilchendichte für $m = 0$	33
A.2. Druck für $m = 0$	33
A.3. Druck gegen Teilchendichte für $m = 0$	33
A.4. Entropiedichte pro chemischem Potential für $m = 0$	34
A.5. Teilchendichte für $m \neq 0$	34
A.6. Erste Ableitung der Teilchendichte nach μ für $m \neq 0$	34
A.7. Zweite Ableitung der Teilchendichte nach μ für $m \neq 0$	35
A.8. Energiedichte für $m \neq 0$	35
A.9. Druck für $m \neq 0$	35
A.10. Druck gegen Teilchendichte für $m \neq 0$	36
A.11. Druck gegen Teilchendichte für $T \rightarrow 0$ und $\mu \approx m$ für $m \neq 0$	36
A.12. Druck gegen Teilchendichte im nicht-entarteten Limes für $m \neq 0$	37
A.13. Entropiedichte pro chemischem Potential im nicht-entarteten Limes für $m \neq 0$	37
A.14. Entropiedichte pro chemischem Potential für $m \neq 0$	37
A.15. Schallgeschwindigkeit für $m \neq 0$ ohne Antiteilchen	38
A.16. Teilchendichte für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$	38
A.17. Erste Ableitung der Teilchendichte nach μ für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$	39
A.18. Energiedichte für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$	39
A.19. Druck für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$	40
A.20. Druck gegen Teilchendichte im Grenzfall $T \rightarrow 0$ für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 2$	40
A.21. Schallgeschwindigkeit im Grenzfall $T \rightarrow 0$ für das zweikomponentige Gemisch mit $m_2/m_1 = 1,1$	40
A.22. Teilchendichte als Funktion von m_2/m_1 für das zweikomponentige Gemisch mit $\mu/m_1 = 2$	41
A.23. Schallgeschwindigkeit als Funktion von m_2/m_1 für das zweikomponentige Gemisch mit $\mu/m_1 = 2$	41
A.24. Teilchendichte für das vollständig entartete Gas nicht-wechselwirkender Hadronen in Tabelle 4.1	42
A.25. Teilchendichte für das Gas nicht-wechselwirkender Hadronen in Tabelle 4.1 mit $m/T = 5$	42
A.26. Schallgeschwindigkeit für das vollständig entartete Gas nicht-wechselwirkender Hadronen in Tabelle 4.1	43

Abbildungsverzeichnis

A.27. Teilchendichte für ein vollständig entartetes Gas nicht-wechselwirkender Baryonen nur aus u- und d-Quarks	43
A.28. Fits an die Daten für die Teilchendichte	43

Tabellenverzeichnis

4.1. Berücksichtigte Hadronen und deren Eigenschaften [9]	27
---	----

Erklärung nach § 30 (12) Ordnung für den Bachelor- und den Masterstudiengang

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht – auch nicht auszugsweise – für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt, den 10. September 2018

Miguel Salg