

# Ein drei flavor Quark-Meson Modell für kompakte Sterne

- Master Arbeit -

von

ANDREAS ZACCHI

Goethe Universität Frankfurt

Juni 2013

---

Erstbetreuer: **PD Dr. Jürgen Schaffner-Bielich**

Zweitbetreuer: **Prof. Dr. Carsten Greiner**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Das lange Leben eines Sternes . . . . .	4
1.2	Das Ende: Ein Kompakter Stern . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie</b>	<b>6</b>
2.1	Die Grundidee . . . . .	6
2.2	Ko- und Kontravariante Koordinaten . . . . .	8
2.3	Relativistische Elektrodynamik . . . . .	9
2.3.1	Von Feldstärketensor zu Bewegungsgleichung . . . . .	10
2.4	Äquivalenzprinzip . . . . .	15
2.4.1	Physikalische Folgerungen . . . . .	17
2.5	Geodäten . . . . .	18
2.6	Riemann Tensor und Krümmung . . . . .	21
2.6.1	Einsteinsche Feldgleichungen . . . . .	24
2.7	Schwarzschildmetrik . . . . .	25
2.7.1	Christoffelsymbole . . . . .	27
2.7.2	Der Ricci Tensor . . . . .	27
2.7.3	Finale Form . . . . .	28
2.8	Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichungen . . . . .	30
2.8.1	Die Stabilitätsbedingung nach Buchdahl . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Relativistische Wellengleichungen</b>	<b>34</b>
3.1	Euler-Lagrange Gleichung . . . . .	34
3.2	Die Klein-Gordon Gleichung . . . . .	35
3.2.1	Die Proca Gleichung . . . . .	37

3.3	Dirac Gleichung . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Quanten Chromodynamik</b>	<b>40</b>
4.1	Symmetrien . . . . .	41
4.2	Das Noethersche Theorem . . . . .	42
4.3	Symmetriebruch und Goldstone Theorem . . . . .	44
4.3.1	Spontaner Symmetriebruch . . . . .	45
4.3.2	Expliziterer Symmetriebruch . . . . .	48
4.3.3	Chirale Symmetrie . . . . .	49
4.4	Von $SU(2)$ zu $SU(3)$ -Symmetrie . . . . .	52
4.5	QCD-Lagrangian . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Das chirale Quark-Meson Modell mit Bag Konstante</b>	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>Der Lagrangian</b>	<b>62</b>
6.1	Der Lagrangian in mean field approximation . . . . .	62
6.1.1	Berechnung von $\mathcal{L}_e$ . . . . .	63
6.1.2	Berechnung von $\mathcal{L}_{F_{n,s}}$ . . . . .	63
6.1.3	Berechnung von $\mathcal{L}_M$ . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Die Zustandsgleichung</b>	<b>68</b>
7.1	Das großkanonische Potential . . . . .	68
7.1.1	Die Determinante über $\gamma$ . . . . .	72
7.1.2	Die Determinante über den Funktionenraum . . . . .	74
7.1.3	Die Determinanten über den Farb- und flavor-Raum . . . . .	77
7.1.4	Der Beitrag der Elektronen . . . . .	79
7.2	Die Gap-equations . . . . .	79
7.2.1	Temperatur-Approximation $T \rightarrow 0$ . . . . .	81
7.3	Ladungsneutralität . . . . .	84
7.4	Festlegen der Parameter . . . . .	85
7.4.1	Die Stabilitätsbedingung für einen reinen Quarkstern auf Elementarteilchenniveau . . . . .	88

<b>8</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>90</b>
8.1	Ladungsneutralität . . . . .	91
8.2	Variation der Quarkmasse . . . . .	93
8.2.1	Die skalaren Kondensate . . . . .	93
8.2.2	Zustandsgleichung und Masse-Radius Relation . . . . .	97
8.3	Variation der Vektorkopplung . . . . .	100
8.3.1	Die skalaren Kondensate . . . . .	101
8.3.2	Zustandsgleichung und Masse Radius Relation . . . . .	102
8.4	Variation von $m_\sigma$ . . . . .	105
8.4.1	Die skalaren Kondensate . . . . .	106
8.4.2	Zustandsgleichung und Masse Radius Relation . . . . .	108
8.5	Variation der Bag Konstanten . . . . .	110
8.5.1	Zustandsgleichung und Masse Radius Relation . . . . .	111
8.6	Einschränken des Parameterbereiches . . . . .	114
8.6.1	Stabilitätsbedingungen . . . . .	119
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>
<b>10</b>	<b>Danksagung</b>	<b>128</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VII</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>VIII</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>IX</b>

# 1

## Einleitung

Seit 2010 treibt der Pulsar PSR J1614-2230<sup>1</sup> die Spekulationen um mögliche *Quark-Materie* in Neutronensternen<sup>2</sup> an. Er ist mit  $M = 1.97 \pm 0.04M_{\odot}$  das bisher schwerste bisher entdeckte Objekt seiner Art, und obgleich in Artikeln wie [PSR10] rein aus *Quarkmaterie* bestehende Objekte ausgeschlossen werden, so gibt es modellabhängig doch einen möglichen Parameterbereich, der solch exotische Objekte zulässt.

Die Berechnung von Massen und Radien von *kompakten Objekten* setzt die Kenntnis einer *Zustandsgleichung* voraus, welche abhängig vom verwendeten Modell, zu unterschiedlichen Ergebnissen zu führen vermag. Gegenwärtig existiert keine Theorie, welche die verschiedenen Freiheitsgrade, Dichten und Wechselwirkungen gemeinsam zu beschreiben in der Lage ist. Man bedient sich daher der jeweiligen Wechselwirkung zu Grunde liegenden *Symmetrien*, und konstruiert aus ihnen *effektive* theoretische Modelle.

Die fundamentale Symmetrie, welche die Theorie der starken Wechselwirkung (QCD) beschreibt, ist die *SU(3)*-Farb-Symmetrie. Der *nicht-abelsche* Charakter dieser Theorie führt allerdings dazu, dass die Eichfelder selbst *farbgeladene* Objekte sind, die miteinander wechselwirken. Sie vermitteln die starke Wechselwirkung zwischen den *quarks*. Die Kraftwirkung zwischen

---

<sup>1</sup>Ein Pulsar ist ein rotierender Neutronenstern

<sup>2</sup>Objekte, welche einen Kern aus Quarkmaterie haben, nennt man auch *Hybridsterne*

zwei Farbladungen ist immer attraktiv und abhängig von einer vom Abstand<sup>3</sup> abhängigen Kopplungskonstanten  $\alpha(r)$ . Diese Kopplungskonstante ist bei verhältnismäßig großen Abständen groß (Man spricht von: *confinement*) und nimmt bei kleiner werdendem Abstand ab (*asymptotische Freiheit*). In der Natur sind alle gebundenen Zustände farbneutral, etwa Mesonen, welche aus *quark* und *antiquark* bestehen oder Baryonen, die aus drei *quarks* bestehen. Bei hohen Temperaturen und/oder hohen Dichten erwartet man jedoch einen Phasenübergang von *hadronischer* Materie zu einem chiralen symmetrischen *Quark-Gluon-Plasma*, wie es etwa kurz nach dem Urknall existiert haben muss. Ein kompakter Stern vereint extrem viel Masse auf einem relativ kleinen Gebiet, ist also in einem sehr dichten Zustand, welchen man über effektive Modelle theoretisch beschreiben kann. Falls das betreffende kompakte Objekt hybrider Natur ist, so ist nach [SGS00] der Radius typischerweise  $\sim 25\%$  kleiner als bei „gewöhnlichen“ Neutronensternen. Für reine Quarksterne sollte er also weiter schrumpfen.

Das von uns verwendete Modell zur Beschreibung von kompakten Objekten ist das eines modifizierten *Linearen-Sigma Modelles*, welches *spontane* und *explizite* Symmetriebrechung berücksichtigt. Die *spontane* Brechung der chiralen Symmetrie generiert die Massen für eine Reihe von Mesonen und zudem eine masselose Mode, das *Goldstone*-Boson. Ein Goldstone Boson ist beispielsweise das *Pion*, welches seine Masse wiederum durch die Brechung der *expliziten* Symmetrie erhält.

Unsere Modellversion beinhaltet neben der abstoßenden Wechselwirkung durch die Einführung von *Vektorfeldern*, auch das *quark-confinement* durch die Verwendung einer *Bag*-Konstanten, in Analogie zu den MIT-Bag Modellen<sup>4</sup>. Aufbauend auf der Arbeit von [Mal12] erweitern wir durch die Berücksichtigung des *strange*-quarks das dort diskutierte Modell auf SU(3)-flavor-Symmetrie. Primäres Ziel dieser Arbeit ist den Parameterbereich der Existenz möglicher Quarksterne über  $2M_{\odot}$  in eben jenem Modell einzuschränken, so dass Rückschlüsse auf die jeweils erhaltene Zustandsgleichung gezogen werden können.

---

<sup>3</sup>Die starke Wechselwirkung ist sehr kurzreichweitig  $\sim 10^{-15}\text{m} = 1\text{fm}$ , etwa so groß wie ein Nukleon

<sup>4</sup>Ein anderes populäres Modell ist das NJL-Modell, welches beispielsweise in [NJL99] beschrieben wird

Zunächst stellen wir im Folgenden die für diese Arbeit benötigten Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie dar, um dann nach den dort behandelten *kosmischen* Größen, *subatomare* Teilchen über die Theorie der Quanten-Chromo-Dynamik (QCD) beschreiben zu können. Im Folgenden wird unser verwendetes Modell detailliert vorgestellt, nach ausführlichen Rechnungen die erhaltenen Resultate präsentiert, sowie mögliche Ausblicke diskutiert.

## 1.1 Das lange Leben eines Sternes

Gewöhnliche Sterne, zu der auch unsere Sonne zählt, verbrennen in der Regel in einem bis zu Milliarden Jahre andauernden Leben Wasserstoff zu Helium und setzen dabei ungeheure Mengen an Energie frei.

Ist einmal der Brennstoffvorrat an Wasserstoff aufgebraucht, hängt es nunmehr von der Anfangsmasse ab, wie sich der Stern im Weiteren entwickelt. Sterne, wie etwa unsere Sonne, werden noch Helium zu nächstgrößeren Elementen, wie etwa *Kohlenstoff*, *Stickstoff* oder *Sauerstoff* verbrennen und sich dabei auf das hundertfache aufblähen<sup>5</sup>.

Liegt die Anfangsmasse  $M_A$  jedoch unter  $M_A \leq 8M_\odot$  kommt der Stern nicht über das Kohlenstoffbrennen hinaus<sup>6</sup>. Der Stern bläst seine Hüllen als *planetarischen Nebel* ins interstellare Medium und der verbliebene so genannte *weisse Zwerg* kühlt langsam aus. Er stabilisiert sich über das Pauli-Prinzip durch *entartete* Elektronen gegen die Gravitation, die ihn eigentlich weiter zu komprimieren versucht. Weisse Zwerge erreichen Dichten von  $\approx 10^6 \frac{g}{cm^3}$  bei Radii zwischen 6000-10.000 km. Sie sind damit zwar relativ **kompakt**, allerdings noch weit davon entfernt, für relativistische Physik von Bedeutung zu sein, geschweige denn in ihre elementarsten Bausteine, die *quarks*, zu zerfallen.

Ist die Masse des Sternes größer als  $8M_\odot$ , dann setzt nach dem Heliumbrennen das Kohlenstoffbrennen ein und nächst größere Elemente entstehen in immer kürzer werdenden Zeitabständen.

So führt sich dieser Prozess in Abhängigkeit der verbliebenen Masse<sup>7</sup> fort, jedoch einmal bei Eisen angelangt, wird bei der Fusion zweier Nukleonen keine Energie mehr gewonnen, so dass der Stern in sich kollabiert und als *Supernova* vom *Typ II* explodiert.

Ein Stern, dessen Leben derart gewaltsam endet, hat in der Regel nur einige Millionen Jahre gelebt, da auf Grund der hohen Anfangsmasse alle Kernprozesse bedeutend schneller abgelaufen sind.

---

<sup>5</sup>Das Stadium eines Roten Riesen

<sup>6</sup>Die Sonnenmasse  $M_\odot$  ist etwa  $2 \cdot 10^{33}g$

<sup>7</sup>Durch Sternenwinde können jedoch auch erhebliche Masseverluste entstehen



Der Supernova-Remnant des Sternes besteht aus *entarteten* Neutronen, die den entstandenen **kompakten Stern**, wieder über das Pauli-Prinzip, gegen weiteres Kollabieren stabilisieren.

## 1.2 Das Ende: Ein Kompakter Stern

Während bei Sternen wie etwa der Sonne der Radius im Bereich von einigen hunderttausend Kilometern liegt<sup>8</sup>, haben *kompakte Sterne*<sup>9</sup>, sprich **Neutronensterne** und die in dieser Arbeit untersuchten noch dichteren **Quarksterne** Radii von 10-20 km bei 1-2 Sonnenmassen. Die entsprechende Dichte solcher Objekte liegt demnach bei etwa  $\rho \approx 10^{14} \frac{g}{cm^3}$ , sprich Kerndichte und mehr. In solchen Dichtebereichen *überlappen* die Nukleonen und man muss zur Beschreibung solcher exotischer Materiezustände auf effektive theoretische Modelle zurückgreifen[KSt99].

*Kompakte Objekte* sind daher nicht nur Laboratorien für **Kern- und Teilchenphysik** sondern auch für die **allgemeine Relativitätstheorie**.

War der Stern weit über acht Sonnenmassen schwer, entsteht ein **schwarzes Loch**. Bei einem solchen Objekt vermag selbst das Pauli-Prinzip nichts mehr gegen die Gravitation auszurichten, der einstige Stern kollabiert auf ein Objekt ohne räumliche Ausdehnung. Ein schwarzes Loch macht sich nur über seine unheimliche Anziehungskraft bemerkbar, dem nicht einmal Licht zu entkommen vermag.

---

<sup>8</sup>Der Radius der Sonne ist etwa  $7 \cdot 10^8 m$

<sup>9</sup>Man sollte eigentlich von *kompakten Objekten* sprechen, zu jenen in dieser Arbeit die weissen Zwerge jedoch nicht gezählt werden

# 2

## Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie

### 2.1 Die Grundidee

Die *allgemeine Relativitätstheorie* (im folgenden: ART) wurde 1916 von Albert Einstein (Abbildung (2.1)) publiziert. Die *ART* ist eine klassische Theorie der Gravitation. In der Newtonschen Form ist eine formell richtige Beschreibung einer Gravitationstheorie nicht möglich, da die Wechselwirkung

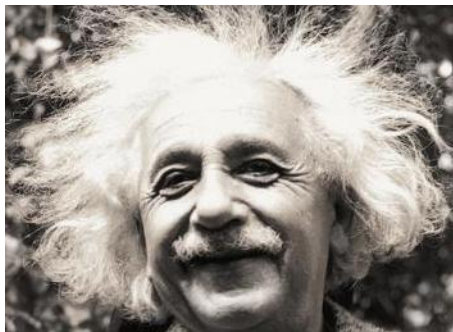


Abbildung 2.1: *Albert Einstein* (aus [LKr10])

instantan, gleichgültig der Entfernung, beschrieben wird. Dort ist die Lichtgeschwindigkeit  $c=\infty$ , bzw. jegliche Information überträgt sich ohne Zeitverzug. Die Newtonsche Gravitationstheorie ist somit ein Spezialfall einer viel allgemeineren Theorie.

Die ART beschreibt die Krümmung der physikalischen Raumzeit, die durch die Masse, und auch durch den Energiegehalt eines Körpers (denn  $E = mc^2$ ) hervorgerufen wird, als Ursache für eine Kraftwirkung zwischen zwei Körpern. Eine Bewegung erfolgt entlang so genannter Geodäten, der kürzesten Verbindung zwischen zwei Raumzeitpunkten. Zunächst würde man vermuten, dass sie sich, wie andere Kräfte auch, durch die *spezielle Relativitätstheorie* (im folgenden SRT) beschreiben lässt. Wir werden im Laufe dieses Kapitels verstehen, daß die SRT jedoch ebenfalls ein *spezieller* Fall einer viel *allgemeineren* Theorie ist.

Bei der Arbeit mit *kompakten Objekten* mit Radii von 10-20 Kilometern und einer Masse von  $\approx 1.5M_{\odot}$  müssen die Effekte der ART berücksichtigt werden, denn nähert man sich dem Schwarzschildradius<sup>1</sup>,

$$r_s = \frac{2\gamma M}{c^2} \approx \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 3km \quad (2.1)$$

wobei  $\gamma$  die Gravitationskonstante ( $\approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$ ), M die Masse des Objektes und c die Lichtgeschwindigkeit  $299.792,458 \frac{m}{s}$  ist, kann man die dortige *Raumzeitkrümmung* nicht mehr vernachlässigen und nur die relativistischen *Einstein-Gleichungen* beschreiben das Objekt adäquat, ausführlicher in Abschnitt (2.7.3) beschrieben<sup>2</sup>.

Bevor wir das verstehen, betrachten wir die Behandlung der Elektrodynamik in der *SRT*, einmal, um eine Vorlage zu haben, zum anderen, um die spezielle Notation mit 4-Vektoren einzuführen.

Über das Äquivalenzprinzip gelangen wir dann zunächst zur Geodätengleichung, um anhand des Beispiels der *Schwarzschildlösung* die Einstein-Gleichungen und die für diese Arbeit wichtigen *Tolman-Oppenheimer-Volkoff*-Gleichungen

<sup>1</sup>Ausführlichere Beschreibung in Abschnitt (2.7)

<sup>2</sup>Gleichung (2.1) wäre der Schwarzschildradius der Sonne. Würde man die Sonnenmasse in einer Kugel mit Radius 3km vorfinden, würde von diesem Objekt nicht mal Licht entkommen: Ein **schwarzes Loch**

(im folgenden: TOV-Gleichungen) zu lösen.

Auf die Herleitung der Schwarzschildmetrik wird in besonderem Maße eingegangen, da unsere Lösungen für einen statischen, sphärisch-symmetrischen Stern gerade durch jene Metrik beschrieben werden.

## 2.2 Ko- und Kontravariante Koordinaten

Im folgenden Kapitel soll der Umgang und die Notwendigkeit von ko- und kontravarianten Koordinaten für das Konzept der ART dargestellt werden. Angemerkt sei, daß in der SRT (und auch in der ART) griechische Indizes von  $0 \rightarrow 3$  laufen, da sie ja in vier Dimensionen agieren. Die nullte Komponente ist die hierbei die der Zeit, die anderen Komponenten entsprechen den räumlichen. Aus der SRT ist bekannt, daß der hier benutzte Formalismus zunächst für *schiefwinklige* Koordinatensysteme entwickelt wurde. Da die ART die Raumzeit als *gekrümmte* Mannigfaltigkeit auffasst, kann man die Wichtigkeit dieses Formalismus bereits erahnen.

Man stellt sich die Raumzeit als einen abstrakten vierdimensionalen Raum vor. Der Ortsvektor ist von folgender Gestalt  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , also ist  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Die Koordinate  $x^0 = ct$  beschreibt dabei den Koordinatenzeitpunkt in der Dimension eines Ortes, um mit den drei anderen kartesischen Komponenten des Vektors die gleiche Dimension zu haben. Ein Skalarprodukt kann man in 4-Notation wie folgt schreiben:

$$a \cdot b = \sum_{\mu, \nu=0}^3 a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu \left( \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} b^\nu \right) = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu \quad (2.2)$$

oder auch:

$$a \cdot b = \sum_{\mu, \nu=0}^3 a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = \sum_{\nu=0}^3 b^\nu \left( \sum_{\mu=0}^3 a^\mu g_{\mu\nu} \right) = \sum_{\nu=0}^3 b^\nu a_\nu \quad (2.3)$$

wobei  $g_{\mu\nu}$  der metrische Tensor<sup>3</sup> der SRT ist:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Das Betragsquadrat eines Vektors  $\mathbf{a}$  schreibt sich dann:

$$|a|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \sum_{\mu,\nu=0}^3 a^\mu g_{\mu\nu} a^\nu = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu a_\mu = a^\mu a_\mu \quad (2.5)$$

$$\sum_{\mu=0}^3 a^\mu a_\mu = a^\mu a_\mu. \quad (2.6)$$

In Gleichung (2.5) wurde von der *Einsteinschen Summenkonvention* (2.6) Gebrauch gemacht, die im folgenden, es sei denn, anderes wird gesagt, Verwendung finden wird.

## 2.3 Relativistische Elektrodynamik

In der Minkowski Geometrie gilt sowohl

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0 \quad (2.7)$$

als auch

$$c^2 dt^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 = 0 \quad (2.8)$$

Das Relativitätsprinzip besagt also, dass das infinitesimale Längenelement  $ds^2$  invariant ist, sprich:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.9)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.10)$$

---

<sup>3</sup>Auch Minkowski-Metrik genannt

Dies sieht ähnlich aus wie eine Drehung, die die Länge und die Winkel invariant läßt. Drehinvariante Gesetze lassen sich vektoriell schreiben, beispielsweise das Newtonsche Kraftgesetz, Gleichung (2.11), oder auch die Zentrifugalkraft, Gleichung (2.12).

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.11)$$

$$\vec{F} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.12)$$

### 2.3.1 Von Feldstärketensor zu Bewegungsgleichung

Die bloße Verwendung von 4-Vektoren ist natürlich kaum ausreichend, um Naturgesetze adäquat zu beschreiben. In der relativistisch-kovarianten Formulierung solcher Gesetze verhalten sich die linke und die rechte Seite von Gleichungen wie Lorentz-Tensoren. Die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik, die Maxwell-Gleichungen, leitet man über die Lagrangedichte<sup>4</sup> mittels ihrer partiellen Ableitungen (Gleichung(2.13)) ab. Die Lagrangedichte wird in Abschnitt (3.1) ausführlich dargestellt werden.

$$\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Die Felder der Elektrodynamik werden durch das 4-Potential ( $A^\mu$ ) beschrieben.

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Dabei ist die nullte Komponente das *skalare*- und die räumlichen Komponenten das *vektorielle* Potential.

Der Feldstärketensor bildet sich nun mit dem 4-Potential (2.14) zu:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.15)$$

---

<sup>4</sup>Joseph-Louis Lagrange, italienischer Mathematiker, geb.: 1736, gest.: 1813

Der Feldstärketensor ist ein Lorentz-Tensor zweiter Stufe und vollständig antisymmetrisch. Daher läßt er sich auch als  $4 \times 4$ -Matrix schreiben:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E^x & -\frac{1}{c}E^y & -\frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{1}{c}E^y & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Die kovariante Form des Tensors ergibt sich mit Hilfe zweier metrischer Tensoren (2.4) zu,

$$F_{\mu\nu} = g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}F^{\alpha\beta} \quad (2.17)$$

oder als Matrix:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E^x & \frac{1}{c}E^y & \frac{1}{c}E^z \\ -\frac{1}{c}E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -\frac{1}{c}E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -\frac{1}{c}E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Führt man einen Lorentz-boost (Gleichung (2.19)) in z-Richtung

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu}\Lambda_{\beta}^{\nu}F^{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

mit

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

aus, stellt man fest, dass sich die longitudinalen Komponenten zur boost-Richtung nicht ändern. Die transversalen Komponenten aber ändern sich. Lorentz-Transformationen mischen elektrisches- und magnetisches Feld. Ein rein elektrisches Feld ist im geboosteten System eine Linearkombination aus elektrischem- und magnetischem Feld:

$$\tilde{E}^x = \gamma(E^x - vB^y) \quad \tilde{B}^x = \gamma(B^x + \frac{v}{c^2}E^y) \quad (2.21)$$

$$\tilde{E}^y = \gamma(E^y - vB^x) \quad \tilde{B}^y = \gamma(B^y + \frac{v}{c^2}E^x) \quad (2.22)$$

$$\tilde{E}^z = E^z \quad \tilde{B}^z = B^z \quad (2.23)$$

Die dynamischen Felder der Elektrodynamik sind die Komponenten des 4-Potentials. Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, muss man die Euler-Lagrange Gleichungen (2.24) lösen, wobei das Feld  $\phi$  hier das 4-Potential ist. Die **Euler-Lagrange**-Gleichung wird in Abschnitt (3.1) ausführlich beschrieben.

$$-\frac{\partial(\mathcal{L}_{edyn.})}{\partial(\phi)} + \partial_{\mu} \left( \frac{\partial(\mathcal{L}_{edyn.})}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) = 0 \quad (2.24)$$

wobei  $\mathcal{L}_{edyn.}$  die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik ist:

$$\mathcal{L}_{edyn.} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_{\mu} A^{\mu} \quad (2.25)$$



und  $j_\mu$  die 4-Stromdichte  $(j_\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$  bezeichnet.

$$0 = -\frac{\partial(\mathcal{L}_{edyn.})}{\partial(A_\nu)} + \partial_\mu \left( \frac{\partial(\mathcal{L}_{edyn.})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \quad (2.26)$$

Betrachtet werden soll zunächst nur  $\left( \frac{\partial(\mathcal{L}_{edyn.})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right)$ :

$$\frac{\partial(\mathcal{L}_{edyn.})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

Mit dem metrischen Tensor (2.4) ziehen wir die Indizes des einen Tensors herunter:

$$= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \quad (2.28)$$

Produktregel der Ableitung:

$$= -\frac{1}{4\mu_0} \left( \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} \quad (2.29)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.15) ersetzen wir den Tensor  $F_{\alpha\beta}$ .

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = g_\alpha^\mu g_\beta^\nu - g_\beta^\mu g_\alpha^\nu \quad (2.30)$$

Analog natürlich auch  $F_{\gamma\delta}$ . Damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{L}_{edyn.})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4\mu_0} ((g_\alpha^\mu g_\beta^\nu - g_\beta^\mu g_\alpha^\nu) F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta} (g_\gamma^\mu g_\delta^\nu - g_\delta^\mu g_\gamma^\nu)) g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} ((g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} - g^{\mu\delta} g^{\nu\gamma}) F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha})) \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.31)$$

In Gleichung (2.31) wurde die Antisymmetrie  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  des Tensors ausgenutzt, besonders deutlich erkennbar, wenn man ihn sich in Matrixform (2.16) ansieht. Der zunächst vernachlässigte Teil hängt nur von den Feldern, nicht von den Ableitungen, ab:

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{edyn.}}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu} (j_\alpha g^{\alpha\beta} A_\beta) = j_\alpha g^{\alpha\beta} g_\beta^\nu = j^\nu \quad (2.32)$$

Setzt man nun (2.31) und (2.32) in Gleichung (2.26) ein, erhält man:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (2.33)$$

Das  $\partial_\mu$  hatten wir am Anfang nicht berücksichtigt. Nun taucht es wieder auf. Diese vier gekoppelten Differenzialgleichungen sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen für das 4-Potential. Aus ihnen leiten sich zwei der bekannten Maxwell-Gleichungen für das elektrische Feld  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  und die magnetische Induktion  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ab.

Den dualen Feldstärketensor konstruiert man über  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , der ein 4-dimensionales Analogon zum Levi-Civita-Tensor  $\epsilon^{ijk}$  darstellt.

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (2.34)$$

In Matrixschreibweise:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & \frac{1}{c} E^z & -\frac{1}{c} E^y \\ B^y & -\frac{1}{c} E^z & 0 & \frac{1}{c} E^x \\ B^z & \frac{1}{c} E^y & -\frac{1}{c} E^x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Der duale Feldstärketensor erfüllt die Jacobi-Identität:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.36)$$

Da man meist ausschließlich an einer Lösung für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  interessiert ist, und die beiden Vektorfelder 6 unabhängige Komponenten (in drei Dimensionen) besitzen, reicht Gleichung (2.33) allein nicht aus. Man definiert den Satz der homogenen Maxwell-Gleichungen über den dualen Feldstärketensor und der Jacobi-Identität (2.36). Mit (2.36) erhält man die beiden anderen Maxwell-Gleichungen  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  [Ris10].

Der Übergang von Elektrostatik zur Elektrodynamik in relativistischer 4-Schreibweise kann nun, nicht nur formell, verglichen werden mit der relativistischen Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitationstheorie.

## 2.4 Äquivalenzprinzip

Was ist der genaue Zusammenhang zwischen Gravitation und Beschleunigung? Schließt man etwa Effekte wie die Luftreibung aus, so beschleunigen alle (von beispielsweise einem Turm fallengelassene) Gegenstände mit dem gleichen Betrag Richtung Erdoberfläche. Das ist seit Galilei bekannt:

Objekte bewegen sich in einem Gravitationsfeld unabhängig von ihrer Beschaffenheit. Ausschlaggebend für die weitere Bewegung sind nur die Anfangsbedingungen. Dies beinhaltet die Gleichheit von träger<sup>5</sup> und schwerer<sup>6</sup> Masse.

Stellen wir uns vor, wir sind in einem Fahrstuhl, der also ein für sich geschlossenes System darstellt, der in irgendeinem (homogenen) Gravitationsfeld (approximativ z.B.: der Erde) ruht. In diesem lassen wir einen Hammer und eine Feder fallen, gerade dann, wenn die Halteseile des Fahrstuhles durchtrennt werden. Der Lift würde also mit gleichem Betrag und gleicher Richtung wie die beiden fallengelassenen Objekte beschleunigen. Die relativen Positionen der beiden Objekte ändern sich nicht. Für den Beobachter im Fahrstuhl scheint es, als sei die Gravitation *abgeschaltet*.

Genaugut könnte man aber durch Beschleunigen ein Gravitationsfeld simulieren. Würde ein, wie auch immer betriebener, am Fahrstuhl angebrachter, Not-Antrieb im Falle eines Reißens der Seile anspringen, würden alle Objekte

---

<sup>5</sup>Träge Masse: Diejenige Masse, die sich der Beschleunigung „widersetzt“

<sup>6</sup>Schwere Masse: Diejenige Masse, an die die Gravitation koppelt

im Fahrstuhl zu Boden gepresst. Man selbst hätte wieder (bei gleichem Betrage) sein ursprüngliches Gewicht und die Feder und der Hammer würden zu Boden fallen.

Wenn man sich also in einem abgeschlossenen Referenzsystem befindet, kann nicht zwischen Gravitation und Beschleunigung unterschieden werden - sie sind **äquivalent**. Abbildung (2.2) veranschaulicht diesen Gedanken.

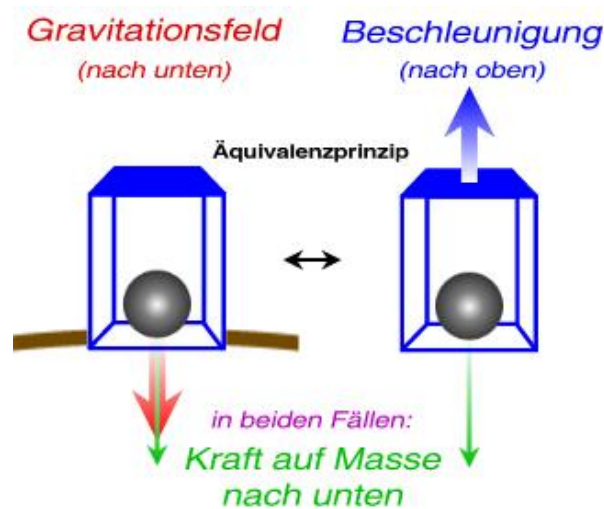


Abbildung 2.2: Mechanische Vorgänge in Gravitationsfeld und in gleichförmig beschleunigtem Bezugssystem [AsM11])

Einen weiteren Gedanken muss man allerdings noch berücksichtigen: Würde der Beobachter im Fahrstuhl die beiden Objekte Hammer und Feder, sagen wir zwei Armlängen voneinander entfernt, aus gleicher Höhe fallen lassen, würden beide Richtung Mittelpunkt der attraktiven Kraft (der Gravitation - zum Mittelpunkt der Erde z.B.) beschleunigen. Würde der Fahrstuhl mit gleichem Betrag und Richtung durch einen Antrieb beschleunigen, gäbe es keinen Mittelpunkt, sondern die Objekte würden lotrecht auf den Boden der Kabine beschleunigen, verdeutlicht durch Abbildung (2.3).

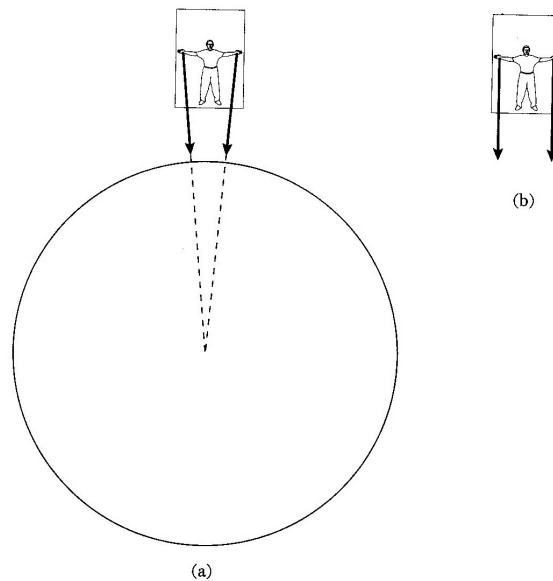


Abbildung 2.3: Die Wegstrecken der beiden Objekte unter Gravitation ((a):links) und Beschleunigung ((b):rechts) aus ([Sta08])

Genau genommen kann das *Äquivalenzprinzip* also nur in lokal definierten Bereichen Anspruch auf Geltung haben. Die Äquivalenz von schwerer und träger Masse nennt man auch *schwaches Äquivalenzprinzip*. Es bedeutet, daß mechanische Vorgänge unter Schwerkraft und in einem geradlinig, konstant beschleunigten Bezugssystem gleich verlaufen. Einstein ging nun davon aus, daß das auch für beliebige, nicht nur mechanische Vorgänge, gelten müsse („...der glücklichste Gedanke meines Lebens...“).

Dieses *starke Äquivalenzprinzip* diente Einstein als Ausgangspunkt seiner weiteren Überlegungen.

### 2.4.1 Physikalische Folgerungen

Bereits aus dem Äquivalenzprinzip lassen sich, praktisch ohne Mathematik, weitreichende Schlüsse ziehen. Geht man zunächst von einem homogenen Schwerefeld aus, würde z.B.:

- i.) Licht in einem Gravitationsfeld abgelenkt werden

- ii.) von einem schweren Objekt ausgesandtes Licht rotverschoben sein
- iii.) bei rotverschobenem Licht die Frequenz verschoben sein

Diese Folgerungen sind unabhängig von der *speziellen Relativitätstheorie*. Im Prinzip ist Einsteins Gedanke von einem ruhenden System mit Schwerkraft auf ein gleichförmig beschleunigtes System ohne Schwerkraft übertragbar. Bei inhomogenen Schwerefeldern kann man kein lokales Inertialsystem mehr definieren. Man hat immer Gezeitenkräfte. Man denke an eine Raumstation: Die äußere Bahn ist langsamer als die Innere. Ersichtlich aus  $v = \frac{r}{t}$  oder  $v = \omega \cdot r$ .

## 2.5 Geodäten

Die Äquivalenz von schwerer und träger Masse legt nun nahe, daß die Schwerkraft eine Scheinkraft ist. Deren Kennzeichen ist es ja, daß alle Gegenstände die gleiche Beschleunigung erfahren. Das ist nun aber insofern merkwürdig, als es ja einen offensichtlichen *Verursacher*, in Form von Masse, gibt. Die Lösung wird sein, daß die Massen - statt Kräfte auszuüben - die Geometrie des Raumes (genauer: der Raumzeit) verändern. Teilchen bewegen sich kräftefrei auf den geradesten Linien, den **Geodäten**. Abbildung (2.4) verdeutlicht, dass (im einfachen Fall einer Kugel) die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf gekrümmten Flächen keine Gerade mehr ist, sondern eben eine Geodäte.

Wichtig: Das gilt für die abstrakte *Raumzeit*, nicht nur für den Raum alleine.

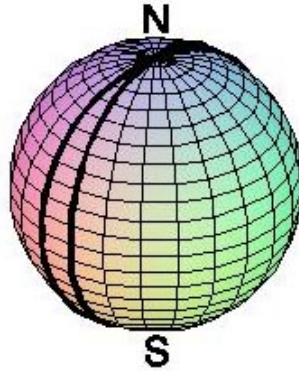


Abbildung 2.4: Geodäte: Kürzeste Verbindung auf einer gekrümmten Fläche (aus [Sci01])

Die Gleichungen der *allgemeinen Relativitätstheorie* müssen also der Form

$$\text{Masseverteilung} = \text{Krümmung (Geometrie)}.$$

sein.

Nach Newton wäre mit  $x = vt$  und  $z(x) = -\frac{gt^2}{2}$ , anschliessendem Eliminieren von  $t$

$$z(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} \quad (2.37)$$

nach zweimaligem Differenzieren dann

$$\ddot{z}(x) = -\frac{g}{v^2} \quad (2.38)$$

Das Gravitation der Krümmung entspricht geht also klassisch gar nicht, da die Trajektorie abhängig von den Anfangsbedingungen des Gegenstandes, seiner Geschwindigkeit  $v$ , wäre.

Ersetzt man nun  $v \rightarrow c$  und berechnet den Krümmungsradius (entspricht dem Kehrwert der Krümmung) der Erde, ergibt sich, bei angenommenen konstanten  $g \approx 10 \frac{m}{s^2} \rightarrow r \approx 9 \cdot 10^{15} m$ , also nahezu ein Lichtjahr. Man möge niemandem vorwerfen, dies nicht aus Experimenten o.ä. bestimmt haben zu können. Im Allgemeinen spürt man eine derartige Krümmung der

Raumzeit nicht. Bei Objekten allerdings, die sehr viel Masse auf kleinem Raum konzentrieren, etwa Neutronensternen mit  $\rho \approx 10^{14} \frac{g}{cm^3}$  ist der Wert nicht vernachlässigbar (zum Vergleich: Erde  $\rho \approx 5 \frac{g}{cm^3}$ ). Dort herrschen Gravitationsbeschleunigungen von  $\approx 10^{12} \frac{m}{s^2}$ , oder entsprechend viel kleineren Krümmungsradien.

Umgekehrt kann man nun alle Scheinkräfte auch als Gravitationskräfte auffassen, d.h. einzig durch die Gegenwart einer anderen Masse bedingt. Diese Vorstellung geht auf Ernst Mach zurück [Mar88].

Rechnet man jedoch relativistisch, erhält man mit Hilfe des infinitesimalen Längenelementes (Gleichung (2.10)) und einem beliebigen 4-Vektor  $\xi^A$  nach zweimaligem Differenzieren

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^A = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^A = \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^A = \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\mu} \left[ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^A} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \right] = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^A = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^A} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (2.42)$$

Die Matrix  $\frac{\partial \xi^A}{\partial x^\mu}$  beschreibt die Transformation von Inertialsystem zu beschleunigtem Bezugssystem, kann also nicht Null werden. Daher muss der Ausdruck in der Klammer Null werden. Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^A} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi^A}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \quad (2.43)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \ddot{x}^\mu \quad (2.44)$$

$$\frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \quad (2.45)$$

erhält man letztlich

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0 \quad (2.46)$$



Das ist die so genannte *Geodätengleichung*, in welcher die Christoffelsymbole  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  das erste Mal zum Vorschein kommen. Diese entsprechen nun gerade dieser Scheinkraft bei beschleunigten Bezugssystemen und beschreiben physikalisch die Änderung des Tangentenvektors entlang einer Geodäte [Bla12]. Auch das der Geschwindigkeitsterm quadratisch ist, ist Eigenschaft einer Scheinkraft, z.B. der Zentrifugalkraft (Gleichung (2.12)).

## 2.6 Riemann Tensor und Krümmung

Um zu den Einstein'schen Feldgleichungen zu gelangen, muss man wissen, wie in der ART *Krümmung* definiert ist. Nämlich über einen Lorentz-Tensor 4. Stufe.

Der Riemannsche Krümmungstensor ist mit das schwierigste zu berechnende Objekt der ART. Daher soll ein zweidimensionales Beispiel, die Krümmung der Kugeloberfläche mit konstantem Radius  $\mathbf{a}$ , zur Veranschaulichung dienen. Zunächst berechnet man die Christoffelsymbole, wobei die Metrik durch das Linienelement  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$  gegeben ist.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \iff g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Die Christoffelsymbole sind die Ableitungen der Metrik,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta} \quad (2.49)$$

dabei ist

$$\left( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) = \Gamma_{\nu\alpha\beta} \quad (2.50)$$

wobei mitunter auch folgende Komma-Notation existiert.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (2.51)$$

Zunächst diejenigen, die keinen Beitrag leisten:

$$\Gamma_{\theta\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta\phi} = \Gamma_{\theta\phi\theta} = \Gamma_{\phi\theta\theta} = \Gamma_{\phi\phi\phi} = 0$$

Die anderen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi\phi} &= -\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^{\theta}} = -2a^2 \sin \theta \cos \theta \\ \rightarrow \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\phi\phi} = -\frac{2a^2}{2a^2} \sin \theta \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

sowie<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi\theta} \rightarrow \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi\theta} = \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^{\theta}} = \frac{2a^2 \overline{\sin \theta} \cos \theta}{2a^2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \\ \Gamma_{\phi\theta\phi} \rightarrow \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\theta\phi} = \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^{\theta}} = \frac{2a^2 \overline{\sin \theta} \cos \theta}{2a^2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

Der **Riemanntensor**, für dessen ausführliche Herleitung an [Bla12], [Mar88] oder auch [Fli33] verwiesen wird, ist definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \right) \\ &+ g_{\rho\sigma} (\Gamma_{\gamma\alpha}^{\rho} \Gamma_{\beta\delta}^{\sigma} - \Gamma_{\delta\alpha}^{\rho} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Da der Riemanntensor glücklicherweise einiges an Symmetrie aufweist, und in zwei Dimensionen nur eine unabhängige Komponente vorweist, genügt es für die Berechnung der Krümmung einer Kugeloberfläche beispielsweise  $\mathcal{R}_{\theta\phi\theta\phi}$  zu betrachten.

<sup>7</sup>Die Christoffelsymbole sind in den beiden unteren Indizes symmetrisch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\theta\phi\theta\phi} &= \left( \frac{\cancel{\partial^2 g_{\theta\theta}}}{\cancel{\partial x^\phi \partial x^\phi}} + \frac{\partial^2 g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta \partial x^\theta} - \frac{\cancel{\partial^2 g_{\phi\theta}}}{\cancel{\partial x^\theta \partial x^\phi}} - \frac{\cancel{\partial^2 g_{\theta\phi}}}{\cancel{\partial x^\phi \partial x^\theta}} \right) \\ &+ g_{\rho\sigma} (\cancel{\Gamma_{\theta\theta}^\rho \Gamma_{\phi\phi}^\sigma} - \Gamma_{\phi\theta}^\rho \Gamma_{\phi\theta}^\sigma) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Übrig bleibt nach zweimaligem Differenzieren von  $g_{\phi\phi}$  nach  $\theta$ :

$$\mathcal{R}_{\theta\phi\theta\phi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta \partial x^\theta} - g_{\phi\phi} \cot \theta \right)^2 \quad (2.54)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - a^2 \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \quad (2.55)$$

$$= a^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta \quad (2.56)$$

$$= -a^2 \sin^2 \theta \quad (2.57)$$

Folgende Kontraktionen von  $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  sind ebenfalls Tensoren:

$$g^{\alpha\gamma} \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{R}_{\beta\delta} \quad (2.58)$$

ist der sogenannte *Ricci*-Tensor und

$$g^{\beta\delta} \mathcal{R}_{\beta\delta} = \mathcal{R} \quad (2.59)$$

ist auch bekannt als *Krümmungsskalar*.

Mit Hilfe der Symmetrien des vierstufigen Krümmungstensors und einer Kontraktion hin zum Ricci-Tensor ergibt sich:

$$\mathcal{R}_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} \mathcal{R}_{\gamma\beta\alpha\delta} = g_{\beta\delta} \frac{\mathcal{R}_{\theta\phi\theta\phi}}{\det g_{\beta\alpha}} \quad (2.60)$$

Daraus erhält man schließlich den Krümmungsskalar einer Kugeloberfläche zu:

$$\mathcal{R} = \frac{2\mathcal{R}_{\theta\phi\theta\phi}}{\det g_{\mu\nu}} = -\frac{2a^2 \sin^2 \theta}{a^4 \sin^2 \theta} = -\frac{2}{a^2} \quad (2.61)$$

Die Krümmung einer zweidimensionalen Fläche im dreidimensionalen kann durch zwei Krümmungsradien beschrieben werden [Fli33]. Diese legen die *äußere* und die *innere* Krümmung fest. Beispielsweise kann eine Gerade (eindimensional) in einem höherdimensionalen „Raum“ verbogen werden, jedoch ändern sich auf ihr die Abstände nicht, die *äußere* Krümmung spielt also keine Rolle. In diesem Fall spricht man dann von *innerer* Krümmung.

In einem kartesischen Koordinatensystem ist  $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ . Aufgrund der Tensoreigenschaft gilt dies für beliebige Koordinaten. Überall, wo  $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$  gilt, ist der jeweilige betrachtete „Raum“ nicht gekrümmt. Ein  $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$  bedeutet im Umkehrschluß die Nichtexistenz eines kartesischen Koordinatensystemes.

### 2.6.1 Einsteinsche Feldgleichungen

Die *Einsteinschen Feldgleichungen* (2.62) lassen sich über die Metrik  $g_{\mu\nu}$  (in der Rolle des Potentials), den Christoffelsymbolen (in der Rolle der Scheinkraft) und dem Ricci-Tensor  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ , welcher die Krümmung berücksichtigt und selbst aus den Ableitungen der Christoffelsymbole besteht, herleiten. Ausführlich beispielsweise in [Sed11], [Mar88], [Fli33] oder [Bla12] zu finden. Somit ist also tatsächlich (vergleiche Abschnitt (2.5)) Krümmung gleich der Masse-bzw. Energieverteilung, die wiederum durch  $T_{\mu\nu}$ , den *Energie-Impuls-Tensor*, welcher uns in Abschnitt (4.2) in Gleichung (4.8) wieder begegnet, repräsentiert wird.

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.62)$$

$\mathcal{R}$  ist der Ricci-Skalar  $\mathcal{R}^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}$ , der bei Vakuum-Lösungen  $T_{\mu\nu} = 0$  berücksichtigt, dass der Raum auch außerhalb des betrachteten Sternes gekrümmt ist.

## 2.7 Schwarzschildmetrik

Die *Schwarzschild-Lösung* ist die erste Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, die 1916 von dem deutschen Astrophysiker Karl Schwarzschild (1873-1916) gefunden wurde.

Die Lösung der nicht-trivialen, gekoppelten partiellen Differentialgleichungen beschreibt eine nicht-rotierende, kugelsymmetrische Punktmasse in Abwesenheit von Masse bzw. Energie (eine sog. Vakuum-Lösung mit  $T_{\mu\nu} = 0$ ). Die *Schwarzschild-Lösung* lässt sich approximativ gut auf langsam rotierende Sterne anwenden<sup>8</sup>. Aufgrund einer auftretenden Singularität beschreibt die *Schwarzschild-Lösung* allerdings nur den äußeren Bereich eines Sternes. Für Lösungen innerhalb des Sternes kann man die *Kruskal-Lösung* heranziehen. Rotierende Sterne werden mit der *Kerr-Lösung* beschrieben (siehe [Bla12] oder [Mar88]).

Zur Beschreibung von relativistischen Sternen im Allgemeinen benötigt man die *Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen*, die in dieser Arbeit eine zentrale Rolle übernehmen werden und in Abschnitt (2.8) vorgestellt werden. Einstein selbst schlug zunächst drei Tests zur Verifizierung seiner Theorie der gekrümmten Raumzeit vor:

- i.) gravitative Rotverschiebung
- ii.) Lichtablenkung in der Nähe der Sonne (Eddington 1919)
- iii.) Periheldrehung des Merkur

Neuere Tests, wie etwa der *Shapiro-Effekt*, der die Verzögerung von Radar-Echos entlang der Sonne beschreibt, waren ebenfalls erfolgreich. Glücklicherweise hat man die Möglichkeit, alle diese Tests in einer approximativ statischen, also zeitunabhängigen, und isotropischen Umgebung durchzuführen.

Ausgehend von einer statischen ( $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$ ), sphärischen und räumlich begrenzten Masseverteilung mit  $\rho(r) = 0$  für  $r > r_0$  bzw.  $\rho(r) \neq 0$  für  $r \leq r_0$

---

<sup>8</sup>Unser verwendetes Modell beschreibt einen nicht rotierenden, sphärisch-symmetrischen Quarkstern, daher wird auf die Beschreibung der Schwarzschildmetrik besonderes Augenmerk gelegt

ist der Quellterm der Einsteinschen Feldgleichungen, der Energie-Impuls Tensor  $T_{\mu\nu}$  zeitunabhängig und die Metrik sphärisch symmetrisch. Daher lösen wir zunächst die Vakuum-Lösungen mit  $T_{\mu\nu} = 0$  der Einsteinschen Feldgleichungen (2.62) unter vereinfachten Annahmen.

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\epsilon(r), p_x(r), p_y(r), p_z(r)) \quad (2.63)$$

wobei  $\epsilon(r)$  die Energiedichte, und  $p_i(r)$  die Druckdichte des Sternes bezeichnet. Dieser Ansatz vernachlässigt sowohl anisotropische Spannungen als auch Temperatur-Konvektion<sup>9</sup> und ist für kompakte Sterne eine vielfach bewährte Näherungsmethode [Bla12].

Da die ART eine relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gesetze ist, und im Grenzfall deren Lösungen herauskommen müssen, darf man von der Annahme ausgehen, alle Masse sei im Zentrum des betrachteten Körpers konzentriert.

Man geht von einem allgemeinen Ansatz, die sogenannte *Standardform*, der Metrik  $g_{\mu\nu}$  aus.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Als Randbedingung soll, damit wir uns für  $r \rightarrow \infty$  der Minkowski Metrik nähern, gelten, dass  $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$  ist.

---

<sup>9</sup>Andernfalls hätte man auch Einträge auf den Nebendiagonalen

### 2.7.1 Christoffelsymbole

Die Christoffelsymbole übernehmen in der ART die Rolle der Scheinkraft. Analog zur Newtonschen Mechanik kann man sie daher aus den Ableitungen des Potentials bestimmen. Die Rolle des Potentials übernimmt hierbei die Metrik in Form des metrischen Tensors. Man berechnet die dreizehn von Null verschiedenen Christoffelsymbole dieser Metrik nach Gleichung (2.48), wobei hier  $\Gamma_{rr}^r$  als Beispiel dient.

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial x^r} \right) = \frac{1}{2}g^{rr} \partial_r g_{rr} = \frac{\dot{B}}{2B} \quad (2.65)$$

Die anderen zwölf errechnen sich analog zu:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{B} \quad (2.66)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{\dot{A}}{2B} \quad (2.67)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{B} \quad (2.68)$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \quad (2.69)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{\dot{A}}{2A} \quad (2.70)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad (2.71)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta \quad (2.72)$$

### 2.7.2 Der Ricci Tensor

Um sich ein wenig Arbeit zu ersparen, kann man gleich die kontrahierte Version des Riemann-Tensors (2.52), nämlich den Ricci-Tensor (2.58) benutzen.

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \quad (2.73)$$

Der hohe Grad an Symmetrie<sup>10</sup> der Schwarzschildmetrik erlaubt es, einige Komponenten des Riccitorsors sofort zu Null zu bestimmen [Mar88]. Die

<sup>10</sup>In Abschnitt (4.1) wird noch das eine oder andere zu Symmetrien gesagt werden

Invarianz der Zeitumkehr bestimmt  $\mathcal{R}_{rt} = 0$ . Analoge Überlegungen [Bla12] sagen aus, dass

$$\mathcal{R}_{r\theta} = \mathcal{R}_{r\phi} = \mathcal{R}_{t\theta} = \mathcal{R}_{t\phi} = \mathcal{R}_{\theta\phi} = 0$$

sind. Die verbliebenen  $\mathcal{R}_{tt}$ ,  $\mathcal{R}_{rr}$ ,  $\mathcal{R}_{\theta\theta}$  und  $\mathcal{R}_{\phi\phi}$  müssen dann allerdings doch zu Fuß berechnet werden. Für  $\mathcal{R}_{\theta\theta}$  ergibt sich nach Kontraktion und mit den entsprechenden Christoffelsymbolen (2.66) bis (2.72) folgende Summierung:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\theta\lambda}^\lambda = \mathcal{R}_{\theta\theta} &= \partial_\lambda \Gamma_{\theta\theta}^\lambda - \partial_\theta \Gamma_{\theta\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\theta\theta}^\rho - \Gamma_{\theta\rho}^\lambda \Gamma_{\theta\lambda}^\rho \\ &= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta\theta}^r \\ &\quad - \left[ \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\phi \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

Alle Ableitungen gebildet, gekürzt und die jeweiligen Christoffelsymbole miteinander multipliziert, erhält man letztlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\theta\theta} &= -\frac{1}{B} + 1 + \cot^2 \theta + \frac{\dot{B}r}{2B^2} - \frac{1}{B} - \frac{1}{B} - \frac{\dot{A}r}{2AB} + \frac{1}{B} + \frac{1}{B} - \cot^2 \theta \\ &= 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left[ \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A} \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

Die Einträge der anderen  $\mathcal{R}_{tt}$ ,  $\mathcal{R}_{rr}$  und  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi}$  werden ohne Rechnung angegeben [Bla12].

$$\mathcal{R}_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB} \quad (2.76)$$

$$\mathcal{R}_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB} \quad (2.77)$$

$$\mathcal{R}_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \mathcal{R}_{\theta\theta} \quad (2.78)$$

### 2.7.3 Finale Form

Damit kann man nun die beliebig gewählten Funktionen A und B näher bestimmen. Ausführlich zu finden in [Fli33] oder [Bla12]. An dieser Stelle beschränken wir uns auf die Lösung. Finale Form des Linienelementes der



Schwarzschild Metrik ist dann letztlich

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M\gamma}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M\gamma}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.79)$$

was auch in Diagonalmatrixform nach Gleichung (2.64)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2M\gamma}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M\gamma}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

dargestellt werden kann.

Die vorkommenden Größen  $G$ ,  $\gamma$  sind bereits aus Abschnitt (2.1) bekannt.  $r$  ist der Radius des Objektes. Die von Einstein vorgeschlagenen Tests seiner Theorie wurden mathematisch auch bestätigt.  $g_{00}$  bedeutet dabei, daß Uhren in einem Gravitationsfeld langsamer gehen, denn  $d\tau = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt < dt$ , und  $g_{11}$  beschreibt die Krümmung des Raumes und erklärt beispielsweise die restlichen 40" pro Jahrhundert  $dR = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr > dr$ , die man bei Merkur's Periheldrehung bis zur ART nicht verstanden hatte [Bla12].

Das in Gleichung (2.79) auftauchende  $\frac{2M\gamma}{r}$  ist der so genannte **Schwarzschildradius**  $r_s$ , der für unsere Sonne bei ca. 3 km liegt (Gleichung (2.1)).  $r_s$  ist sehr viel kleiner als der tatsächliche Radius der Sonne, der etwa  $7 \cdot 10^8 m$  beträgt. Die Abweichungen von der Minkowskimetrik sind, für gewöhnliche stellare Objekte, sehr gering. Für unsere Sonne etwa ( $\approx 3 \cdot 10^{-6}$ ), siehe Tabelle (2.1), für andere Objekte im Sonnensystem noch geringer (erinnert sei an dieser Stelle auch an die Diskussion zum Krümmungsradius in Abschnitt (2.5)).

Objekt	$M/M_{\odot}$	Radius (km)	$2M/R$
Quarkstern	bis 2.0	$\sim 10$	0.4
Neutronenstern	1 bis 2	$\sim 12$	0.2667
Weißer Zwerg	0.2 bis 1.4	$\sim 10.000$	$2.4 \cdot 10^{-4}$
Sonne	1.0	$7 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^{-6}$
Erde	$3 \cdot 10^{-6}$	6400	$10^{-9}$

Tabelle 2.1: *Allgemeinrelativistische Korrekturen für verschiedene Objekte in der Schwarzschildmetrik*

Für Objekte, deren tatsächlicher Radius in die Nähe des  $r_s$  kommt, müssen also relativistische Effekte unbedingt berücksichtigt werden. Ein Stern, dessen tatsächlicher Radius kleiner als der Schwarzschildradius ist, nennt man **schwarzes Loch**<sup>11</sup>. Von einem solchen Objekt entkommt nicht einmal Licht. Zwischen *Neutronenstern* und *schwarzem Loch* könnte ein anderes kompaktes Objekt existieren: Ein **Quarkstern**. Dieser könnte sich durch den Fermidruck der *quarks* stabilisieren, denn ähnlich wie *weiße Zwerge* durch entartete Elektronen, und *Neutronensterne* durch entartete Neutronen, könnte sich der *Quarkstern* durch den Entartungsdruck der Quarks<sup>12</sup> stabilisieren.

## 2.8 Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichungen

Auf einen *gewöhnlichen* Stern wirken zwei Kräfte, eine ist die *Gravitation*, die andere ist die, die mit dem Druck zusammenhängt. Bei gewöhnlich fu-

<sup>11</sup>Die Bezeichnung *schwarzes Loch* geht auf J.A. Wheeler zurück

<sup>12</sup>Quarks werden in Kapitel (4) ausführlich behandelt

sionierenden Sternen der **thermische Druck**, bei *kompakten* Objekten der **Entartungsdruck**. Hierbei gilt nach [Com05] folgender Zusammenhang

$$dp = \frac{dF}{A} = \frac{dF}{4\pi r^2} \quad (2.81)$$

wobei  $p$  gleich dem Druck,  $F$  der Kraft und  $A$  der Oberfläche entspricht. Die *Gravitationskraft* ist nach Newton gegeben durch

$$dF = -\frac{\gamma \cdot dm \cdot m(r)}{r^2} \quad (2.82)$$

wobei die Gravitationskonstante  $\gamma \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$  und  $r$  den radialen Abstand vom Sternzentrum angibt, dabei ist  $dm = \rho(r) \cdot dV = \rho(r) 4\pi r^2 dr$ . In Gleichung (2.82) eingesetzt und umgestellt

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma \rho(r) m(r)}{r^2} \quad (2.83)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.84)$$

Schreibt man die Massendichte  $\rho(r) = \frac{\epsilon(r)}{c^2}$  als Energiedichte um, wobei  $c$  gleich die Lichtgeschwindigkeit  $c = 299.492,458 \frac{m}{s}$ , so erhält man schliesslich mit

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma \epsilon(r) m(r)}{(cr)^2} \quad (2.85)$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2} \quad (2.86)$$

zwei gekoppelte Differentialgleichungen, die das Verhalten der **Masse** und des **Druckes** eines Sternes in Abhängigkeit vom **Radius** widerspiegeln.

Für besonders *kompakte* Objekte, die die Dichte von weissen Zwergen bei Weitem überschreiten, müssen die Effekte der *allgemeinen Relativitätstheorie* berücksichtigt werden. Für isotropische, statische, allgemeinrelativistische und spärlich symmetrische Massenverteilung<sup>13</sup> erhält man die **Tolman - Op-**

<sup>13</sup>Auf Basis der Schwarzschildmetrik

**penheimer - Volkoff** Gleichungen, kurz: **TOV**-Gleichungen<sup>14</sup>. Die Abhängigkeit der Masse vom Radius wird durch Gleichung (2.86) wiedergegeben. Man erkennt in Gleichung (2.87) bis auf drei Korrekturfaktoren die Ähnlichkeit zu Gleichung (2.85),

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma\epsilon(r)m(r)}{(cr)^2} \left(1 + \frac{\rho(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2\gamma m(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (2.87)$$

wobei der *erste* Korrekturterm besagt, dass nach der ART die Gravitation auch an den Druck  $p(r)$  koppelt, und nicht nur an die Massendichte  $\rho(r)$ .

Ähnliches spiegelt der *zweite* Term wieder, nämlich dass in der ART nicht nur die Masse  $m(r)$ , sondern jeder Eintrag im Energie-Impuls Tensor (Gleichung (2.63)) zum Gravitationsfeld beiträgt, in diesem Fall also der Druck, der neben der Energiedichte  $T_{00}$  auf der Hauptdiagonalen  $T_{0i}$  steht.

Da in der ART die Gravitation durch die Raumzeitkrümmung hervorgerufen wird, findet sich im *dritten* Korrekturterm auch der Schwarzschildradius (Gleichung (2.1), (2.79) oder auch 2.80) wieder.

Die Korrekturterme verdeutlichen mathematisch anschaulich, warum die Effekte der ART bei der Arbeit mit kompakten Objekten nicht vernachlässigt werden dürfen<sup>15</sup>.

<sup>14</sup>Für eine ausführliche Herleitung siehe beispielsweise [Sed11], [Bla12] oder [Fli33]

<sup>15</sup>Man vergleiche dazu auch den Abschnitt (2.1) bzw. die Diskussion des Schwarzschildradius in Abschnitt (2.7.3)

### 2.8.1 Die Stabilitätsbedingung nach Buchdahl

Eine unverzichtbare Bedingung für einen kompakten Stern ist, dass sein Radius  $r_0$  größer als der Schwarzschildradius  $r_s$  ist. Ansonsten würde der Stern zu einem schwarzen Loch kollabieren.

Einvernehmend mit dieser Bedingung ist, dass der Druck im Inneren des Sternes nicht singulär werden darf, besonders nicht im Ursprung bei  $r = 0$ . Daraus folgt<sup>16</sup>, dass der kompakte Stern mindestens von der Größe

$$r_0 \geq \frac{9}{8} \cdot r_s \quad (2.88)$$

sein muss.

Dies beschränkt gleichzeitig die Maximalmasse bei gegebenem Radius  $r_0$  auf

$$M_{max} = \frac{4c^2}{9\gamma} \cdot r_0 \quad (2.89)$$

Gleichung (2.88) ist bekannt unter dem Namen *Buchdahl-limit* oder *Buchdahl-Theorem* und ist für alle verwendeten Parametersätze dieser Arbeit erfüllt.

Eine weitere Stabilitätsbedingung, jedoch nur für rein aus drei-flavor-Quarkmaterie bestehende Objekte gültig, wird in Abschnitt (7.4.1) vorgestellt. Diese bezieht sich auf Elementarteilchen und wäre an dieser Stelle der Arbeit fehl am Platze.

---

<sup>16</sup>Die Annahme wurde für konstante Energiedichte hergeleitet, gilt aber generell für allgemeine Zustandsgleichungen [Bla12]

# 3

## Relativistische Wellengleichungen

### 3.1 Euler-Lagrange Gleichung

Bei dem Übergang von klassischer Mechanik zu klassischer Feldtheorie<sup>1</sup> wird ein physikalisches Objekt durch ein Feld mit einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden ersetzt [Sed11]. Dabei wird zwischen skalaren, pseudoskalaren, vektoriellen und pseudovektoriellen Feldern unterschieden<sup>2</sup>. In Abschnitt (2.3.1) ist uns bereits das lorentzinvariante 4-Potential (Gleichung (2.14)) als ein Beispiel für skalares und vektorielles Feld begegnet.

In der Feldtheorie arbeitet man mit der so genannten Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ , welche das räumliche Integral der Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie darstellt. Die Wirkung  $S$  ist dann die Erweiterung auf die vierte Dimension  $S = \int \mathcal{L} d^4x$ . Die Lagrangedichte hängt üblicherweise nur von den Feldern und ihren ersten Ableitungen ab  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ . Eine kleine

---

<sup>1</sup>Die ART ist eine klassische Feldtheorie

<sup>2</sup>Tensorfelder, wie etwa das noch nachzuweisende Graviton, werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt

Änderung in  $\phi$  verursacht

$$\delta S = \int d^4x (\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)) \quad (3.1)$$

in der Wirkung, von der man fordert, dass sie verschwindet.

Expandiert man mit der Taylor Reihe bis zur ersten Ordnung

$$\delta S = \int d^4x \left( \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right) = 0 \quad (3.2)$$

bleibt

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right) = 0 \quad (3.3)$$

Unter Verwendung der Produktregel [Zch12] kann man den zweiten Term umschreiben und es bleibt

$$\delta S = \int \delta \phi \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (3.5)$$

was als *Euler-Lagrange*-Gleichung bekannt ist.

## 3.2 Die Klein-Gordon Gleichung

In diesem Abschnitt wird die *Klein Gordon Gleichung* mittels ihrer Lagrangendichte  $\mathcal{L}$  hergeleitet. Die *Klein Gordon* Gleichung ist die relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger Gleichung. Problem an ihrer Interpretation war, dass sie, anders als die Schrödinger-Gleichung, zweiter Ordnung in der Zeit ist. Sie wurde zunächst verworfen, bis man sie als relativistische Verallgemeinerung für *Bosonen* mit spin 0 interpretieren konnte.  $\phi$  ist dabei ein beliebiges skalares Feld.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.6)$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung (3.5)

$$-\frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\phi)} + \partial_\mu \left( \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (3.7)$$

ist ein Teil der Lösung

$$\frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\phi)} = -m^2\phi \quad (3.8)$$

Der andere hingegen

$$\frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} \rightarrow \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) \quad (3.9)$$

Das  $\partial_\mu$  vor der Klammer von Gleichung (3.7) vernachlässigen wir zunächst, bis es dann in Gleichung (3.14) wieder auftaucht.

$$\frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)} \left( \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi)(\partial_\beta\phi) \right) \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)} ((\partial_\alpha\phi)(\partial_\beta\phi)) \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial\partial_\alpha\phi}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\beta\phi + \partial_\alpha\phi \frac{\partial\partial_\beta\phi}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (g_\alpha^\mu \partial_\beta\phi + \partial_\alpha\phi g_\beta^\mu) \quad (3.13)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \partial_\mu (g_\alpha^\mu \partial_\beta\phi + \partial_\alpha\phi g_\beta^\mu) \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha\partial_\beta\phi + \partial_\alpha\partial_\beta\phi) \quad (3.15)$$

$$= \partial_\alpha\partial^\alpha\phi \quad (3.16)$$

Die Bewegungsgleichung für das skalare Feld  $\phi$  lautet also:

$$\square\phi + m^2\phi = 0 \quad (3.17)$$



wobei  $\partial_\alpha \partial^\alpha = \square$  auch als *d'Alembert Operator* bekannt ist.

Die Klein-Gordon Gleichung läßt sich auch, etwas einfacher, über die Schrödinger-Gleichung mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls Beziehung  $p^\mu p_\mu \rightarrow \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$  herleiten [Sed11].

### 3.2.1 Die Proca Gleichung

Hat man es hingegen mit *spin-1*-Bosonen zu tun, so definiert man ein beliebigen Vektor  $A^\nu$  sowie einen Masseterm  $m$ . Die Feldgleichung sieht wie folgt aus

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + mA^\nu = 0 \quad (3.18)$$

Erinnert die Notation an die Diskussion der *Elektrodynamik* in Abschnitt (2.3), so ist dies kein Zufall, denn das elektromagnetische Feld **ist** ein masseloses Vektorfeld (Das Photon hat spin 1).

Um es bereits an dieser Stelle vorwegzunehmen, werden wir die Mediatoren der **starken Wechselwirkung** (die *Gluonen* mit spin 1) durch *skalare* (spin 0) und *vektorielle* (spin 1) Mesonen ersetzen.

Wie wir noch sehen werden, setzen sich *Mesonen* aus **quark** und **Anti-quark** zusammen (je mit spin  $\frac{1}{2}$ ), daher ist auch der folgende Abschnitt relativ ausführlich gehalten.

## 3.3 Dirac Gleichung

Die **Dirac**-Gleichung beschreibt, anders als die Klein-Gordon Gleichung (Abschnitt (3.2)), Teilchen mit halbzahligen spin, also **Fermionen**. In relativistisch kovarianter Schreibweise definiert man über die Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

die **Dirac**-Matrizen

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\tau}_i \\ -\hat{\tau}_i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Für eine ausführliche Herleitung der **Dirac**-Gleichung sei an [Ris12] verwiesen. Für die weitere Arbeit sind jedoch einige aus ihr folgende Relationen unerlässlich.

Als matrixwertigen 4-Spaltenvektor zusammengefasst, schreibt man abkürzend

$$\gamma_\mu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T = (\gamma_0, \vec{\gamma})^T \quad (3.21)$$

Im weiteren existiert ein

$$\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

welches, angewendet auf eine beliebige  $4 \times 4$ -Matrix, obere und untere Indizes vertauscht. Es gilt weiterhin

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1} \quad (3.23)$$

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

Wie auch die Klein Gordon Gleichung (3.17) lässt sich die Dirac-Gleichung über die **Euler-Lagrange-Gleichung** (3.7) aus einer Lagrangedichte<sup>3</sup> ableiten. Der Dirac-Lagrangian lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\hbar\gamma_\mu\partial^\mu - m)\Psi \quad (3.25)$$

Das  $\Psi$  ist im Allgemeinen ein komplexwertiger Spinor, so dass beide,  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  als unabhängige Felder betrachtet werden. Man ersetzt in Gleichung (3.7)

---

<sup>3</sup>Die Lagrangedichte nennt man auch den **Lagrangian**

$\phi$  durch die beiden unabhängigen Felder und erhält letztlich

$$(\not{p} - m)\Psi = 0 \quad (3.26)$$

$$\bar{\Psi}(\not{p} - m) = 0 \quad (3.27)$$

wobei die abkürzende Schreibweise  $\not{p} = i\hbar\gamma_\mu\partial^\mu$  ist, welche auch Feynman-Slash-Notation genannt wird<sup>4</sup>, Verwendung findet. Damit lässt sich Gleichung (3.25) abkürzend auch

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\hbar\not{p} - m)\Psi \quad (3.28)$$

schreiben.

Dabei gilt für den **adjungierten** Spinor [Ris12]

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 \quad (3.29)$$

Die Kombination

$$\bar{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0\Psi \quad (3.30)$$

ist ein **Lorentz**-Skalar, während sich

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (3.31)$$

wie ein **Lorentz**-Vektor transformiert. Damit ist das Transformationsverhalten von

$$\Psi^\dagger\Psi = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi \quad (3.32)$$

das der 0-ten Komponente eines Vierervektors.

Die physikalische Interpretation dieser Relationen (3.29) bis (3.32) wird uns in Kapitel (4) wieder begegnen.

---

<sup>4</sup>Richard P. Feynman, amerikanischer Physiker und Nobelpreisträger, geb.:1918, gest.: 1988

# 4

## Quanten Chromodynamik

Die Theorie der starken Wechselwirkung ist die so genannte **Quanten Chromodynamik** (im weiteren: QCD), die in diesem Kapitel vorgestellt wird. Sie beschreibt die Wechselwirkung zwischen **Quarks** und **Gluonen**.

Man nennt die Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, auch **Hadronen**. Unter ihnen wiederum unterscheidet man zwischen *Mesonen*, die ganzzahligen spin haben, und die über die Klein-Gordon-Gleichung (3.17) beschrieben werden, und *Baryonen* mit halbzahligen spin, welche über die Dirac-Gleichung (3.26) beschrieben werden.

Die Reichweite der starken Wechselwirkung beträgt nur etwa  $1 \text{ fm}^1$  und ihre Kopplungskonstante ist rund 100-mal größer als die der elektromagnetischen Wechselwirkung. Im Rahmen des Standardmodells<sup>2</sup> geht die starke Wechselwirkung auf die Farbladung zurück, von der es drei verschiedene gibt. Üblicherweise mit **rot**, **blau** und **grün** bezeichnet.

---

<sup>1</sup> $1 \text{ fm} \simeq 10^{-15} \text{ m}$

<sup>2</sup>Das Standardmodell ist das derzeit akzeptierteste Modell der Elementarteilchenphysik. Seit Beginn der 50iger Jahre wurden in großen Beschleunigeranlagen immer neue Teilchen entdeckt. Unter den vielen Versuchen, Ordnung in das Chaos zu bringen, erwies sich der als *The eightfold way* benannte Versuch (nach Murray Gell-Mann) als der erfolgreichste. Dieses Schema ordnet die Hadronen in übergreifende Gruppen (auch Multipletts genannt) an [Ris12].

### Alle in der Natur vorkommenden Teilchen sind farbneutral

Hadronen müssen also Farbsingletts sein, dabei wird eine Kombination aus Farbe und Antifarbe (Meson) sowie ein Zustand aus drei verschiedenen Farben (Baryon) jeweils als weiss (bzw. Singlett) bezeichnet [DGr08].

Das Austauschboson der starken Wechselwirkung ist das *Gluon*, welches eine Einheit einer Farbe und der gleichen Antifarbe trägt. Die Farbladung eines quarks kann sich durch Emission eines Gluons ändern. Eine weitere Konsequenz ist eine mögliche Kopplung von Gluonen zu sogenannten *Glueballs* [Gia12]. In der QCD beschreibt man das Neutron aus drei (nahezu masselosen) quarks zusammengesetzt, welche durch die Gluonen zusammengehalten werden. Die hohe Masse des Neutrons  $m_n \approx 1\text{GeV}$  kommt durch die hohe Energie der Gluonen, denn  $E = mc^2$ , zustande, welche die quarks am „Ausbrechen“ aus dem Neutron hindern. Diese Eigenschaft der QCD nennt man auch *quark-confinement*.

Eine andere wichtige Eigenschaft ist die so genannte *asymptotische Freiheit*. Erhöht man nämlich Dichte  $\rho$  oder Temperatur  $T$  und betrachtet das System im asymptotischen Grenzfalle  $\rho \rightarrow \infty$  bzw.  $T \rightarrow \infty$ , dann wechselwirken die quarks nicht mehr untereinander, sie sind dann *asymptotisch frei* [Han04]. Diese Eigenschaften der QCD gilt es in dem von uns verwendeten Modell zu modellieren.

## 4.1 Symmetrien

Das Problem, *Symmetrien* zu definieren, ist interessant. Der vielleicht symmetrischste Gegenstand, den man sich vorstellen kann, ist eine Kugel. Nach Weyl<sup>3</sup> liegt *Symmetrie* vor, wenn man einen Gegenstand nach Vollzug einer gewissen Operation, sei es beispielsweise Translation oder Rotation, als genau denselben erachtet. Von wo aus betrachtet ich die Kugel auch ansehe, sie sieht von allen Seiten gleich aus.

Nun kann man gewisse Aussagen anhand einfacher Überlegungen treffen. Hat man beispielsweise eine Funktion vorliegen, deren Exponenten ausschließlich

---

<sup>3</sup>Hermann Weyl, \*1885 † 1955, Physiker und Mathematiker

**gerade** sind, liegt **Achsensymmetrie** vor. Baryonen werden durch eine achsensymmetrische Wellenfunktion  $\psi(x) = \psi(-x)$  beschrieben und dürfen sich nicht im gleichen Quantenzustand befinden.

Hat man andererseits eine Funktion, deren Exponenten ausschließlich **ungerade** sind, liegt **Punktsymmetrie** vor. Anders als Baryonen werden Mesonen durch eine punktsymmetrische Wellenfunktion  $\psi(-x) = -\psi(x)$  beschrieben.

In Naturwissenschaften sucht man zunächst nach *Symmetrien*, um sich die Arbeit zu erleichtern.

## 4.2 Das Noethersche Theorem

Das **Noethersche Theorem** verbindet Symmetrien mit erhaltenen Größen (Tabelle (4.1)).

Mathematisch kann man eine Symmetrie als eine Variation des Feldes bzw. des Lagrangians auffassen, welches die dazugehörigen Bewegungsgleichungen invariant läßt. Läßt man die Raum-Zeitkoordinaten von  $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$  variiieren, wobei  $a^\mu$  einen kleinen, beliebigen Parameter darstellt, und entwickelt bis zur ersten Ordnung nach Taylor, dann ändern sich die Felder zu  $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + a) = \varphi(x) + a^\mu \partial_\mu \varphi$ . Eine kleine Variation des Feldes wird beschrieben durch  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ .

Damit ist

$$\delta\varphi = a^\mu \partial_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi a^\mu \quad (4.1)$$

wobei alle Größen skalaren Charakter haben, was den letzten Schritt in Gleichung (4.1) rechtfertigt. Die Variation eines nur vom Feld und seinen ersten Ableitungen abhängigen Lagrangians, bekannt aus Gleichung (3.2), lautet

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta(\partial_\mu\varphi) \quad (4.2)$$

Mit der Euler Lagrange Gleichung (3.7) ersetzt man das  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$ .  
 Zudem ist  $\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$ . Letztlich

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi) \quad (4.3)$$

Die Produktregel erlaubt uns diesen Ausdruck als totales Differential zu schreiben,

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) \quad (4.4)$$

Nun kann Gleichung (4.1) (mit umbenannten Indizes) benutzt werden

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right) a^\nu = \delta_\nu^\mu \partial_\mu(\mathcal{L}) a^\nu \quad (4.5)$$

Beide Seiten auf eine gebracht

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) a^\nu = 0 \quad (4.6)$$

Da  $a^\nu$  beliebig war, muss der Ausdruck in den Klammern Null werden, somit

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist von enormer Bedeutung, so dass er sogar einen eigenen Namen hat:

Der **Energie-Impuls Tensor**,

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (4.8)$$

der uns bereits in Abschnitt (2.6.1) in Gleichung (2.62) in einer anderen Form begegnet ist. Damit ist

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (4.9)$$

Nimmt man an, dass sich der Lagrangian bei einer Variation nicht ändert, erhält man statt Gleichung (4.2)  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ , wobei dann  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Führt man nun die Rechnungen analog durch landet man, ähnlich wie in Gleichung

Operation	Erhaltungssatz
Raum-Translation	Impulserhaltung
Zeit-Translation	Energieerhaltung
Drehung	Drehimpulserhaltung

Tabelle 4.1: Transformationen und erhaltene Größen (klassisch)

(4.7) bzw. (4.9) bei einem Ausdruck

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.10)$$

Beide Gleichungen (4.9) und (4.10) enthalten **erhaltene Größen**, denn nur die Ableitung einer **Konstanten** ist gleich Null.

Zentrale Aussage des *Noetherschen Theoremes* ist, dass für jede kontinuierliche Symmetrie, also eine Variation des Feldes, die den Lagrangian nicht ändert, eine erhaltene Größe<sup>4</sup> existiert. Die erhaltenen Größen von Gleichung (4.9) sind *Energie* mit der Energiedichte  $T_0^0$  und *Impuls* mit der Impulsdichte  $T_i^0$ , wobei  $i$  die räumlichen Komponenten sind.

### 4.3 Symmetriebruch und Goldstone Theorem

Die eichtheoretische Formulierung der Naturgesetze über Quantenfeldtheorien bringt eine interessante Erkenntnis mit sich: Alle Kräfte werden durch einen Bruch in einer ihr zu Grunde liegenden Symmetrie verursacht.

Bei der Symmetriebrechung kann man zwischen *spontaner* und *expliziter* Symmetriebrechung unterscheiden. Eine wichtige Konsequenz von *spontaner* Symmetriebrechung ist das Erscheinen eines (eigentlich masselosen) Goldstone-Bosons [ChS97], dem durch die *explizite* Symmetriebrechung Masse verliehen wird. Die *chirale* Symmetrie ist eine Symmetrie der QCD, die im Inneren von

<sup>4</sup>Man spricht auch von erhaltenen Strömen bzw. Ladungen in Analogie zur Elektrodynamik



kompakten Sternen sichtbar werden kann, nämlich beim Übergang von hadronischer Materie zu einem *Quark-Gluon-Plasma*. Wie bereits erwähnt, ist bei sehr hohen Dichten (auch wenn die Temperatur verhältnismäßig gering ist) die Materie möglicherweise *deconfined* [SGM98].

### 4.3.1 Spontaner Symmetriebruch

Das Noethersche Theorem verbindet *Symmetrien* mit *erhaltenen Größen*. Beispielsweise kann die U(1)-Symmetrie zu einer Invarianz unter unitärer Transformation der Form  $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\theta}\varphi(x)$  sein. Wenn nun  $\theta$  nicht koordinatenabhängig ist, spricht man von **globaler**, andernfalls von einer **lokalen** Symmetrie. Es existieren selbstverständlich auch Lagrangians, die invariant unter anderen Transformationen<sup>5</sup> sind. In einigen Fällen existieren Symmetrien des Lagrangians nicht in dessen Grundzustand.

Dies läßt sich an einem Beispiel gut verstehen:

Eine Kugel sitzt auf einem rotationssymmetrischen Hügel. Vom Standpunkt der Kugel aus sind alle Richtungen gleichberechtigt. Das System ist jedoch instabil: Eine kleine Störung läßt die Kugel herunterrollen und die Symmetrie wurde *spontan gebrochen*. Die Kugel ist nun in einem Zustand niedrigerer potentieller Energie, dies bedeutet, dass sie sich nicht wirklich in einem Grundzustand befand, als sie noch auf dem Hügel lag. Der wahre Grundzustand tritt hervor, wenn die Symmetrie gebrochen wurde.

Der Lagrangian der  $\varphi^4$ -Theorie kann, abhängig vom Masseterm, unterschiedliche Grundzustände<sup>6</sup> haben [QFD08].

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \quad (4.11)$$

mit einem reellen skalaren Feld  $\varphi$  und einer beliebigen Kopplung  $\lambda$ .

Das Potential des Lagrangians geht, analog zur Lagrangefunktion der klassi-

<sup>5</sup>Beispielsweise Paritätstransformation:  $\varphi \rightarrow -\varphi$

<sup>6</sup>Dies wird noch wichtig werden, wenn wir auf den in dieser Arbeit verwendeten Lagrangian und seinen *spontanen* symmetriebrechenden Term zu sprechen kommen.

schen Mechanik, mit negativem Vorzeichen ein

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \quad (4.12)$$

Welche Kraft generiert dieses Potential? Man bildet die Ableitung bezüglich des Feldes  $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\varphi}$  und sucht den Extremwert

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\varphi} = 0 \quad (4.13)$$

$$= \varphi(m^2 + \lambda\varphi^2) \quad (4.14)$$

dann gibt es zwei Möglichkeiten, die erste ist trivial  $\varphi = 0$ . Dieser Fall entspricht  $m^2 > 0$ , einem skalaren, massiven Feld. Schaut man sich das Potential des Lagrangians in Abbildung (4.1) einmal an

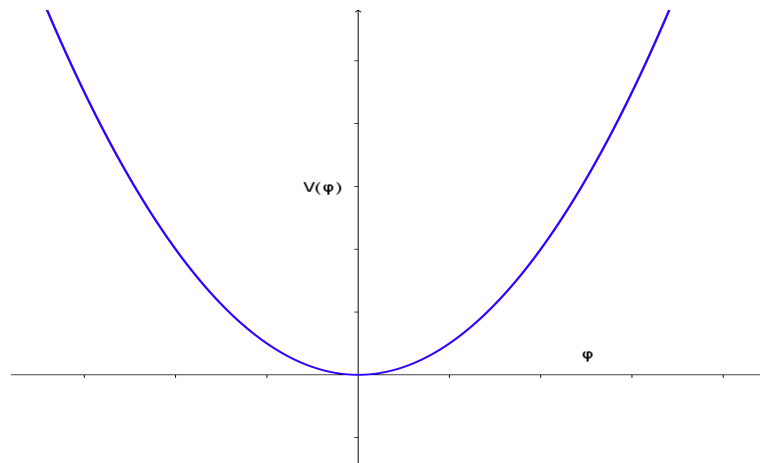


Abbildung 4.1: Potential des  $\varphi^4$  - Lagrangians für den Fall  $m^2 > 0$

so sieht man, dass im Fall  $\varphi = 0$  der Grundzustand tatsächlich auch die Symmetrie  $\varphi \rightarrow -\varphi$  des Lagrangians erfüllt. Die zweite Möglichkeit liegt bei  $m^2 < 0$ , dann muss  $m^2 + \lambda\varphi^2 = 0$  sein. Dies führt zu zwei Lösungen der Minima, nämlich

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} = \pm\sigma \quad (4.15)$$

Damit das Feld reellwertig ist, muss  $m^2 < 0$ , diese Situation entspricht der Kugel auf dem Hügel. Der wahre Grundzustand liegt bei  $\pm\sigma$  (Abbildung (4.2)). Einen zu wählen, bricht die Symmetrie. Dann rollt die Kugel den Hügel hinunter und verbleibt dort.

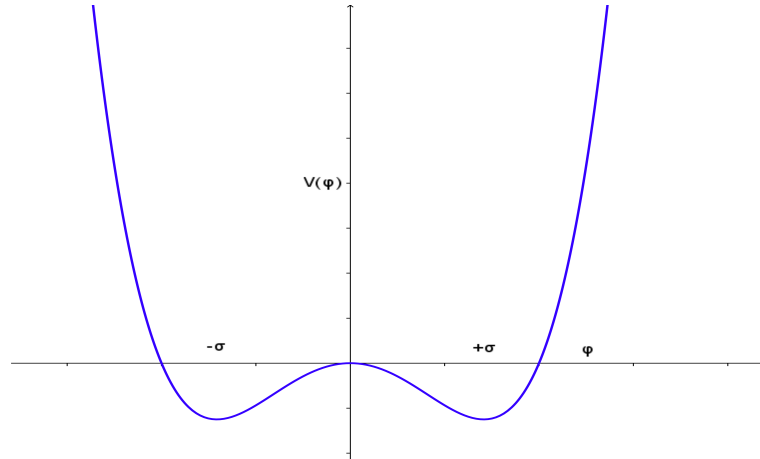


Abbildung 4.2: Potential des  $\varphi^4$  - Lagrangians für den Fall  $m^2 < 0$

Wird eine Symmetrie *spontan* gebrochen, so sagt die effektive Theorie die Existenz eines masselosen, pseudoskalaren Teilchens voraus, das **Goldstone-Boson**.

Dies bedeutet, dass man einen Zustand  $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$  erwartet, welcher in unserem Fall dem Pion entspricht [ChS97]. Dieses befände sich in einem der Minima bei  $\pm\sigma$ .

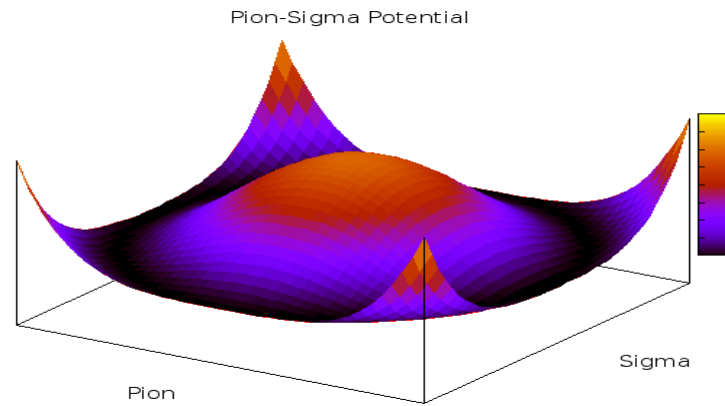


Abbildung 4.3:  $\bar{\pi}$ - $\sigma$ -Potential. Anregungen in radiale Richtungen (entlang des schwarzen Kreises) kosten keine Energie, wohin gegen eine Anregung aus dem Minimum heraus (z.B.: den Hügel hoch) Energie kostet

Da die Minima, dreidimensional dargestellt in Abbildung (4.3), auf einer Höhe liegen, kosten radiale Anregungen (entlang des schwarzen Kreises: dem Grundzustand) keine Energie<sup>7</sup>. Das Teilchen ist folglich masselos. Da das  $\bar{\pi}$  jedoch massiv ( $\approx 136\text{MeV}$ ) ist, muss die Symmetrie zudem noch *explizit* gebrochen sein.

Das in Abbildung (4.3) dargestellte Potential nennt man seiner Form wegen auch *mexican hat Potential*.

### 4.3.2 Expliziterer Symmetriebruch

Von *expliziter Symmetriebrechung* spricht man bei Störung einer Symmetrie durch eine vergleichsweise kleine, nicht symmetrische Zutat. Die Rotations-symmetrie eines Rades beispielsweise wird durch Anlegen einer kleinen Masse *explizit* gebrochen<sup>8</sup>.

Auf quantenmechanischer Ebene bedeutet dies, dass der Vakuumerwartungswert des Grundzustandes weniger Symmetrien aufweist, als die Bewegungs-

<sup>7</sup>Eine Anregung in die  $\sigma$ -Richtung (den Hügel rauf) kostet Energie, das dazugehörige Teilchen wäre massiv

<sup>8</sup>Diese sollte selbstverständlich nicht im Mittelpunkt des Rades angebracht werden

gleichungen des Systemes [Mos98]. Betrachtet man beispielsweise ein quantenmechanisches System mit dem Lagrangian  $\mathcal{L}$  und einem Zustand minimaler Energie (Vakuuzustand) und führt eine Transformation aus, können nach [Bie07] folgende Fälle auftreten:

- i. Vakuuzustand und  $\mathcal{L}$  sind invariant  $\rightarrow$  **exakte** Symmetrie (Abbildung (4.1))
- ii. Vakuuzustand und  $\mathcal{L}$  sind nicht invariant  $\rightarrow$  **expliziter** Symmetriebruch
- iii. Vakuuzustand ist nicht invariant und  $\mathcal{L}$  ist invariant  $\rightarrow$  **spontaner** Symmetriebruch (Abbildung (4.2))

*Expliziter* Symmetriebruch entspricht im Bild des Potentials (4.4) radialen Anregungen, welche, da auf verschiedenen Höhen liegend, Energie kosten würden. Dem Teilchen wird so eine Masse gegeben.

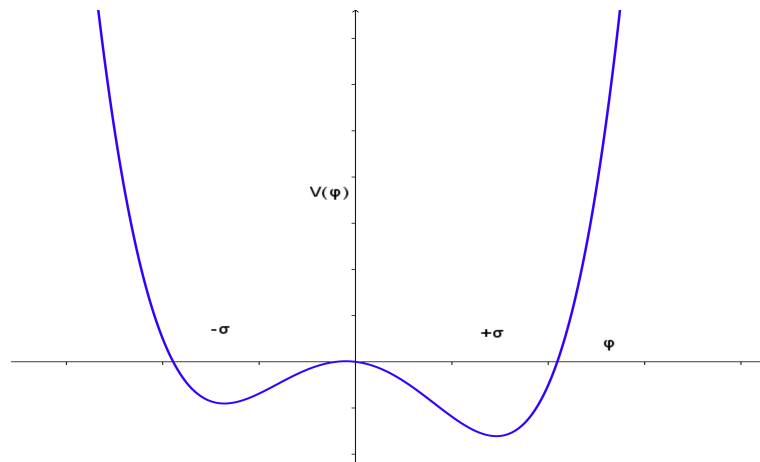


Abbildung 4.4: Potential des  $\varphi^4$  - Lagrangians für den Fall  $m^2 < 0$  mit explizitem Symmetriebruch

### 4.3.3 Chirale Symmetrie

Die *chirale Symmetrie* ist eine Symmetrie der QCD, für den Fall verschwindender quark-Massen. Obgleich bekannt ist, dass quarks nicht masselos sind

(siehe Tabelle (4.2)), so sind die Massen verglichen mit einem Nukleon ( $\cong 1\text{GeV}$ ) doch verschwindend gering, so dass die Symmetrie approximativ angenommen werden kann.

Die Dirac-Lagrangedichte (3.25) der **chiralen** Symmetrie entkoppelt in einen links- und rechtshändigen Anteil im Fall von verschwindenden quark-Massen. Mit den beiden Projektionsoperatoren

$$\Psi_L = (\mathbb{1} - \gamma_5)\Psi \quad (4.16)$$

$$\Psi_R = (\mathbb{1} + \gamma_5)\Psi \quad (4.17)$$

wobei  $\gamma_5$  dem aus Gleichung (3.22) in Abschnitt (3.3) entspricht, zerlegt man nun den Dirac-Lagrangian (Gleichung (3.25) bzw. (3.28)) in einen links- und rechtshändigen Anteil  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R$

$$\mathcal{L} = (\bar{\Psi}_L + \bar{\Psi}_R)(i\hbar\not{p} - m)(\Psi_L + \Psi_R) \quad (4.18)$$

Nach Ausmultiplizieren und Umformen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\Psi}_L\not{p}\Psi_L + i\bar{\Psi}_R\not{p}\Psi_R - m(\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L) \\ &\quad + i\bar{\Psi}_L\not{p}\Psi_R + i\bar{\Psi}_R\not{p}\Psi_L - m(\bar{\Psi}_L\Psi_L + \bar{\Psi}_R\Psi_R) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mit den Relationen (3.23), (3.24) und (3.29) wird

$$\bar{\Psi}_L\Psi_L = \frac{1}{4}\Psi^\dagger(\mathbb{1} - \gamma_5)\gamma^0(\mathbb{1} - \gamma_5)\Psi \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{4}\Psi^\dagger(\gamma^0 + \gamma^0\gamma_5)(\mathbb{1} - \gamma_5)\Psi \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{4}\bar{\Psi}(\mathbb{1} + \gamma_5)(\mathbb{1} - \gamma_5)\Psi = 0 \quad (4.22)$$

Dies gilt selbstverständlich dann auch für die rechtshändigen Felder  $\bar{\Psi}_R\Psi_R = 0$ .

Mit  $\not{p} = \partial_\mu\gamma^\mu$  und erneuter Verwendung der Relation (3.24) wird zunächst

$$\not{p}\Psi_R = \frac{1}{2}\partial_\mu\gamma^\mu(\mathbb{1} + \gamma_5)\Psi \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{2}(\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5) \partial_\mu \Psi \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \not{p} \Psi \quad (4.26)$$

Nun kommt das ursprünglich vorhandene  $\bar{\Psi}_L$  wieder dazu

$$\bar{\Psi}_L \not{p} \Psi_R = \frac{1}{2} \Psi^\dagger (\mathbb{1} - \gamma_5) \gamma^0 \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \not{p} \Psi \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{4} \bar{\Psi} (\mathbb{1} + \gamma_5) (\mathbb{1} - \gamma_5) \not{p} \Psi = 0 \quad (4.28)$$

und aus Gleichung (4.19) streichen sich bis auf

$$\mathcal{L} = i(\bar{\Psi}_L \not{p} \Psi_L + \bar{\Psi}_R \not{p} \Psi_R) - m(\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L) \quad (4.29)$$

alle sonstigen Terme.

Man erkennt, dass im Fall verschwindender Quarkmassen  $m = 0$  beide Felder voneinander entkoppeln, so dass letztlich tatsächlich  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R$  gilt.

Die erhaltenen Größen der *chiralen* Symmetrie sind der *Vektorstrom*, welcher mit dem Isospin identifiziert wird, und der (teilweise) erhaltene *Axialvektorstrom* (PCAC) [ChS97]. Die Erhaltung des **Isospins** und die Erhaltung der **Seltsamkeit** erlaubt die Darstellung in Multipletts [Ris12], vergleiche Abbildung (4.5).

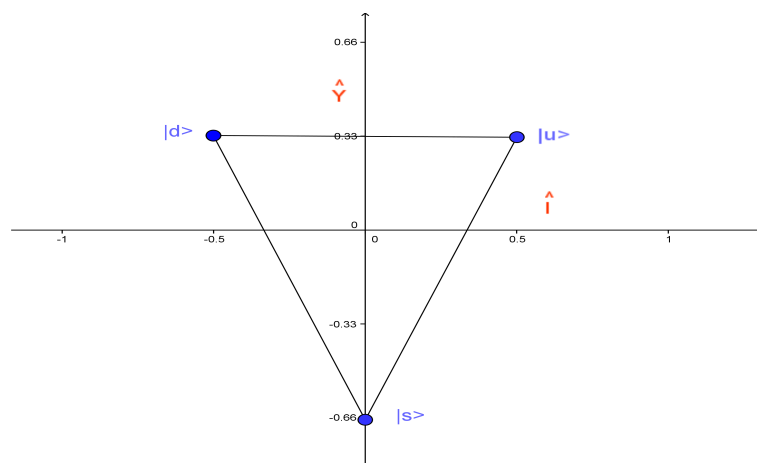


Abbildung 4.5: *up-, down-, und strange quark in Multipllett Darstellung.*  $\hat{Y}$  bezeichnet die Hyperladung und  $\hat{I}$  den Isospin

Mesonen können, aufbauend auf der Multipllett-Darstellung, beispielsweise mit  $[\bar{3}] \otimes [3] = [1] \oplus [8]$  ein *Singlett*- und ein *Oktett*-Zustand bilden. Auch Baryonen lassen sich in solchen Schemata anordnen [DGr08].

## 4.4 Von $SU(2)$ zu $SU(3)$ -Symmetrie

Gemäß dem **Noetherschem Theorem** führen gewisse Symmetrietransformationen zu Erhaltungssätzen, vergleiche ([Sed11] oder auch [Ris10]), einige bekannte Beispiele aus der klassischen Mechanik finden sich in Tabelle (4.1) wieder. Da an dieser Stelle nicht der ganze mathematische Apparat der *Gruppentheorie* dargestellt werden kann, wird der Übergang von der *Spin-Gruppe*, der  $SU(2)$ , zur  $SU(3)$  beschrieben. In dieser *mathematischen Gruppe* werden Hadronen/Mesonen in Gruppen (genannt: Multipletts) angeordnet, wenn man nämlich als noch kleinere Bausteine der Materie *quarks* annimmt. Die Gruppe  $SU(2)$  ist die Gruppe der **speziellen unitären**  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante  $+1$ . Eine mögliche Darstellung ist  $\hat{U}(\vec{\alpha}) = \exp(-\frac{i}{2}\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})$ , wobei  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  und  $i = 1, 2, 3$ ,  $\vec{\sigma}$  sind dabei die **Pauli**-Matrizen (3.19). Um das zweidimensionale Model  $SU(2)$  nun auf drei Dimensionen, die  $SU(3)$ , zu erweitern, bedient man sich der **Gell-Mann**-Matrizen, die das Analogon zu



den Pauli Matrizen in drei Dimensionen darstellen [Ris12].

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & & (4.30)
 \end{aligned}$$

$\lambda_8$  hat diese von den anderen sieben Matrizen abweichende Form, da die **Generatoren** linear unabhängig, und alle Elemente  $i,j$  zumindest einmal von Null verschieden sein müssen [Mos98].

Es existieren dimensionsabhängig  $N_f^2 - 1$  Generatoren.

## 4.5 QCD-Lagrangian

Ziel eines physikalischen Modelles ist es, physikalische Vorgänge in der Natur adäquat zu beschreiben. Bei physikalischen Modellen der Elementarteilchen hat sich das Prinzip der kleinsten Wirkung, Gleichung (3.7) nach *Euler*<sup>9</sup> und *Lagrange* als besonders wertvoll erwiesen. Die gesamte Modellbildung verlagert man auf eine Funktion  $\mathcal{L}$ , welche man **Lagrangedichte** oder schlicht den

<sup>9</sup>Leonhard Euler, Mathematiker, geb.: 1707, gest.: 1783

**Lagrangian** nennt. Dabei muss  $\mathcal{L}$  unter anderem realwertig und Poincarre-invariant<sup>10</sup> sein [Han04]. Der **Lagrangian** der **QCD** ist gegeben als

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - \hat{m})\psi - \frac{1}{2}\text{tr}(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}) \quad (4.31)$$

Hier ist  $G^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu}\hat{T}^a$  der *Eichfeldterm* mit den acht Generatoren  $\lambda_a$  der SU(3) (Gleichung (4.30)), und  $\hat{T}_a \equiv \frac{\hbar}{2}\hat{\lambda}_a$ , der Term, der den **Gluonen** entspricht.  $\psi$  ist der *Materieterm* der **Quarks** mit Masse  $\hat{m}$ .

Der Unterschied zum Lagrangian der QED ist, dass man an dieser Stelle acht(!) Feldstärketensoren hat, gemäß den acht Eichbosonen (den Gluonen) der QCD verglichen mit dem Einen, dem Photon, der QED.

Da der *Eichfeldterm* aus Gleichung (4.31) als Kommutator zweier kovarianter Ableitungen ([Ris12]) definiert ist, treten zusätzlich Terme *dritter* und *vierter* Ordnung im Potential auf. Dies bedingt, dass die Quarkfelder  $\psi$  nicht nur Spinoren sind, sondern deren Einträge gleichzeitig 3-Vektoren, welche man als Farben der Quarks interpretiert, die üblicherweise mit **rot**, **blau** und **grün** bezeichnet werden.

Die *nicht-abelsche* Natur der SU(3) bedingt, dass diese Zusatzterme zu *3- und 4-Gluon-Selbstwechselwirkungen* untereinander führen. Die QCD hat damit physikalisch ganz andere Eigenschaften als die QED und ist mathematisch um einiges komplexer.

Zudem existieren sechs Quark-Flavor, bezeichnet durch up, down, strange, charm, bottom und top, welche in Tabelle (4.2) aufgelistet sind [PDG12]. Aufgrund der Größe der Kopplungskonstanten<sup>11</sup> kann man perturbative Ansätze zur Lösung von Gleichung (4.31) ausschließen, man beschränkt sich auf Gitterrechnungen oder verwendet derzeit *effektive* theoretische Modelle.

<sup>10</sup>Also auch ein Skalar bezüglich Lorentz-Transformationen

<sup>11</sup>Welche ca. den Wert 1 hat, vergleiche die Einleitung in Kapitel (4)

Generation	Flavor	Ladung (e)	Masse (MeV)
Erste	<b>u</b> (up)	$\frac{2}{3}$	$2.3 \pm 0.6$
	<b>d</b> (down)	$-\frac{1}{3}$	$4.8 \pm 0.5$
Zweite	<b>s</b> (strange)	$-\frac{1}{3}$	$95 \pm 5$
	<b>c</b> (charm)	$\frac{2}{3}$	$1275 \pm 25$
Dritte	<b>b</b> (bottom)	$-\frac{1}{3}$	$4180 \pm 30$
	<b>t</b> (top)	$\frac{2}{3}$	$173500 \pm 70$

Tabelle 4.2: Die sechs quark-Generationen mit spin  $\frac{1}{2}$  (aus[[PDG12](#)])

# 5

## Das chirale Quark-Meson Modell mit Bag Konstante

Eine Möglichkeit, die starke Wechselwirkung bei hohen Dichten zu simulieren, ist eine so genannte *effektive* Theorie. Diese beschreibt die starke Wechselwirkung durch einen Austausch von Mesonen [Han04]. Es existieren nun bereits einige Modelle, das **up**- und das **down**-quark mit solchen Theorien zu berechnen [Mal12] oder auch [SGM98]. Da man aber bestrebt ist, auch Teilchen zu beschreiben, die **strange**-quarks<sup>1</sup> beinhalten, erweitert man das Modell mit **u** und **d** um einen weiteren flavor **s** und nimmt an, dass sich die quark-Massen nicht allzu sehr voneinander unterscheiden<sup>2</sup>. Im MIT-Bag-Modell<sup>3</sup> tritt die Addition einer Konstanten **B** zur Energiedichte auf. Zentrale Idee

---

<sup>1</sup>So genannte Hyperonen

<sup>2</sup>Da die Quark-Massen aber nicht identisch und nicht Null sind, ist die (masseverleihende) explizite Brechung der chiralen Symmetrie unterschiedlich groß. Für up- und down quark ist der Massenunterschied auf einer typischen hadronischen Massenskala von  $\sim 1\text{GeV}$  jedoch verschwindend gering [Ris12]. Auch die Berücksichtigung des strange Quarks ist auf dieser Massenskala noch klein (vergleiche Tabelle (4.2)).

<sup>3</sup>Das Bag Modell wird desöfteren auch MIT-Bag Modell genannt, da Physiker des Massachusetts Institute of Technology in den 70er Jahren erste Versuche unternahmen, damit Phasenübergänge bzw. die Substruktur von Hadronen zu beschreiben

hinter dem Modell ist, das *quark confinement* durch eine Art Tasche (Bag) zu modellieren, in welcher sich die quarks als freies Fermi-Gas aufhalten, und nach außen hin so zudem noch die Farbneutralität gewährleistet ist. Die Bag Konstante interpretiert man als Druck der sich in der Tasche befindlichen Teilchen gegen den Vakuumdruck von außen. Diese Tasche ersetzt gewissermaßen die Gluonen. Der phänomenologische Charakter dieser Konstanten bedingt, dass wir ihn zwischen 40 – 200MeV variieren werden. Diese Beschränkung ist gerechtfertigt, da wir den Phasenübergang von hadronischer zu Quarkmaterie nicht unterhalb von normaler Kerndichte<sup>4</sup> erwarten, was bei zu klein gewählter Bag-Konstanten der Fall sein könnte [KSt99], wenn die anderen variablen Parameter ungünstig gewählt werden

Bisher war man kaum erfolgreich beim Lösen der Gleichungen der QCD. Bei einer hohen Baryonendichte kann man jedoch die *skalaren-* und *vektoriellen* Feldoperatoren durch ihre Vakuum Erwartungswerte ersetzen. In Dichtebereichen von Atomkerndichte und mehr fangen die Nukleonen an zu *überlappen*. Zur Beschreibung von Materie die derart beschaffen ist, verwendet man innerhalb seines Modelles so genannte *relativistic mean field* Näherungen, bei welcher die kondensierten Hintergrundfelder<sup>5</sup> als statisch angenommen werden, was die Rechnungen enorm vereinfacht, lösbar macht und in welchen sich die Baryonen (Neutronenstern) oder quarks (Quarkstern) quasi „frei“ bewegen [SaW23].

In Abbildung (5.1) ist die Zustandsgleichung für verschiedene Bag-Konstanten graphisch dargestellt. Bei der Annahme eines freien Gases aus masselosen *up*, *down* und *strange* quarks ist die Zustandsgleichung von der Form

$$p(\epsilon) = \frac{1}{3} \cdot (\epsilon - 4B) \quad (5.1)$$

wobei p der Druck in  $\frac{MeV}{fm^3}$  in Abhängigkeit von der Energiedichte  $\epsilon$ , ebenfalls in  $\frac{MeV}{fm^3}$ , dargestellt ist. Man nennt eine Zustandsgleichung auch *weicher* als eine andere, wenn bei gegebenem Druck die Energiedichte größer ist. In Ab-

---

<sup>4</sup>Normale Kern-Teilchendichte  $\approx 150 \frac{MeV}{fm^3}$

<sup>5</sup>Also die Mediatoren der starken Wechselwirkung, welche modellabhängig die Gluonen ersetzen

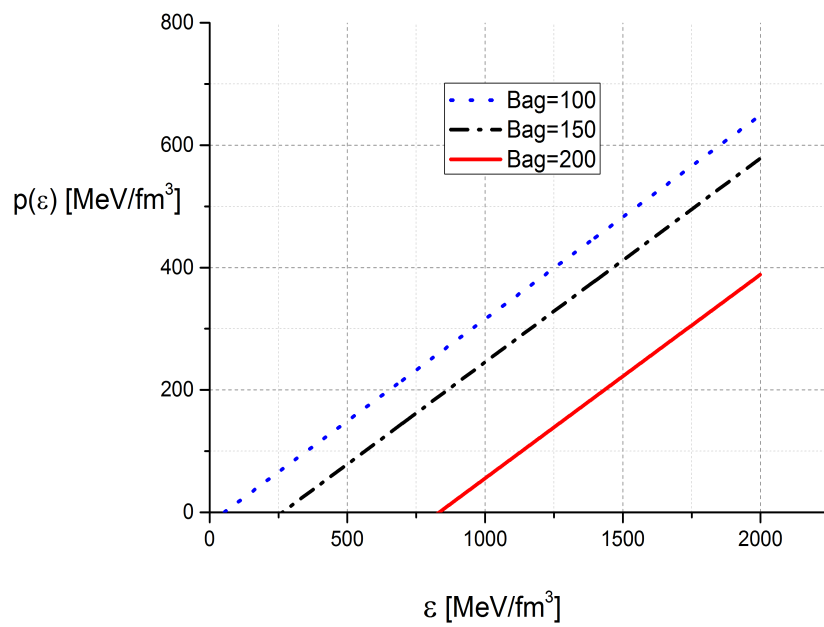


Abbildung 5.1: Die Zustandsgleichungen für verschiedene Bag Konstanten im Bag-Modell

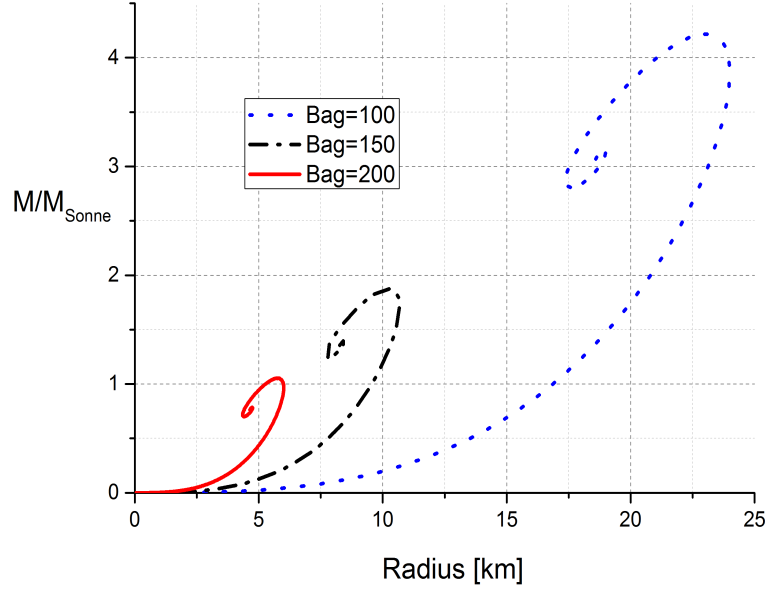


Abbildung 5.2: Die Masse-Radius-Relationen für verschiedene Bag Konstanten im Bag-Modell

bildung (5.1) wäre demnach bei größer werdender Bag-Konstante die dazugehörige Zustandsgleichung *weicher*<sup>6</sup>. Die Lösungen der TOV-Gleichungen, die Masse-Radius Relationen, die aus der Zustandsgleichung des MIT-Bag Modelles folgen, finden sich graphisch in Abbildung (5.2) wieder. Man erkennt, dass bei größer werdender Bag-Konstante die Maximalmasse, sowie der Radius des Sternes, abnimmt. Dargestellt in Abbildung (5.3) ist die Masse-Druck Beziehung bei verschiedenen Bag-Konstanten. Die Maximalmasse von etwa  $4M_{\odot}$  bei einer Bag-Konstanten von  $100 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$  liegt bei einem Zentralsdruck von etwa  $70 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$ , was größenordnungsmäßig der halben Kern-Teilchendichte entspricht. Dies entspräche definitiv hadronischer Materie.

Anders das Ergebnis der größten Bag-Konstante  $200 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$ , dort liegt der Zentralsdruck im Bereich von knapp  $900 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$ , also sechsfacher Kern-Teilchendichte, bei einer Maximalmasse von etwas über einer Sonnenmasse. Auch dieser

<sup>6</sup>Man kann auch anders rum argumentieren und eine Zustandsgleichung *härter* als eine andere bezeichnen

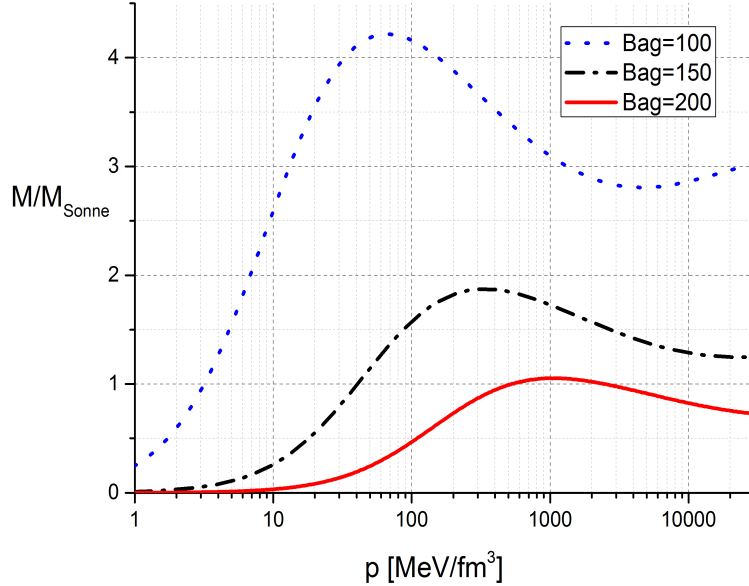


Abbildung 5.3: Die Masse-Druck Beziehung für verschiedene Bag Konstanten im Bag-Modell

Stern wäre für diese Arbeit irrelevant, da unser Hauptinteresse ja an Sternen von über zwei Sonnenmassen liegt, was allerdings mit der mittleren gewählten Bag-Konstanten  $150 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$  und ca.  $2M_{\odot}$  bei einem Zentraldruck von etwa  $300 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$  gut realisierbar erscheint.

Mit zunehmender Bag-Konstante sinkt also die Maximalmasse und der Zentraldruck im Inneren des Sternes steigt an. Diese „Stellschraube“ an der Zustandsgleichung ist also keineswegs zu vernachlässigen und wird uns in der Auswertung der in dieser Arbeit erhobenen Daten weiter beschäftigen.

Die vom verwendeten Modell abhängige, erhaltene Zustandsgleichung beschreibt dann den *deconfinement*-Phasenübergang von hadronischer Materie in eine reine Quark-Phase. In unserem Fall ist die Zustandsgleichung thermodynamisch selbstkonsistent unter Verwendung von dichteabhängigen Quarkmassen, welche ja im Bag-Modell  $m_u = m_d = m_s = 0$  ist.

Im weiteren werden wir in unserem Modell *spontane* und *explizite* Symmetriebrechung berücksichtigen. Damit wollen wir die Restauration der *chiralen*



Symmetrie gewährleisten<sup>7</sup>. Der von uns verwendete Lagrangian  $\mathcal{L}$ , der dies alles berücksichtigt, wird im kommenden Kapitel ausführlich vorgestellt.

---

<sup>7</sup>Der Grundzustand soll dann die gleiche Symmetrien wie der Lagrangian vorweisen

# 6

## Der Lagrangian

### 6.1 Der Lagrangian in mean field approximation

Da man Gluonen nicht so ohne weiteres an quark-Felder koppeln kann<sup>1</sup>, ersetzt man die Gluonen durch Mesonenkondensate und koppelt mit einem Yukawa-Potential  $g_\alpha$ , wobei  $\alpha$  die verschiedenen Kondensate repräsentiert, ein.

In dieser Arbeit verwenden wir die Version (6.1) des *Linearen-Sigma-Modell* Lagrangians nach [CSR00] oder [HDQ08]. Er besteht aus drei Anteilen

- i.  $\mathcal{L}_e$ , der den Beitrag der *Elektronen* berücksichtigt (6.2)
- ii. einem *fermionischen* Anteil,  $\mathcal{L}_{F_{n,s}}$ , wobei der Index n,s an  $\Psi_{n,s}$  jeweils auf den quark-Inhalt andeutet<sup>2</sup> (6.3)
- iii. und dem *mesonischen* Anteil,  $\mathcal{L}_M$ , welcher nur *skalare-, pseudoskalare- und Vektormesonen-* Felder enthält (6.4).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_{F_{n,s}} + \mathcal{L}_M \tag{6.1}$$

---

<sup>1</sup>Vergleiche dazu den Abschnitt (4.5)

<sup>2</sup> $n = nonstrange$ , also up und down, und  $s = strange$

$$\mathcal{L}_e = \bar{\Psi} (i\not{\partial} - \hat{m}_e) \Psi \quad (6.2)$$

$$\mathcal{L}_{F_{n,s}} = \sum_{\alpha} \left( \bar{\Psi}_n (i\not{\partial} - g_{\alpha} \hat{m}) \Psi_n + \bar{\Psi}_s (i\not{\partial} - g_{\alpha} \hat{m}) \Psi_s \right) \quad (6.3)$$

$$\mathcal{L}_M = \text{tr}(\partial_{\mu} \phi)^{\dagger} (\partial^{\mu} \phi) - \lambda_1 [\text{tr}(\phi^{\dagger} \phi)]^2 - \lambda_2 \text{tr}(\phi^{\dagger} \phi)^2 \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} & - m_0^2 (\text{tr}(\phi^{\dagger} \phi)) - m_v^2 \text{tr}(V^{\mu} V_{\mu}) \\ & - \text{tr}[\hat{H}(\phi + \phi^{\dagger})] + c (\det(\phi^{\dagger}) + \det(\phi)) \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei für  $\mathcal{L}_{F_{n,s}}$  noch über die Kopplungen der verschiedenen Felder  $\alpha = \omega, \rho, \phi, \sigma_n, \sigma_s$  summiert werden muss. Eine noch allgemeinere Version des Lagrangians findet man beispielsweise in [Par12].

### 6.1.1 Berechnung von $\mathcal{L}_e$

Da die Elektronen an keines der *quark*-Kondensate koppeln, kann man den Lagrangian  $\mathcal{L}_e$  (6.2), welcher den Elektronenbeitrag über ein freies Elektronengas beschreibt, zunächst vernachlässigen. Er taucht in Abschnitt (7.1.4) wieder auf, da sein Beitrag zum großkanonischen Potential sich analog zu dem der quarks bestimmt.

### 6.1.2 Berechnung von $\mathcal{L}_{F_{n,s}}$

Mit den für verschiedene Kondensate verschiedenen Yukawa-Kopplungen  $g_{\alpha}$  bildet sich nun der bereits nach *nonstrange*- und *strange* entkoppelte fermionische Anteil des Lagrangians zu

$$\mathcal{L}_{F_{n,s}} = \bar{\Psi}_n (i\not{\partial} - g_{\omega} \gamma^0 \omega - g_{\rho} \vec{\tau} \gamma^0 \rho - g_n \sigma_n) \Psi_n \quad (6.6)$$

$$+ \bar{\Psi}_s (i\not{\partial} - g_s \sigma_s - g_{\phi} \gamma^0 \phi) \Psi_s \quad (6.7)$$

wobei  $\Psi_n$  einen zweikomponentiger Spinor mit (*up*, *down*), und  $\Psi_s$  den ein-komponentigen Spinor für die strangeness (*strange*) darstellt.  $\gamma^0$  ist die zeitliche Komponente von  $\gamma^{\mu}$  (3.21), da keine der drei Raumrichtungen ausge-

zeichnet sein soll<sup>3</sup>.

### 6.1.3 Berechnung von $\mathcal{L}_M$

Da die Mesonen als statischer Hintergrund betrachtet werden, tauchen keine Ableitungen der Felder auf, damit können wir den ersten Term von  $\mathcal{L}_M$  in (6.1) vernachlässigen.

Im Fall von drei quark-flavor Kondensaten ist es sinnvoll, die Matrixdarstellung der *skalaren*- und *pseudoskalaren* Mesonen der Darstellung über die Generatoren vorzuziehen ([Mal12] oder auch [Gia12]). Die Summe über  $i$  und  $j$  läuft über die flavor: **up**, **down** und **strange**.

$$S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j q_i \quad (6.8)$$

$$P_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q}_j i\gamma^5 q_i \quad (6.9)$$

wobei  $\mathbf{S}$  den *skalaren*- und  $\mathbf{P}$  den *pseudoskalaren* Strom darstellt. Die Matrixdarstellung dann ist  $\phi_{ij} = S_{ij} + iP_{ij}$  [Par12].

Die *skalaren* Ströme haben bei *Nettostrangeness* einen Vakuumerwartungswert von Null, und das Isospin Triplet  $a_0^0$  hat bei  $T = 0$  keinen endlichen Isospin. Einträge auf den Nebendiagonalen entsprechen Kondensaten mit nichtverschwindender elektrischer Ladung, die aber im Vakuum nicht kondensieren können, so dass bei  $S_{ij}$  letztlich nur Diagonalterme überleben.

Bei den *pseudoskalaren* Strömen sorgt die Parität  $0^-$  für eine entsprechende Vereinfachung, dort überleben nämlich keine quark-Kondensate, so dass

---

<sup>3</sup>Unser Quarkstern soll ja sphärisch-symmetrisch sein

letztlich  $\phi_{ij} = S_{ij}$ .

$$\phi_{ij} = S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_n}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_n}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Der Index  $\sigma_{n,s}$  deutet auch hier jeweils auf den quark-Inhalt an. Da  $\phi = \phi^\dagger$  ergibt sich die Spur  $\mathbf{tr}$  der skalaren- und pseudoskalaren Felder in (6.1) zu

$$(\mathbf{tr}(\phi\phi^\dagger))^2 = \frac{1}{4}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)^2 \quad (6.11)$$

$$\mathbf{tr}(\phi\phi^\dagger) = \frac{1}{2}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2) \quad (6.12)$$

$m_0$  bricht die skalare,  $m_v$  die vektorielle Symmetrie *spontan*.

In *mean-field*-Näherung werden neben pseudoskalaren auch keine pseudo-vektoriellen Kondensate gebildet. Die Matrix der Vektormesonen  $V^\mu V_\mu = \sqrt{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  enthält jedoch nicht nur Diagonaleinträge, denn aufgrund der Kopplung an die Quarkfelder wird das Isospintriplett  $\vec{\rho} = \rho^+, \rho^0, \rho^-$ , neben  $\omega$  und  $\omega_s$  mitberücksichtigt werden.

$$V^\mu V_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega_n + \rho^0}{\sqrt{2}} & \rho^+ & 0 \\ \rho^- & \frac{\omega_n - \rho^0}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_s \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Damit ist

$$V^\mu V_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\omega_n + \rho^0)^2 + \rho^+ \rho^- & \left(\frac{\omega_n + \rho^0}{\sqrt{2}}\right) \rho^+ + \left(\frac{\omega_n - \rho^0}{\sqrt{2}}\right) \rho^+ & 0 \\ \left(\frac{\omega_n + \rho^0}{\sqrt{2}}\right) \rho^- + \left(\frac{\omega_n - \rho^0}{\sqrt{2}}\right) \rho^- & \frac{(\omega_n - \rho^0)^2}{2} \rho^+ \rho^- & 0 \\ 0 & 0 & \omega_s^2 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Bildet man nun die Spur, kann der Term  $\rho^+ \rho^-$  eliminiert<sup>4</sup> werden und  $\omega_s$  wird mit dem Isospinsinglett  $\phi$  identifiziert [Ris12].

$$\text{tr} V^\mu V_\mu = \frac{1}{2} (m_\omega \omega_n^2 + m_\rho \rho^2 + m_\phi \phi^2) \quad (6.15)$$

Mit der Matrix

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{h_n}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

bricht man die Symmetrie *explizit* und bestimmt die Spur des nächsten Terms in (6.1).

Der letzte Term in (6.1) hängt mit der axialen Anomalie [HDQ08] zusammen und trägt zur Masse der *isoskalaren-pseudoskalaren* Mesonen bei. Er korrigiert gewissermaßen die hohe Masse des  $\eta'$ -Mesons, welches als *Goldstone-Boson* mit fast einem GeV viel zu schwer wäre [Gia12], [Mos98] oder auch [ChS97].

Somit ist der *mesonische* Anteil (6.4) des Lagrangians

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -\frac{\lambda_1}{4} (\sigma_n^2 + \sigma_s^2)^2 - \frac{\lambda_2}{4} (\sigma_n^4 + \sigma_s^4) \\ &\quad - \frac{m_0^2}{2} (\sigma_n^2 + \sigma_s^2) + \frac{1}{2} (m_\omega^2 \omega^2 + m_\rho^2 \rho^2 + m_\phi^2 \phi^2) \end{aligned} \quad (6.17)$$

---

<sup>4</sup>Hier gilt die gleiche Argumentation wie bei  $a_0^0$

$$- +h_n\sigma_n + h_s\sigma_s + \frac{2\sigma_n^2\sigma_s}{\sqrt{2}} \cdot c - B \quad (6.18)$$

wobei noch die Bag-Konstante  $\mathbf{B}$  berücksichtigt wurde.

Letztlich ist aus Gleichung (6.1) der in diesem Modell verwendete Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{F_{n,s}} + \mathcal{L}_M \\ &= \bar{\Psi}_n (i\not{\partial} - g_\omega\gamma^0\omega - g_\rho\vec{\tau}\gamma^0\rho - g_n\sigma_n) \Psi_n \\ &+ \bar{\Psi}_s (i\not{\partial} - g_s\sigma_s - g_\phi\gamma^0\phi) \Psi_s \\ &+ \frac{1}{2} (m_\omega^2\omega^2 + m_\rho^2\rho^2 + m_\phi^2\phi^2) - \frac{\lambda_1}{4}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)^2 - \frac{\lambda_2}{4}(\sigma_n^4 + \sigma_s^4) \\ &- \frac{m_0^2}{2}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2) + \frac{2\sigma_n^2\sigma_s}{\sqrt{2}} \cdot c + h_n\sigma_n + h_s\sigma_s - B, \end{aligned} \quad (6.19)$$

geworden.

Das Potential  $\mathcal{V}(\omega, \rho, \varphi, \sigma_{n,s})$ <sup>5</sup> des Lagrangians (6.19) ist demnach

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -\frac{1}{2} (m_\omega^2\omega^2 + m_\rho^2\rho^2 + m_\phi^2\phi^2) + \frac{\lambda_1}{4}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4}(\sigma_n^4 + \sigma_s^4) \\ &+ \frac{m_0^2}{2}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2) - \frac{2\sigma_n^2\sigma_s}{\sqrt{2}} \cdot c - h_n\sigma_n - h_s\sigma_s + B \end{aligned} \quad (6.20)$$

---

<sup>5</sup>Auch bei der klassischen Lagrangefunktion geht das Potential mit negativem Vorzeichen ein:  $L = T - V$

# 7

## Die Zustandsgleichung

Eine Zustandsgleichung ist der funktionale Zusammenhang zwischen thermodynamischen Zustandsgrößen wie Druck, Dichte, Entropie oder Temperatur. Mit deren Hilfe kann der Zustand eines thermodynamischen Systems beschrieben werden.

### 7.1 Das großkanonische Potential

Um an die in dieser Arbeit benötigten Größen Druck und Energiedichte zu gelangen, behilft man sich der *Gibbs-Duhem*-Relation, welche das großkanonische Potential  $\Omega$  mit dem negativen Wert des Druckes<sup>1</sup>  $p$  in Verbindung bringt, denn  $\Omega = -p$ .

Zur Bestimmung des großkanonischen Potentials bedient man sich der Zustandssumme  $\mathcal{Z}$  aus der Thermodynamik, welche mit dem großkanonischen Potential  $\Omega$  folgendermaßen in Verbindung steht.

$$\Omega = -\frac{\ln \mathcal{Z}}{\beta} = -p \quad (7.1)$$

---

<sup>1</sup>Genauer gesagt entspricht der negative Druck dem Minimum des Potentials



wobei  $\beta = \frac{1}{T}$  ist. Vergleicht man den Boltzmann-Faktor  $e^{-\beta E}$  mit der Zeitentwicklung der Quantenmechanik  $e^{-\frac{i}{\hbar}E \cdot t}$ , führt dies zu  $\beta \hat{=} \frac{i \cdot t}{\hbar}$ . Eine imaginäre Zeit entspricht auf quantenmechanischer Ebene einer inversen Temperatur. Mit Hilfe des auf dieser Basis verwendeten **Matsubara**-Formalismus benutzt man im thermodynamischen Gleichgewicht die Pfadintegralmethode (Gleichung(7.2)), wobei über die *Quark- und Mesonenfelder* nach [HDQ08] integriert wird.

$$\mathcal{Z} = \int \prod_a \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{\left(\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{r} (\mathcal{L} + \bar{\Psi} \gamma^0 \mu \Psi)\right)} \quad (7.2)$$

In *mean-field-Näherung* jedoch wird nur über die *Quark*-Felder integriert, denn die Mesonenfelder werden ja als stationärer Hintergrund betrachtet.

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{\left(\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{r} [\bar{\Psi}_n(\dots) \Psi_n + \bar{\Psi}_s(\dots) \Psi_s + \bar{\Psi} \gamma^0 \mu \Psi - \mathcal{V}(\omega, \rho, \phi, \sigma_{n,s})]\right)} \quad (7.3)$$

$$\mathcal{Z} = \left[ \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{r} [\bar{\Psi}_n(\dots) \Psi_n + \bar{\Psi}_s(\dots) \Psi_s + \bar{\Psi} \gamma^0 \mu \Psi]} \right] e^{-\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{r} \mathcal{V}} \quad (7.4)$$

$$\mathcal{Z} = \left[ \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{r} [\bar{\Psi}_n(\dots) \Psi_n + \bar{\Psi}_s(\dots) \Psi_s + \bar{\Psi} \gamma^0 \mu \Psi]} \right] e^{-\beta \mathcal{V}} \quad (7.5)$$

Aus Gründen der Übersicht wurde mit

$$\bar{\Psi}_n(\dots) \Psi_n = \bar{\Psi} (i\not{\partial} - g_\omega \gamma^0 \omega - g_\rho \vec{\tau} \gamma^0 \rho - g_n \sigma_n) \Psi \quad (7.6)$$

sowie

$$\bar{\Psi}_s(\dots) \Psi_s = \bar{\Psi}_s (i\not{\partial} - g_s \sigma_s - g_\varphi \gamma^0 \varphi) \Psi_s \quad (7.7)$$

aus Gleichung (6.19) abgekürzt.

Den additiven Term im Exponenten der e-Funktion  $\bar{\Psi} \gamma^0 \mu \Psi$  aus (7.3) kombiniert man nun, wie auch bei [Mal12], mit dem fermionischen Anteil des  $\mathcal{L}_{F_{n,s}}$  mittels eines modifizierten chemischen Potentials  $\tilde{\mu}_{n,s}$  und einer effektiven Masse  $\tilde{m}_{n,s}$

$$\tilde{\mu}_n = \mu_n - g_\omega \omega + g_\rho \vec{\tau} \rho \quad (7.8)$$

$$\tilde{m}_n = g_n \sigma_n \quad (7.9)$$

$$\tilde{\mu}_s = \mu_s - g_\phi \phi \quad (7.10)$$

$$\tilde{m}_s = g_s \sigma_s \quad (7.11)$$

Der fermionische Anteil des Lagrangians (6.19) schreibt sich damit abkürzend

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_{n,s}} &= \bar{\Psi}_n (i\not{\partial} + \gamma^0 \tilde{\mu}_n - \tilde{m}_n) \Psi_n \\ &+ \bar{\Psi}_s (i\not{\partial} + \gamma^0 \tilde{\mu}_s - \tilde{m}_s) \Psi_s \end{aligned} \quad (7.12)$$

Das verbleibende Integral im Exponenten der e-Funktion

$$\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{r} (\bar{\Psi}_n (i\not{\partial} + \gamma^0 \tilde{\mu}_n - \tilde{m}_n) \Psi_n + \bar{\Psi}_s (i\not{\partial} + \gamma^0 \tilde{\mu}_s - \tilde{m}_s) \Psi_s) \quad (7.13)$$

kann man aufgrund der Periodizität der **Matsubara**-Frequenzen mit Hilfe der Fourier-Transformation (Gleichung (7.14)) beseitigen,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n, \vec{k}} e^{i(\nu_n \tau + \vec{k}\vec{r})} \phi_n(\vec{k}) \quad (7.14)$$

wobei die Terme der Reihe nach: *Normierung*, *Wellenfunktion* und *Entwicklungskoeffizienten* darstellen. Nun wird in (7.5) bzw. (7.13)  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  durch (7.14) ersetzt. Damit ergibt sich für den *nonstrange*-Anteil

$$\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{r} \frac{1}{V} \sum_{n, \vec{k}} e^{-i(\nu_n \tau + \vec{k}\vec{r})} \bar{\phi}_n(\vec{k}) (\dots)_n \sum_{m, \vec{k}} e^{i(\nu_m \tau + \vec{k}\vec{r})} \phi_m(\vec{k}) \quad (7.15)$$

Lässt man die Ableitung  $i\not{\partial} = i\gamma^\mu \partial_\mu$  wirken, bekommt man einen zeitlichen und einen räumlichen Anteil dazu, jedoch kann nun alles vor das Integral gezogen werden, so dass

$$\int_0^\beta d\tau \frac{1}{V} \sum_{n, \vec{k}} \sum_{m, \vec{k}} \bar{\phi}_n(\vec{k}) \phi_m(\vec{k}) (\dots)_n \int_V d^3\vec{r} e^{-i(\nu_n \tau + \vec{k}\vec{r})} e^{i(\nu_m \tau + \vec{k}\vec{r})} \quad (7.16)$$

wobei nun

$$(\dots)_n = \left( -i\gamma^0\nu_m - \vec{\gamma}\vec{k} + \gamma^0\tilde{\mu}_n - \tilde{m}_n \right) \quad (7.17)$$

Die Rechnung für den *strange*-Anteil verläuft analog, dort wäre

$$(\dots)_s = \left( -i\gamma^0\nu_m - \vec{\gamma}\vec{k} + \gamma^0\tilde{\mu}_s - \tilde{m}_s \right) \quad (7.18)$$

Benutzt man die Fourier-Transformierte (7.19) und die Fourier-Reihe (7.20) nach [DoS98]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax} e^{ia'x} dV = \delta(a - a') \quad (7.19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax} e^{ia'x} dx = \delta_{aa'} \quad (7.20)$$

so bricht die Summe  $\sum_{m,\vec{k}}$  zusammen und nach Umstellen erhält man

$$\frac{\beta}{V} \sum_{n,\vec{k}} \bar{\varphi}_n \varphi_n (\dots)_n \quad (7.21)$$

sowie

$$\frac{\beta}{V} \sum_{n,\vec{k}} \bar{\varphi}_s \varphi_s (\dots)_s \quad (7.22)$$

so dass letzten Endes

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta\mathcal{V}} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \int \mathcal{D}\Psi e^{\left( \frac{\beta}{V} \sum_{n,\vec{k}} (\bar{\varphi}_n \varphi_n (\dots)_n + \bar{\varphi}_s \varphi_s (\dots)_s) \right)} \quad (7.23)$$

Die beiden Ausdrücke in den Klammern, (7.17) und (7.18), identifiziert man als negative Propagatoren der **Green's Funktion**,  $-A^{-1}$  und  $-B^{-1}$ .

Die Zustandssumme hat nun folgende Form

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta\mathcal{V}} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \int \mathcal{D}\Psi e^{\left( \frac{\beta}{V} \sum_{n,\vec{k}} (\bar{\varphi}_n (-A^{-1})\varphi_n + \bar{\varphi}_s (-B^{-1})\varphi_s) \right)} \quad (7.24)$$

Gleichung (7.24) läßt sich nach Ausklammern eines Minus aus den beiden Propagatoren mit Hilfe der **Grassmann Identität** (7.25) weiter vereinfachen

chen<sup>2</sup>

$$\int \prod_{i=1}^n d\bar{\eta}_i d\eta_i e^{-\sum_{i,j} \eta_i A_{ij} \eta_j} = \det A \quad (7.25)$$

so dass mit

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta\mathcal{V}} \cdot \left[ \det_{\gamma,f,c,k} \frac{A^{-1}}{T} \cdot \det_{\gamma,f,c,k} \frac{B^{-1}}{T} \right] \quad (7.26)$$

$$= e^{-\beta\mathcal{V}} \cdot \beta \cdot \left[ \det_{\gamma,f,c,k} A^{-1} \cdot \det_{\gamma,f,c,k} B^{-1} \right] \quad (7.27)$$

letztlich nur noch vier Determinanten über die jeweiligen Freiheitsgrade zu berechnen sind.

### 7.1.1 Die Determinante über $\gamma$

Benutzt man nun die Dirac-Matrizen (3.20), um sich zunächst der  $\det_\gamma$  zu entledigen und benutzt für den *nonstrange*-Anteil die Abkürzungen (7.8) und (7.9), so lassen sich letztlich beide Propagatoren in Matrixform (7.28) überführen, wobei an dieser Stelle nur die Rechnung für den *nonstrange*-Propagator  $A^{-1}$  ausgeführt wird. Die Rechnung für den *strangen*-Anteil verläuft komplett analog, wobei die entsprechenden Abkürzungen, (7.10) und (7.11), dort eben von  $B^{-1}$  bestimmt werden.

Weiterhin wurde der Index  $n$  an  $\nu_n \rightarrow \nu_N$  geändert, so dass besser zwischen *Matsubara*-Frequenzen ( $N$ ) und *nonstrange* ( $n$ ) unterschieden werden kann.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= i \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \nu_N + \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \vec{k} - \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \tilde{\mu}_n + \tilde{m}_n \\ &= \begin{pmatrix} i\nu_N - \tilde{\mu}_n + \tilde{m}_n & \vec{\sigma} \vec{k} \\ -\vec{\sigma} \vec{k} & -i\nu_N + \tilde{\mu}_n + \tilde{m}_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.28)$$

---

<sup>2</sup>Das Volumen wurde aus diesem Grund ebenfalls auf Eins normiert

Damit ist die Zustandssumme über den *nonstrange*-Propagator  $A^{-1}$

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta\mathcal{V}} \cdot \det_{\gamma} \frac{1}{T} \cdot \begin{pmatrix} i\nu_N - \tilde{\mu}_n + \tilde{m}_n & \vec{\sigma}\vec{k} \\ -\vec{\sigma}\vec{k} & -i\nu_N + \tilde{\mu}_n + \tilde{m}_n \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Da die *nonstrange*-Matrix<sup>3</sup> eine  $4 \times 4$ -Matrix darstellt und nicht nur Diagonaleinträge enthält, bedient man sich zur Berechnung der Determinante Gleichung (7.30)<sup>4</sup>.

$$\det_{2N \times 2N} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \det_{N \times N} (AD - BD^{-1}CD) \quad (7.30)$$

Damit ergibt sich letztlich

$$\begin{aligned} \det_{\gamma} A^{-1} &= \det_{\gamma} \begin{pmatrix} i\nu_N - \tilde{\mu}_n + \tilde{m}_n & \vec{\sigma}\vec{k} \\ -\vec{\sigma}\vec{k} & -i\nu_N + \tilde{\mu}_n + \tilde{m}_n \end{pmatrix} \\ &= (\nu_N^2 - \tilde{\mu}_n^2 + \tilde{m}_n^2 + 2i\nu_N\tilde{\mu}_n + k^2)^2 \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$= (E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2)^2 \quad (7.32)$$

sowie für den *strangen* Anteil

$$\det_{\gamma} B^{-1} = (E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2)^2$$

wobei wir noch die *flavor*-abhängigen Energien

$$E_n^2 = k^2 + \tilde{m}_n^2 \quad (7.33)$$

<sup>3</sup>Die *strange*-Matrix sieht exakt genau so aus, bis aus den Index  $s$  an  $\tilde{\mu}_s$  und  $\tilde{m}_s$

<sup>4</sup>Im Übrigen ist dies für  $N = 1$  die Sarrus-Regel [Ris12]; zudem muss  $D$  invertierbar sein, was wir hier allerdings voraussetzen

und

$$E_s^2 = k^2 + \tilde{m}_s^2 \quad (7.34)$$

eingeführt haben. Die gesamte Zustandssumme hat sich bis dato also von Gleichung (7.3) auf

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta\mathcal{V}} \det_{f,c,k} \cdot \frac{1}{T^4} \left[ (E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2)^2 \cdot (E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2)^2 \right] \quad (7.35)$$

vereinfacht.

### 7.1.2 Die Determinante über den Funktionenraum

Die nächste Determinante, die es zu berechnen gilt, ist diejenige über den Funktionenraum  $\mathbf{k}$ . Diese kann man als eine Summe über die **Matsubara**-Frequenzen darstellen [Mal12], so dass aus (7.35) zunächst

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta\mathcal{V}} \det_{f,c} \cdot \frac{1}{T^4} \sum_{n,\vec{k}} \left[ (E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2)^2 \cdot (E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2)^2 \right] \quad (7.36)$$

wird.

An dieser Stelle ist es sinnvoller, bereits das thermodynamische Potential (7.1) auszuwerten, und die restlichen zwei Determinanten  $\det_{c,f}$  samt der Summe über die Matsubara Frequenzen im Anschluss zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z} \quad (7.37) \\ &= \mathcal{V} - \frac{1}{\beta} \ln \det_{c,f} \cdot \frac{1}{T^4} \sum_{n,\vec{k}} \left[ (E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2)^2 \cdot (E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2)^2 \right] \\ &= \mathcal{V} - \frac{1}{\beta} \cdot \text{tr}_{c,f} \sum_{n,\vec{k}} \ln \frac{1}{T^4} \left[ (E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2)^2 \cdot (E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2)^2 \right] \end{aligned}$$

wobei wir von

$$\ln \det A = \text{tr} \ln A \quad (7.38)$$

Gebrauch gemacht haben [Ris12].

Betrachtet man nun nur den Teil ab der Summe  $\sum_{n,\vec{k}}$ , dann

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[ \left( \frac{E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2}{T^2} \right)^2 \cdot \left( \frac{E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2}{T^2} \right)^2 \right] \quad (7.39)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \ln \left[ \frac{E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2}{T^2} \right] + \sum_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot \ln \left[ \frac{E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2}{T^2} \right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \ln \left[ \frac{E_n^2 - (i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2}{T^2} \right] + \ln \left[ \frac{E_n^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_n)^2}{T^2} \right] \right) \quad (7.40)$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \ln \left[ \frac{E_s^2 - (i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2}{T^2} \right] + \ln \left[ \frac{E_s^2 - (-i\nu_N + \tilde{\mu}_s)^2}{T^2} \right] \right) \quad (7.41)$$

wobei (7.40) den *nonstrangen*, und (7.41) den *strangen* Anteil darstellt. Im weiteren wurde in (7.40) und (7.41), da von  $\infty$  bis  $-\infty$  summiert wird,  $-\nu_N \rightarrow +\nu_N$  ausgetauscht.

Für die **Matsubara**-Frequenzen setzen wir nun  $\nu_N = (2n + 1)\pi \cdot T$  ein. Da die Rechnung für den *nonstrangen* und den *strangen* Anteil analog verläuft, führen wir die beiden Terme (7.8) und (7.10) zu einem  $\tilde{\mu}_{n,s}$ , ebenso wie  $E_n$  und  $E_s \rightarrow E_{n,s}$ , zusammen und erinnern uns dann am Ende der Rechnung ihrer eigentlich verschiedenen Bedeutung.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \ln \left[ (2n + 1)^2 \pi^2 + \frac{(E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s})^2}{T^2} \right] \quad (7.42)$$

Benutzt man

$$\ln(a + b) = \int_1^{b^2} \frac{1}{\theta^2 + a} d\theta^2 + \ln(a + 1) \quad (7.43)$$

und erkennt, daß  $a = (2n + 1)^2 \pi^2$  und  $b^2 = \frac{(E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s})^2}{T^2}$ , kann man die Summe (7.42) wie folgt umschreiben

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \int_1^{b^2} \frac{1}{\theta^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} d\theta^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln((2n + 1)^2 \pi^2 + 1) \quad (7.44)$$

Schreibt man den Nenner wie bei [Mal12] komplex

$$\theta^2 + (2n + 1)^2 \pi^2 = 4\pi^2(n - z)(n - z^*) \quad (7.45)$$

wobei

$$z = \frac{-i\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} \quad z^* = \frac{i\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} \quad (7.46)$$

und benutzt nach [Fun00], daß

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n - z)(n - z^*)} = \frac{\pi (\cot(\pi z) - \cot(\pi z^*))}{z - z^*} \quad (7.47)$$

sowie

$$\cot(x + iy) = \frac{-\sin(2x)}{\cos(2x) - \cosh(2y)} + i \frac{\sinh(2y)}{\cos(2x) - \cosh(2y)} \quad (7.48)$$

erhält man letztlich aus (7.42)

$$\int_1^{b^2} d\theta^2 \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln((2n + 1)^2 \pi^2 + 1) \quad (7.49)$$

Das Integral in (7.49) löst man mit  $d\theta^2 = 2\theta d\theta$ , der Substitution  $\alpha = e^{-\theta} + 1$  und der Ableitung  $\frac{d\alpha}{d\theta} = -e^{-\theta}$  wie folgt

$$\int_1^{b^2} d\theta^2 \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right] = \int_1^{\sqrt{b^2}} 2\theta d\theta \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\theta}}{e^{-\theta} + 1} \right] \quad (7.50)$$

$$= \int_1^b 2\theta d\theta \frac{1}{2\theta} - 2 \int_1^b \frac{\theta}{\theta} d\theta \frac{e^{-\theta}}{\alpha} \quad (7.51)$$

$$= [b - 1] - 2 \int_1^b \frac{d\alpha}{\alpha} \frac{e^{-\theta}}{-e^{-\theta}} \quad (7.52)$$

$$= [b - 1] + 2 \int_1^b \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (7.53)$$

$$= [b - 1] + 2 \ln(\alpha)|_1^b \quad (7.54)$$

$$= [b - 1] + 2 \ln(1 + e^{-\theta})|_1^b \quad (7.55)$$



$$= [b - 1] + 2 \ln(1 + e^{-b}) - 2 \ln(1 + e^{-1})$$

Man resubstituiert  $a$  und  $b$  an dieser Stelle und führt alle nicht von  $\tilde{\mu}_{n,s}$  und  $E_{n,s}$  abhängigen Terme, also diejenigen, die nur Zahlen enthalten, zu einem  $\tilde{C} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln((2n+1)^2 \pi^2 + 1) - 1 - 2 \ln(1 + e^{-1})$  zusammen. Dieser Term repräsentiert die konstante Vakuumenergie, die beim Ableiten von  $\Omega$  allerdings dann keinen Beitrag mehr leistet. Letztlich ist aus (7.37) mit  $-\nu_N \rightarrow +\nu_N$  zunächst (7.40) und (7.41), dann über (7.42) das großkanonische Potential zu

$$\Omega = \mathcal{V} - \frac{1}{\beta} \text{tr}_{c,f} \sum_k \frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T} + 2 \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T}} \right) + \tilde{C} \quad (7.56)$$

geworden.

### 7.1.3 Die Determinanten über den Farb- und flavor-Raum

Da in Abschnitt (7.1.2) aus Gründen der einfacheren Handhabung entschieden wurde, gleich das thermodynamische Potential auszuwerten und von der Gleichung (7.37) nun die Summe im thermodynamischen limes  $\sum_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$  übergehen wird, bleiben im Prinzip nur noch die beiden Spuren<sup>5</sup> über *color* und *flavor* auszuwerten.

$$\Omega = \mathcal{V} - \frac{1}{\beta} \text{tr}_{c,f} \sum_k \frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T} + 2 \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T}} \right) + \tilde{C} \quad (7.57)$$

$$= \mathcal{V} - \frac{1}{\beta} \text{tr}_{c,f} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T} + 2 \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T}} \right) \right] + \tilde{C}$$

$$= \mathcal{V} - \frac{3}{\beta} \text{tr}_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ 2 \frac{E_{n,s}}{T} + 2 \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T}} \right) \right] + \tilde{C} \quad (7.58)$$

$$= \mathcal{V} - \frac{2 \cdot 3}{\beta} \text{tr}_f \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{E_{n,s}}{T} + \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T}} \right) \right] + \tilde{C} \quad (7.59)$$

$$= \mathcal{V} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4\pi}{(2\pi)^3 \beta} \text{tr}_f \int k^2 dk \left[ \frac{E_{n,s}}{T} + \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T}} \right) \right] + \tilde{C} \quad (7.60)$$

<sup>5</sup>Denn es wurde ja von (7.38) Gebrauch gemacht

$$= \mathcal{V} - \frac{3}{\pi^2 \beta} \text{tr}_f \int k^2 dk \left[ \frac{E_{n,s}}{T} + \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{n,s} \pm \tilde{\mu}_{n,s}}{T}} \right) \right] + \tilde{C} \quad (7.61)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Farb-Freiheitsgrade liefert die Spur in (7.57) über den *color*-Raum einfach einen Faktor 3. In (7.60) wurde  $d^3k = 4\pi k^2 dk$  ersetzt. Die Spur über den *flavor*-Raum sammelt einfach alle *flavor*-Terme zusammen, so daß unser großkanonisches Potential komplett ausgeschrieben

$$\Omega = \mathcal{V} - \frac{3}{\pi^2 \beta} \int_0^\infty k^2 dk \cdot \mathcal{M} + \tilde{C} \quad (7.62)$$

wobei  $\mathcal{V}$  aus (6.20)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & -\frac{1}{2} (m_\omega^2 \omega^2 + m_\rho^2 \rho^2 + m_\varphi^2 \varphi^2) + \frac{\lambda_1}{4} (\sigma_n^2 + \sigma_s^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (\sigma_n^4 + \sigma_s^4) \\ & + \frac{m_0^2}{2} (\sigma_n^2 + \sigma_s^2) - \frac{2\sigma_n^2 \sigma_s}{\sqrt{2}} \cdot c - h_n \sigma_n - h_s \sigma_s + B \end{aligned} \quad (7.63)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \ln(1 + e^{-\beta(E_n + \tilde{\mu}_u)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_n - \tilde{\mu}_u)}) \\ & + \ln(1 + e^{-\beta(E_n + \tilde{\mu}_d)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_n - \tilde{\mu}_d)}) \\ & + \ln(1 + e^{-\beta(E_s + \tilde{\mu}_s)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_s - \tilde{\mu}_s)}) \end{aligned} \quad (7.64)$$

Da neben der Raumrichtung (vergleiche (6.1.2)) auch keine Richtung des Isospins ausgezeichnet sein soll, wählt man eine Basis in (7.8) für  $\vec{\tau}$ . Üblicherweise fällt nach Gleichung (3.19) die Wahl auf  $\tau_3$ , so dass bei den *down*-quarks ein Vorzeichenwechsel für das Feld  $\rho$  stattfindet. Nach Einsetzen von (7.8), welches zu eben zu jenem Zweck in seine Bestandteile **up** und **down** aufgespalten wurde, und (7.10) lautet  $\mathcal{M}$  letztlich detailliert ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \ln \left( 1 + e^{\frac{-E_n + \mu_u - g_\omega \omega - g_\rho \rho}{T}} \right) + \ln \left( 1 + e^{\frac{-E_n - \mu_u + g_\omega \omega + g_\rho \rho}{T}} \right) \\ & + \ln \left( 1 + e^{\frac{-E_n + \mu_d - g_\omega \omega + g_\rho \rho}{T}} \right) + \ln \left( 1 + e^{\frac{-E_n - \mu_d + g_\omega \omega - g_\rho \rho}{T}} \right) \\ & + \ln \left( 1 + e^{\frac{-E_s + \mu_s - g_\phi \phi}{T}} \right) + \ln \left( 1 + e^{\frac{-E_s - \mu_s + g_\phi \phi}{T}} \right) \end{aligned} \quad (7.65)$$

lautet. In (7.65) finden sich alle Teilchen- und Antiteilchenbeiträge<sup>6</sup> der Quark-*flavor*: **up**, **down** und **strange**.

### 7.1.4 Der Beitrag der Elektronen

Da in einem **kompakten** Stern die Nettoladung Null betragen muss<sup>7</sup>, muss ein *Elektronen*-Beitrag berücksichtigt werden. Das großkanonische Potential des bisher vernachlässigten Lagrangians  $\mathcal{L}_e$  aus (6.1) errechnet sich beinahe analog zu dem der Quarks. Beinahe nur, da man keinen Farbfreiheitsgrad zu berücksichtigen hat, somit ist der Vorfaktor ein anderer.

$$\Omega_e = -\frac{2}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left( 1 + e^{-\frac{E_{k,e} - \mu_e}{T}} \right) \quad (7.66)$$

wobei  $E_{k,e} = \sqrt{k^2 + m_e^2}$  und  $\mu_e$  das chemische Potential der Elektronen darstellen.

## 7.2 Die Gap-equations

Das komplette großkanonische Potential (7.62) ist, feldtheoretisch betrachtet, eine Funktion seiner Felder  $\sigma_n$ ,  $\sigma_s$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  und  $\phi$ . Um nun den Grundzustand zu finden, minimieren wir das Potential  $\Omega$  für jedes Feld. Die so erhaltenen Bewegungsgleichungen erlauben uns die Werte für die Felder zu bestimmen. Der Einfachheit und Übersicht halber definiert man bereits vor der Rechnung einige zu (7.8) und (7.10) ähnliche Abkürzungen, die das chemische Potential der jeweiligen flavor berücksichtigen:

$$\tilde{\mu}_u = \mu_u - g_\omega \omega - g_\rho \rho \quad (7.67)$$

<sup>6</sup>Antiteilchenbeiträge stehen „links“, Teilchenbeiträge „rechts“ in (7.65)

<sup>7</sup>Sonst würde er aufgrund der verglichen mit der Gravitation um den Faktor  $10^{40}$ -fach stärkeren elektromagnetischen Kraft sich gar nicht gebildet haben können bzw. explodieren

$$\tilde{\mu}_d = \mu_d - g_\omega \omega + g_\rho \rho \quad (7.68)$$

$$\tilde{\mu}_s = \mu_s - g_\phi \phi \quad (7.69)$$

Weiterhin die modifizierten Verteilungsfunktionen [Mal12]

$$f(\tilde{\mu}_f) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_f - \tilde{\mu}_f)}} \quad (7.70)$$

und

$$f(-\tilde{\mu}_f) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_f + \tilde{\mu}_f)}} \quad (7.71)$$

wobei (7.70) für *Teilchen*- und (7.71) für *Antiteilchen*beiträge stehen. Außerdem wird über den flavor  $f = u, d, s$  summiert.

Somit

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_n} = 0 \quad (7.72)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 \sigma_n (\sigma_n^2 + \sigma_s^2) + \frac{\lambda_2}{2} \sigma_n^3 + m_{\sigma_n}^2 \sigma_n - h_n \\ &+ \frac{3g_n^2 \sigma_n}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk \cdot k^2}{E_n} (f(\tilde{\mu}_u) + f(-\tilde{\mu}_u) + f(\tilde{\mu}_d) + f(-\tilde{\mu}_d)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_s} = 0 \quad (7.73)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 \sigma_s (\sigma_n^2 + \sigma_s^2) + \lambda_2 \sigma_s^3 + m_{\sigma_s}^2 \sigma_s - h_s \\ &+ \frac{3g_s^2 \sigma_s}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk \cdot k^2}{E_s} (f(\tilde{\mu}_s) + f(-\tilde{\mu}_s)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = 0 \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} &= -m_\omega^2 \omega \\ &+ \frac{3g_\omega}{\pi^2} \int_0^\infty dk \cdot k^2 (f(\tilde{\mu}_u) - f(-\tilde{\mu}_u) + f(\tilde{\mu}_d) - f(-\tilde{\mu}_d)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0 \quad (7.75)$$

$$\begin{aligned} &= -m_\rho^2 \rho \\ &+ \frac{3g_\rho}{\pi^2} \int_0^\infty dk \cdot k^2 (f(\tilde{\mu}_u) - f(-\tilde{\mu}_u) - f(\tilde{\mu}_d) + f(-\tilde{\mu}_d)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = 0 \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned}
 &= -m_\phi^2 \phi \\
 &+ \frac{3g_\phi}{\pi^2} \int_0^\infty dk \cdot k^2 (f(\tilde{\mu}_s) + f(-\tilde{\mu}_s))
 \end{aligned}$$

### 7.2.1 Temperatur-Approximation $T \rightarrow 0$

Auch wenn die Temperatur des kompakten Objektes noch im keV-Bereich liegt<sup>8</sup>, kann man nichtsdestrotz eine Approximation von  $T \rightarrow 0$  annehmen. Dies ist gerechtfertigt, da diese Temperatur<sup>9</sup> gegenüber den quantenmechanischen Energien<sup>10</sup>, welche in solchen kompakten Objekten herrschen, vernachlässigbar ist.

Das chemische Potential  $\mu \gg T$ . Bei  $T = 0$  spricht man von der so genannten **Fermi-Kante**, bis zu welcher die Energiezustände besetzt sind, und die bei kleinen Temperaturen  $T \approx 0$  „aufweicht“.

Somit lässt sich bei  $T = 0$  eine Fermi-Energie  $E_F$

$$E_F(k_F) = \sqrt{k_F^2 + \tilde{m}^2} = \tilde{\mu}(T = 0) \quad (7.77)$$

wobei  $E_F$  *flavor*-abhängig entweder (7.33) oder (7.34),  $\tilde{m}$  jeweils (7.9) bzw. (7.11) und  $\tilde{\mu}_f$  entweder (7.67), (7.68) oder (7.69) repräsentiert, definieren.

Mit der Relation

$$\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \lim_{T \rightarrow 0} \rightarrow \Theta(\mu - E) \quad (7.78)$$

wobei  $\Theta(x)$  die Heaviside-Funktion ist, verschwinden die Antiteilchenbeiträge in den Gleichungen (7.72), (7.73), (7.74), (7.75) und (7.76).

Benutzt man weiterhin

$$T \cdot \ln(1 + e^{\frac{x}{T}}) \lim_{T \rightarrow 0} \rightarrow x\Theta(x) \quad (7.79)$$

so vereinfacht sich der übrig gebliebene Teilchen-Anteil von  $\mathcal{M}$  aus (7.65), und das großkanonische Potential (7.62), welches fortan auch den Elektro-

<sup>8</sup>Ein eV  $\simeq$  11610 K

<sup>9</sup>Diese liegen im MeV-Bereich

<sup>10</sup>Aufgrund des Pauli-Prinzipes haben die dicht gepackten Teilchen sehr hohe Energien

nenbeitrag berücksichtigt, schreibt sich wie folgt

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \Omega_e + \mathcal{V} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{f=u,d,s} \int_0^{k_F^f} dk \cdot k^2 (E_{n,s} - \tilde{\mu}_f) \\
 &= \Omega_e + \mathcal{V} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{f=u,d,s} \int_0^{k_F^f} dk \cdot k^2 \left( \sqrt{k_{n,s}^2 + \tilde{m}^2} - \tilde{\mu}_f \right) \quad (7.80)
 \end{aligned}$$

Die Gap-equations (7.72) bis (7.76) vereinfachen sich dann letztlich zu

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_n} &= 0 \quad (7.81) \\
 &= \lambda_1 \sigma_n (\sigma_n^2 + \sigma_s^2) + \frac{\lambda_2}{2} \sigma_n^3 + m_{\sigma_n}^2 \sigma_n - h_n \\
 &\quad + \frac{3g_n^2 \sigma_n}{\pi^2} \left( \int_0^{k_F^u} \frac{dk \cdot k^2}{E_n} + \int_0^{k_F^d} \frac{dk \cdot k^2}{E_n} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_s} &= 0 \quad (7.82) \\
 &= \lambda_1 \sigma_s (\sigma_n^2 + \sigma_s^2) + \lambda_2 \sigma_s^3 + m_{\sigma_s}^2 \sigma_s - h_s \\
 &\quad + \frac{3g_s^2 \sigma_s}{\pi^2} \int_0^{k_F^s} \frac{dk \cdot k^2}{E_s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} &= 0 \quad (7.83) \\
 &= -m_\omega^2 \omega \\
 &\quad + \frac{3g_\omega}{\pi^2} \left( \int_0^{k_F^u} dk \cdot k^2 + \int_0^{k_F^d} dk \cdot k^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} &= 0 \quad (7.84) \\
 &= -m_\rho^2 \rho \\
 &\quad + \frac{3g_\rho}{\pi^2} \left( \int_0^{k_F^u} dk \cdot k^2 - \int_0^{k_F^d} dk \cdot k^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} &= 0 \quad (7.85) \\
 &= -m_\phi^2 \phi + \frac{3g_\phi}{\pi^2} \int_0^{k_F^s} dk \cdot k^2
 \end{aligned}$$

Die in (7.81) und (7.82) auftauchenden Integrale löst man nach Einsetzen von (7.77) mit einer Integraltafel, wie sie beispielsweise in [Bro87] zu finden<sup>11</sup> ist. Die thermodynamischen Relationen der Teilchendichten  $\mathbf{n}$  für *flavor* und *Elektronen* liefern

$$\begin{aligned} n_f &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_f} \\ &= \frac{3}{\pi^2} \int_0^{k_F^f} dk \cdot k^2 \end{aligned} \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} n_e &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_e} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F^e} dk \cdot k^2 \end{aligned} \quad (7.87)$$

so dass mit der nonstrangen **Quarkdichte**  $n_q$

$$n_q = n_u + n_d \quad (7.88)$$

und der nonstrangen **Isospindichte**  $n_{iso}$

$$n_{iso} = n_u - n_d \quad (7.89)$$

die Gleichungen (7.83) und (7.84) nach den *nonstrangen* Vektormesonen umgestellt werden können.

$$\omega = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} n_q \quad (7.90)$$

$$\rho = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} n_{iso} \quad (7.91)$$

Für das *strange* Vektormeson ergibt sich

$$\phi = \frac{g_\phi}{m_\phi^2} n_s \quad (7.92)$$

---

<sup>11</sup>Seite 46: Integral 194

Aus der Definition des großkanonischen Potentials [DoS98]

$$\Omega = \epsilon - T_s - \sum_i \mu_i n_i \quad (7.93)$$

wobei  $\epsilon$  die Energiedichte und  $\mathbf{s}$  die Entropiedichte<sup>12</sup> darstellen, lässt sich mit (7.90), (7.91) und (7.92) die Energiedichte  $\epsilon$  zu

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_e + \frac{\lambda_1}{4}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4}(\sigma_n^4 + \sigma_s^4) \\ &+ \frac{m_0^2}{2}(\sigma_n^2 + \sigma_s^2) - \frac{2\sigma_n^2\sigma_s}{\sqrt{2}} \cdot c - h_n\sigma_n - h_s\sigma_s + B \\ &+ \frac{1}{2}(m_\omega^2\omega^2 + m_\rho^2\rho^2 + m_\phi^2\phi^2) \\ &+ \frac{3}{\pi^2} \sum_{f=u,d,s} \int_0^{k_F^f} dk \cdot k^2 \left( \sqrt{k_{n,s}^2 + \tilde{m}^2} \right) \end{aligned} \quad (7.94)$$

definieren.

### 7.3 Ladungsneutralität

Da die Teilchendichte  $n_f$  (7.86) der Quarks und die der Elektronen  $n_e$  (7.87) vom jeweiligen chemischen Potential  $\mu_f$  und  $\mu_e$  abhängt, muss die gesamte Ladungsdichte  $\mathbf{nQ}$  zur Gewährleistung der Ladungsneutralität über die chemischen Potentiale der Quarks  $\mu_f$  und der Elektronen  $\mu_e$  Null ergeben.

$$\sum_{i=u,d,s,e} = Q_i n_i = \frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0 \quad (7.95)$$

Dieser Bedingung werden wir in Abschnitt (8.1) wieder begegnen.

<sup>12</sup>Bei der Annahme  $T = 0$  fällt diese jedoch nicht weiter ins Gewicht



## 7.4 Festlegen der Parameter

Die fünf „vereinfachten“ Gap-equations (7.81) bis (7.85) stellen nun fünf Gleichungssysteme für fünf Unbekannte<sup>13</sup> dar. Diese Gleichungen gilt es unter Gewahrung der Ladungsneutralität (7.95) numerisch zu lösen.

Nun kann man glücklicherweise bereits im Vorfeld einige Parameter der Gleichungen festlegen. Beispielsweise sind die hier betrachteten Felder Mesonen-kondensate (vergleiche Abschnitt (6.1)), bestehend aus Quark(s) und Anti-quark(s) (Tabelle (7.1)), sprich: **reelle** Teilchen, denen man also auch eine Masse zuordnen kann. Diese findet man für gewöhnlich in der *Particle Data Group* [PDG12].

Meson	Typ/Isospin	Quarkinhalt	Masse (MeV)
$\sigma_n$	skalar ( $I = 0$ )	$( u\bar{u}\rangle +  d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2}$	400 – 1000
$\sigma_s$	skalar ( $I = 0$ )	$( u\bar{u}\rangle +  d\bar{d}\rangle +  s\bar{s}\rangle)/\sqrt{3}$	$\sigma_n \cdot \sqrt{2}$
$\omega = \omega(782)$	vektoriell ( $I = 0$ )	$( u\bar{u}\rangle +  d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2}$	$782.65 \pm 1.2 \cdot 10^{-1}$
$\rho^+ = \rho(770)$	vektoriell ( $I = 1$ )	$ u\bar{d}\rangle$	$775.49 \pm 3.4 \cdot 10^{-1}$
$\rho^- = \rho(770)$	vektoriell ( $I = 1$ )	$ d\bar{u}\rangle$	$775.49 \pm 3.4 \cdot 10^{-1}$
$\rho^0 = \rho(770)$	vektoriell ( $I = 1$ )	$( u\bar{u}\rangle +  d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2}$	$775.49 \pm 3.4 \cdot 10^{-1}$
$\phi = \phi(1020)$	vektoriell ( $I = 0$ )	$( u\bar{u}\rangle +  d\bar{d}\rangle +  s\bar{s}\rangle)/\sqrt{3}$	$1019.455 \pm 2 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 7.1: Die Mesonenfelder

Für die Masse des Elektrons nehmen wir den gängigen Wert von 511KeV an.

<sup>13</sup>Nämlich die Felder  $\sigma_n$ ,  $\sigma_s$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  und  $\phi$

Das strange  $\sigma_s$  in Tabelle (7.1) könnte neusten Veröffentlichungen zufolge auch das  $f_0(1710)$ -Meson sein, also eine weitaus größere Masse haben (vergleiche dazu [Par12]). Auf einen experimentell festgelegten Wert, der nur um einige Prozent abweicht, konnte man sich bisher auch ebensowenig für das  $\sigma_n$  festlegen, obwohl es beispielsweise das  $f_0(980)$  sein könnte.

Unter anderem auch aus diesem Grund wird die Masse  $m_\sigma$  der Sigma-Mesonen im Bereich von 400-1000MeV variiert, um zu studieren, wie sich die anderen Parameter verändern, und ob der beobachtete Bereich für das in dieser Arbeit verwendete Modell physikalisch sinnvoll ist.

Andere Teilchenmassen, die zur Bestimmung verschiedener Konstanten benötigt werden, entnimmt man ebenfalls der [PDG12]:

$$m_\pi = 138MeV \quad (7.96)$$

$$m_K = 496MeV \quad (7.97)$$

$$m_\eta = 547.5MeV \quad (7.98)$$

$$m_{\eta'} = 957.78MeV \quad (7.99)$$

wobei  $m_K$  die Masse des Kaons darstellt.

Da wir die Komponenten des pseudoskalaren Isektors  $\vec{\pi}$  aus Gründen der Simplifizierung nicht unterscheiden, nehmen wir für die Masse des Pions  $m_\pi$  den hier angegebenen Mittelwert (7.96) an.

Analog zu [CSR00] bestimmt man die Werte der Kondensate über die Pion- und Kaon Zerfallskonstanten der schwachen Wechselwirkung, die dem Vakuumenerwartungswert der jeweiligen Teilchen entsprechen.

$$\langle \sigma_n \rangle = f_\pi = 92.4MeV \quad (7.100)$$

$$\langle \sigma_s \rangle = \frac{2f_K - f_\pi}{\sqrt{2}} = 94.47MeV \quad (7.101)$$

wobei  $f_K \approx \frac{159.8}{\sqrt{2}}MeV$ .

Die konstanten Einträge der Matrix (6.16)  $h_n$  und  $h_s$ , die die Symmetrie explizit brechen, ergeben sich nach [HDQ08] zu

$$h_n = f_\pi m_\pi^2 \quad (7.102)$$

$$h_s = \sqrt{2}f_K m_K^2 - \frac{h_n}{\sqrt{2}} \quad (7.103)$$

Die *skalare* Kopplung  $\mathbf{g}$  (vergleiche Abschnitt (6.1)) von *up*- und *down* quark bestimmt man über die konstituente Quark-Masse<sup>14</sup>, die wir in Abschnitt (8.2) zur Untersuchung des Einflusses der skalaren Kopplung variieren werden.

$$g_{u,d} = g_n = \frac{m_q}{f_\pi} \quad (7.104)$$

Mit ihr ändert sich auch die skalare Kopplung des *strange*-quarks

$$g_s = g_n \cdot \sqrt{2} \quad (7.105)$$

Die *vektorielle* Einkopplung steht nach [TBS12] in folgendem Verhältnis

$$g_\omega = g_\rho = \frac{g_\phi}{\sqrt{2}} \quad (7.106)$$

Die Konstante  $\lambda_1$  hängt vom  $m_0^2$  ab, welches seinerseits von der Masse  $m_\sigma$  des Sigma Mesons<sup>15</sup> abhängt. Es ergibt sich, erneut nach [HDQ08] folgender Zusammenhang

$$m_\sigma^2(m^2, \lambda_1) \leftrightarrow m^2(\lambda_1) \leftrightarrow m_\sigma^2(m^2(\lambda_1), \lambda_1) \leftrightarrow m_\sigma^2(\lambda_1) \quad (7.107)$$

welcher numerisch für verschiedene  $m_\sigma$  gelöst werden muss.

Die Konstante  $\lambda_2$  hingegen

$$\lambda_2 = \frac{3m_K^2(2f_K - f_\pi) - m_\pi^2(2f_K + f_\pi) - 2(m_{\eta'}^2 + m_\eta^2)(f_K - f_\pi)}{(3f_\pi^2 + 8f_K(f_K - f_\pi))(f_K - f_\pi)} \quad (7.108)$$

und der Term  $\mathbf{c}$ , welcher die U(1)-Anomalie berücksichtigt, stehen in folgendem Verhältnis

$$c = \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{f_K - f_\pi} - \lambda_2 \cdot (2f_K - f_\pi) \quad (7.109)$$

<sup>14</sup> $m_q \approx 300 \text{ MeV}$ : etwa ein Drittel der Masse eines Nukleons

<sup>15</sup>welches von 400-1000MeV variiert wird

Für den Fall  $c = 0$ , also ohne axiale Anomalie, vereinfacht sich Gleichung (7.108) allerdings zu

$$\lambda_2 = \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{2f_K - f_\pi} \cdot (f_K - f_\pi) \quad (7.110)$$

All die Relationen und Parameter werden in einem c - Programm numerisch gelöst. Die multidimensionale Nullstellensuche der Gap-Gleichungen (Gleichungen (7.81) bis (7.85)) übernimmt eine Routine aus der gnu-scientific library, welche im code eingebettet wurde. Die so gewonnene Zustandsgleichung wird in einen anderen, TOV genannten, code eingelesen, welcher die Masse-Radius Relation für die jeweilige Zustandsgleichung errechnet. Für die Überprüfung der vollen Funktionalität der beiden codes wurden Ergebnisse von [Mal12], [TBs12] und [HDQ08] nachgestellt.

#### 7.4.1 Die Stabilitätsbedingung für einen reinen Quarkstern auf Elementarteilchenniveau

In Abschnitt 2.8.1 haben wir bereits eine Stabilitätsbedingung, welche aus den Gleichungen der ART hervorgeht, diskutiert. An dieser Stelle nun wird eine zweite Bedingung vorgestellt, welche sich, im Gegensatz zu jener in Abschnitt 2.8.1, auf Elementarteilchen bezieht.

Die Welt um uns herum besteht aus hadronischer Materie, bei welcher man bisher nicht beobachten konnte, dass sie spontan in ihre quark-Bausteine up- und down zerfällt. Das bedeutet, dass die Energie  $E$  pro Baryon  $A$  in jedem Fall größer als die Bindungsenergie vom stabilsten bekannten Element, nämlich Eisen  ${}^{56}\text{Fe}$ , sein muss [Mal12].

Im Fall von drei-flavor quark Materie, welche einen kompakten Stern beschreiben soll, ist dies nun anders. Die Idee dahinter ist nach [QmC11], dass die Präsenz des strange-quarks die Energy pro Baryon absenkt, so dass man unterhalb der Energie von stabiler hadronischer Materie liegt (Gleichung 7.111). Mit anderen Worten, ein Drittel der Masse eines Neutrons ( $\simeq 940\text{MeV}$ ) abzüglich seiner Bindungsenergie von ca.  $16\text{MeV}$  ist kleiner als die Energie pro Baryon in dem kompakten Objekt, welches dann bis hin zu

seiner Oberfläche<sup>16</sup> aus einem reinen Quark-Gluon Plasma besteht.

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{p=0} = \left. \frac{\epsilon}{n_q} \right|_{p=0} \leq 308 \text{ MeV} \quad (7.111)$$

mit  $\epsilon$  gleich der Energiedichte und  $n_q$  die Quarkdichte.

Üblicherweise sorgt die Präsenz von *strangeness* in quark- und hadronischer Materie zu einem weiteren Freiheitsgrad, auf welches die Energie mitverteilt werden muss. Daher wird im Resultat die Zustandsgleichung weicher und somit erreichen seltsame Quark- und Hybridsterne verhältnismäßig kleinere Massen als Neutronensterne oder Sterne, die aus 2-flavor-Quark Materie bestehen.

Die Ergebnisse dieser Überlegungen stellen wir in Abschnitt (8.6.1) vor.

---

<sup>16</sup>An seiner Oberfläche herrscht kein Druck  $\rightarrow p = 0$

# 8

## Ergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir die Ergebnisse des verwendeten Modelles vor. Zunächst überprüfen wir, ob tatsächlich Ladungsneutralität im System gewährleistet ist. Anschliessend variieren wir die *konstituente* Quarkmasse  $m_q$ , um den Einfluss des skalaren Parameters  $\mathbf{g}$  (Gleichung (7.104)) auf die Zustandsgleichung und die Masse-Radius-Relation zu untersuchen.

Im darauf folgenden Abschnitt variieren wir dann die Vektorkopplung  $g_\omega$ , um deren Einfluß näher zu betrachten.

Da die Masse des Sigma Mesons  $m_\sigma$  zwischen  $400 - 1000\text{MeV}$  liegen kann, wird diese, ebenso wie die Bag-Konstante  $\mathbf{B}$  im darauf folgenden Abschnitt, variiert.

Bei der Variation einer Größe wurden die anderen jeweils auf einen konstanten Wert fixiert.  $m_q$  wurde dabei auf einem Wert von  $300\text{MeV}$  gelassen. Die Bag-Konstante wurde auf  $Bag^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$  gesetzt, die beiden anderen fixen Parameter  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  sowie  $g_\omega = 2.0$ , wobei sich die *vektoriellen* Kopplungen  $g_\rho$  und  $g_\phi$  gemäß Gleichung (7.106) einstellen. Warum es zu dieser Wahl kam, wird nach den jeweiligen Abschnitten, in denen die Variation dieser Parameter diskutiert wird, klar werden.

Anschliessend schränken wir den Parameterbereich auf Grund der gewonnenen Erkenntnisse ein und überprüfen die Stabilitätsbedingung (7.111) für reine Quarksterne.

## 8.1 Ladungsneutralität

Da in unserem Stern Ladungsneutralität herrschen soll, ist es zunächst erforderlich, eben jene Bedingung nach Gleichung (7.95) zu überprüfen. In Abbildung (8.1) sieht man, dass der Phasenübergang bei den hier verwendeten Parametern  $m_q = 300\text{MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$  bei etwas über  $300\text{MeV}$  liegt.

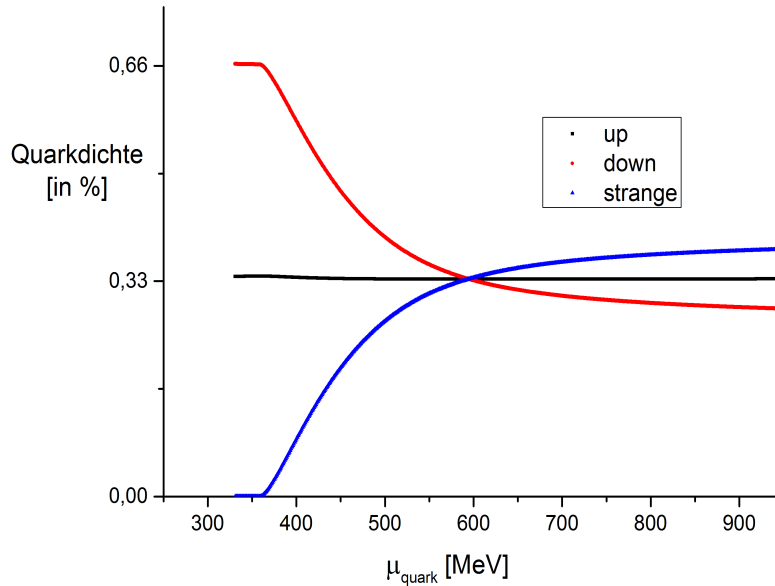


Abbildung 8.1: Die normierte (Ladungs-)dichteverteilung von *up*- *down*- und *strange* Quark in Abhängigkeit von  $\mu_q$ . Aus diesem Graphen kann man sowohl die Ladungsneutralität als auch die Dichteverteilung ablesen.

Das dies sinnvoll ist, werden die nächsten Abschnitte offenbaren. Wie dem auch sei, man erkennt dass das *strange* quark bei  $\mu < 360 \text{ MeV}$  zunächst noch keinen Beitrag leistet, dafür sind doppelt so viele *down*- wie *up* quarks vorhanden. Das System startet ladungsneutral (vergleiche Tabelle (4.2)) und bleibt es im weiteren Verlauf auch.

Gleichzeitig kann man dieser Abbildung die Dichteverteilungen der *up*- *down*-

und *strange* quarks entnehmen. Das *strange* quark tritt erst ab etwa  $\mu_q = 360$  MeV in Erscheinung, damit muss die Dichte des *down* quarks, bedingt durch die Ladungsneutralität, ab dem selben Bereich abnehmen. Der Verlauf der Quarkdichten ist bei Variation der freien Parameter stets ähnlich, allein wenn man die vektorielle Kopplung  $g_\phi$  nach Gleichung (7.106) erhöht<sup>1</sup>, wird die Dichte des *strange* Quarks kleiner als die der beiden *nonstrangen*. Wir belassen allerdings die Wahl bei (7.106), um auch im skalaren Sektor die gleiche Einkopplung zu haben (Gleichung (7.105)).

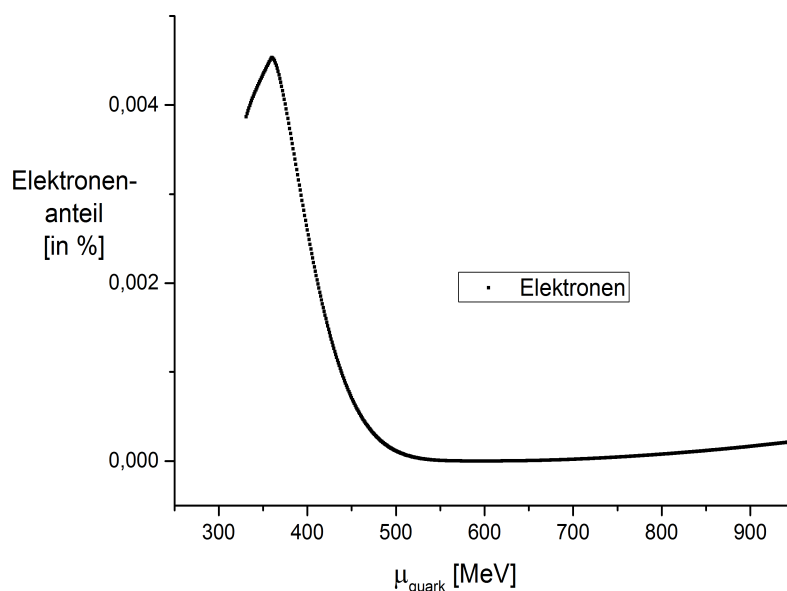


Abbildung 8.2: Die (Ladungs-)dichteverteilung der Elektronen in Abhängigkeit von  $\mu_q$

Die Elektronen liefern einen verschwindend geringen Beitrag, welchen man in Abbildung (8.1) auf Anhieb kaum zu erkennen vermag. Doch bei genauem Hinsehen sinkt der Verlauf des *up*-quark leicht ab, bedingt eben durch freiwerdende Elektronen. Das deren Beitrag sehr gering ist, zeigt Ab-

<sup>1</sup>Ab einem Faktor  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  liegen ab  $\mu_q = 600$  MeV alle Dichten etwa bei 0.33%, für größeres  $g_\phi$  ist die Dichte des *strange*-quarks dann unterhalb der beiden *nonstrangen*



bildung (8.2). Bei exakten  $\mu_q = 600\text{MeV}$  sind absolut keine Elektronen vorhanden. Einzig die freien Quarks und die mesonischen Felder generieren die Ladungsneutralität. Im weiteren Verlauf  $\mu_q \geq 600\text{ MeV}$  kann man den Elektronenbeitrag vernachlässigen<sup>2</sup>.

Das System ist, wie gefordert, stets ladungsneutral.

## 8.2 Variation der Quarkmasse

Durch Variieren der konstituenten Quarkmasse  $m_q$  ist gemäß Gleichung (7.104) die *nonstrange*-, sowie nach Gleichung (7.105) die *strange*-skalare Kopplung direkt beeinflussbar. Die anderen Variablen wurden dabei konstant gehalten, und dabei so gewählt, dass zu physikalisch sinnvollen sowie brauchbaren Ergebnissen gelangt werden kann.

### 8.2.1 Die skalaren Kondensate

Durch Erhöhung der Quarkmasse erhöht sich auch die skalare Kopplung. Erwarten würde man einen Phasenübergang erster Ordnung bei  $\simeq 308\text{MeV}$ , also bei gut einem Drittel der Masse eines Nukleons ( $\simeq 940\text{MeV}$ ) abzüglich seiner Bindungsenergie von  $\simeq -15.75\text{MeV}$  [SaW23]. Dies wird auch in den Abbildungen (8.3) und (8.4) für  $m_q \geq 300\text{MeV}$  beobachtet. Bei hohem chemischem Potential, also höheren Energien bzw. auch hohen Dichten, erwartet man weiterhin, dass das Kondensat *chiral restauriert*. Dies bedeutet, dass die Feldwerte gegen Null gehen und die Symmetrie nicht mehr spontan gebrochen ist, so dass das  $\vec{\pi}$  in seiner Eigenschaft als Goldstone Boson massiv wird, und damit kein Goldstone Boson mehr ist. Das wir die Null nicht erreichen, liegt an der expliziten Symmetriebrechung (Gleichung (7.102) und (7.103)), die dem  $\vec{\pi}$  einst seine Masse gab.

Damit kann man bereits  $m_q \leq 300\text{MeV}$  als in Betracht kommenden Parameterbereich ausschließen. Dort verläuft der Phasenübergang für  $\sigma_n$  als auch für

---

<sup>2</sup>Auch der Elektronenbeitrag zum großkanonischen Potential liegt im Promille-Bereich

$\sigma_s$  von hadronischer zu Quarkmaterie kontinuierlich<sup>3</sup>. Man hätte also bereits bei verhältnismäßig geringem chemischem Potential auftretende Quarkmaterie. Zudem bleibt das Kondensat in der chiral gebrochenen Phase.

Für Werte  $m_q \geq 400$  MeV beobachteten wir, außer dem „schärferen Sprung“, keine signifikanten Änderungen gegenüber dem Phasenübergang bei  $m_q = 300$  MeV.

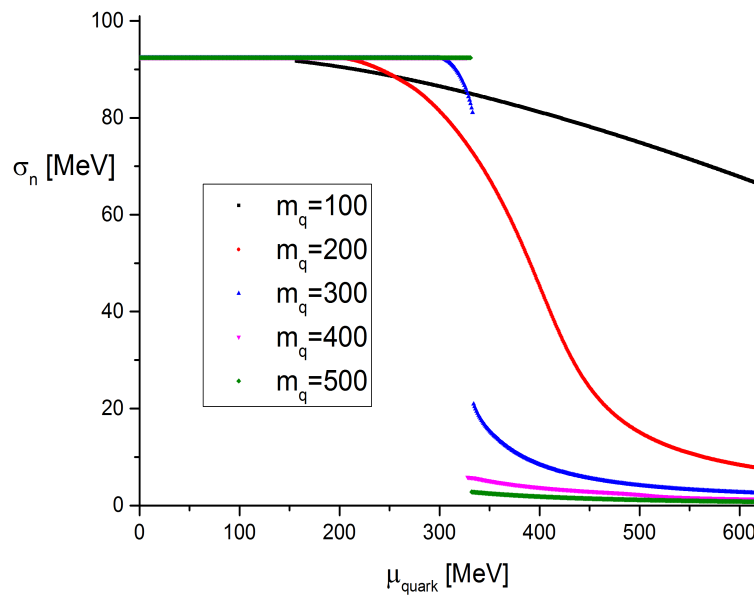


Abbildung 8.3: Die skalaren Kondensate  $\sigma_n$  als Funktion des chemischen Potentials  $\mu_q$  bei Variation von  $m_q$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600$  MeV und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120$  MeV

Alle  $\sigma_s$ -Kondensate bleiben *chiral gebrochen*. Im weiteren bleibt das Kondensat bei der Wahl von  $m_q \geq 400$  nach dem Sprung bei  $\mu_q \simeq 310$  bis etwa  $\mu_q \simeq 500$  konstant. Dies diskutieren wir im Zusammenhang mit der dazugehörigen Zustandsgleichung (EOS) im folgenden Abschnitt (8.2.2).

<sup>3</sup>Dies nennt man auch einen *crossover*

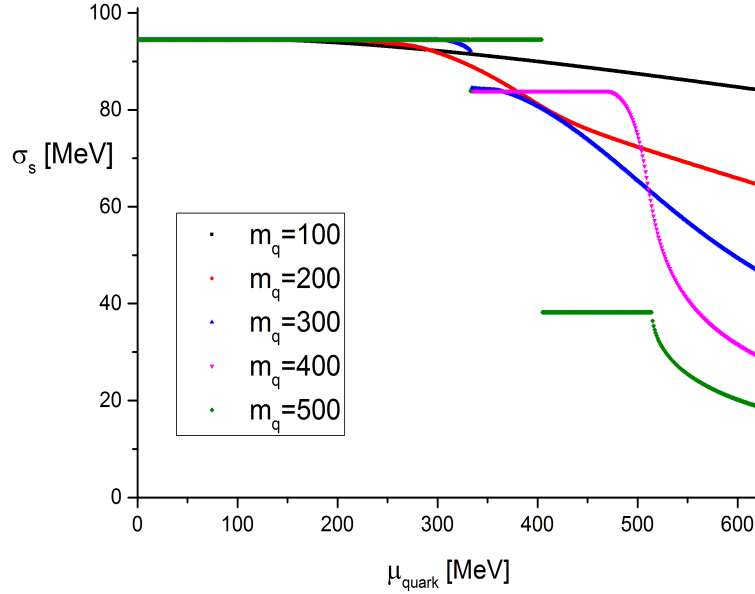


Abbildung 8.4: Die skalaren Kondensate  $\sigma_s$  als Funktion des chemischen Potentials  $\mu_q$  bei Variation von  $m_q$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Für die Variation der anderen Parameter ist also  $m_q = 300 \text{ MeV}$  die sinnvollste Wahl. In Abbildung (8.5) ist der Verlauf der beiden skalaren Felder  $\sigma_n$  und  $\sigma_s$  für die Wahl  $m_q = 300 \text{ MeV}$  dargestellt.

Die zu dieser Wahl gehörenden vektoriellen Kondensate findet man in Abbildung (8.6). Dort beobachtet man mit zunehmendem chemischen Potential die Zunahme der vektoriellen Kondensate (bei fixiertem  $m_q = 300 \text{ MeV}$ ). Bedingt durch ihren repulsiven Charakter stabilisieren sie den Stern bei hohen Energien/Dichten gegen weitere Kompression durch die Gravitation. Die vektoriellen Kondensate sind proportional zur Dichte der quarks, gemäß den Gleichungen (7.90), (7.91) und (7.92).

Diese Ergebnisse sind im Einklang mit der Arbeit von [Mal12] und [TBs12].

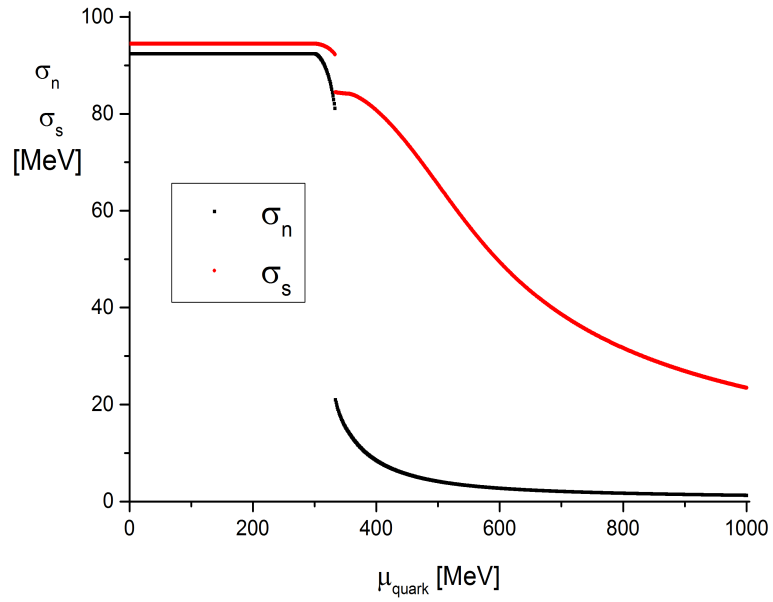


Abbildung 8.5: Die skalaren Kondensate  $\sigma_n$  und  $\sigma_s$  als Funktion von  $\mu_q$  mit  $m_q = 300 \text{ MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

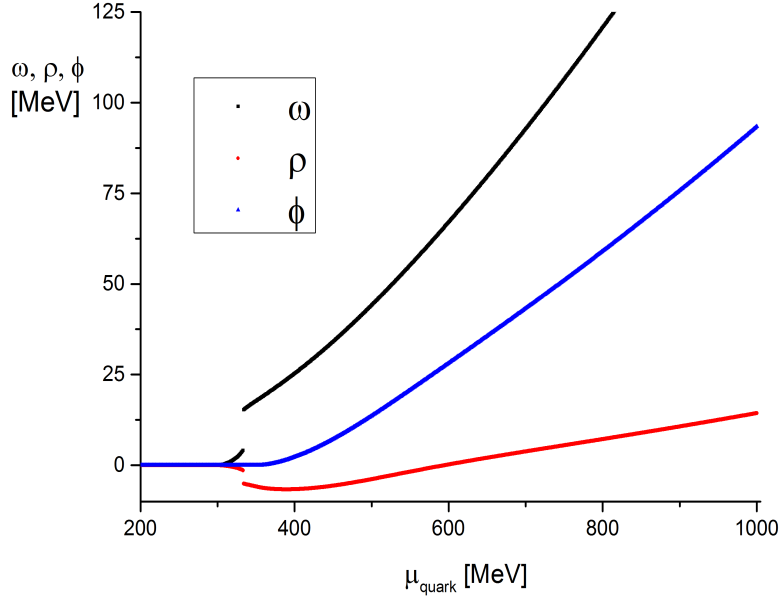


Abbildung 8.6: Die vektorielle Kondensate  $\omega$ ,  $\rho$  und  $\phi$  als Funktion des chemischen Potentials  $\mu_q$  bei  $m_q = 300$ ,  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Das  $\rho$  in einem gewissen Bereich negativ wird, liegt daran, dass in jenem Bereich nach Gleichung (7.89) mehr *down*- als *up* quarks vorhanden sind. Dieses Resultat ist vollkommen im Einklang mit Abbildung (8.1), ab  $\mu_q = 600 \text{ MeV}$  gibt es dann mehr *up*- als *down* quarks. Ab diesem Bereich des chemischen Potentials wird das Feld  $\rho \geq 0 \text{ MeV}$ , sprich: positiv.

## 8.2.2 Zustandsgleichung und Masse-Radius Relation

Die zu diesen Werten gewonnenen Zustandsgleichungen, in Abbildung (8.7) dargestellt, werden für größeres  $m_q$  weicher, dadurch sollte man dann bei  $m_q > 300 \text{ MeV}$  auf kleinere Masse-Radius Beziehungen kommen, was man in Abbildung (8.9) auch beobachten kann. Da das primäre Ziel dieser Arbeit jedoch ist, auf möglichst über  $2M_\odot$  bei einem dazugehörigen Radius zu kommen, sind zu hoch angenommene Quarkmassen nicht sinnvoll. Ein

klein gewähltes  $m_q$  sorgt zwar für entsprechende Masse-Radius Relationen, ist jedoch auf Grund der vorangegangenen Diskussion aus Abschnitt (8.2.1) ebensowenig sinnvoll.

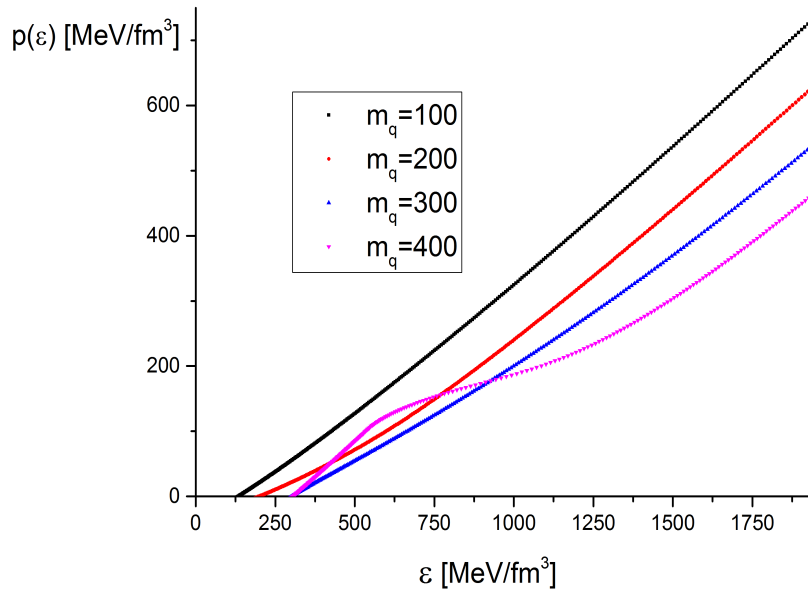


Abbildung 8.7: Die Zustandsgleichung bei Variation von  $m_q$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Der Verlauf der EOS in Abbildung (8.7) bei  $m_q = 400 \text{ MeV}$  findet sich auch bei [TBS12] wieder, und ist womöglich dadurch zu erklären, dass das skalare Kondensates  $\sigma_s$  zwischen  $310 \leq \mu_q \leq 510$  konstant bleibt und die Terme des  $\sigma_s$  zum Druck in jenem Bereich keinen signifikanten Beitrag leisten.

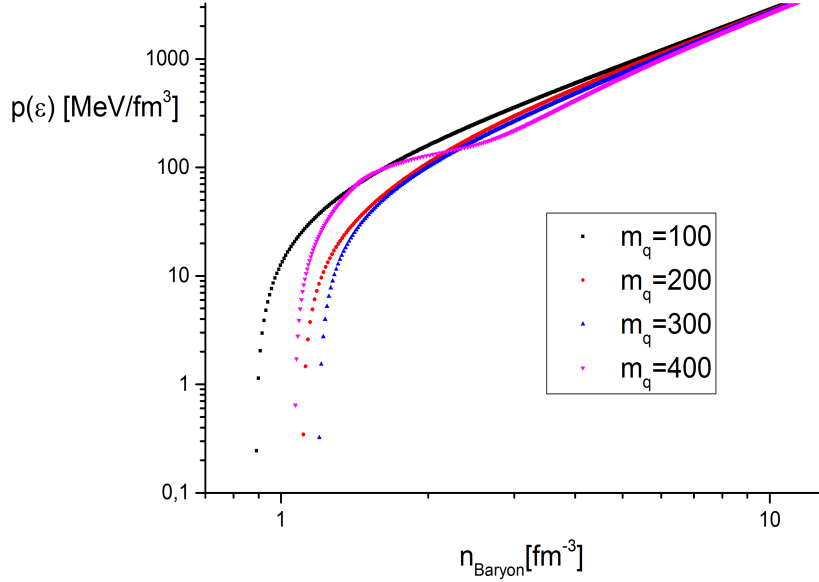


Abbildung 8.8: Der Druck in Abhängigkeit der Baryondichte  $n_b$  bei Variation von  $m_q$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

In Abbildung (8.8) ist der Druck in Abhängigkeit der Baryondichte dargestellt. Der Verlauf des Graphen für  $m_q = 400 \text{ MeV}$  untermauert diese These, denn der Druck bleibt im Bereich von  $100 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$  bei Baryondichten von  $1 - 3 \text{ fm}^{-3}$  nahezu konstant bzw. steigt weniger steil an, bevor er sich den anderen Kurvenverläufen anschmiegt. Ab Baryondichten von circa  $4 \text{ fm}^{-3}$  bzw.  $\mu_q \simeq 510 \text{ MeV}$  sinkt das skalare Kondensat  $\sigma_s$ , damit nimmt der Druck (bei gegebener Dichte) durch frei werdende *strange* quarks wieder zu.

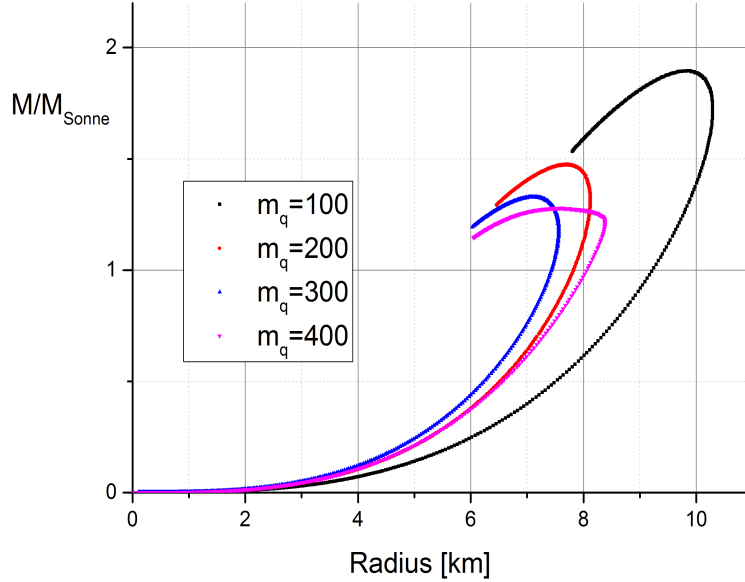


Abbildung 8.9: Die Masse Radius Relation bei Variation von  $m_q$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $B a g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Zu sehen in Abbildung (8.9) ist, dass die Maximalmasse bei  $m_q = 100 \text{ MeV}$  bei fast  $2M_\odot$  liegt und mit zunehmendem  $m_q$  kleiner wird, wie man es nach der jeweiligen Härte der Zustandsgleichungen auch erwarten würde. Nach der vorangegangenen Diskussion jedoch werden wir für die Variation der anderen Parameter, wie erwähnt,  $m_q = 300 \text{ MeV}$  fixieren.

### 8.3 Variation der Vektorkopplung

Die Bandbreite der Variation der Vektorkopplung geschieht aus analogen Überlegungen wie die Variation der Quarkmasse  $m_q$ , welche ja die skalare Kopplung  $\mathbf{g}$  festlegt. Da der Betrag der skalaren Kopplung etwa  $\frac{m_q}{f_\pi} \simeq 3$  ist, werden wir die Vektorkopplung einem Bereich  $0 \leq g_\omega \leq 9$  variieren, wobei  $g_\omega = 9.0$  bereits deutlich *groß* ist.



### 8.3.1 Die skalaren Kondensate

Die Abhängigkeit des nonstrangen Kondensates  $\sigma_n$  von der Vektorkopplung  $g_\omega$  ist in Abbildung (8.10) dargestellt. Der Phasenübergang wird mit größer werdendem  $g_\omega$  immer mehr zu einem *crossover*. Der repulsive Charakter der Vektormesonen bedingt bei kleinem  $g_\omega$  also einen „schärfer“ werdenden Sprung. Dies ist auch so zu erwarten, da mit kleinem  $g_\omega$  der attraktive Charakter der skalaren Mesonen ausgeprägter sein sollte. Die Verläufe für kleines  $g_\omega$  entsprechen denjenigen für großes  $g$  (Gleichung (7.104)).

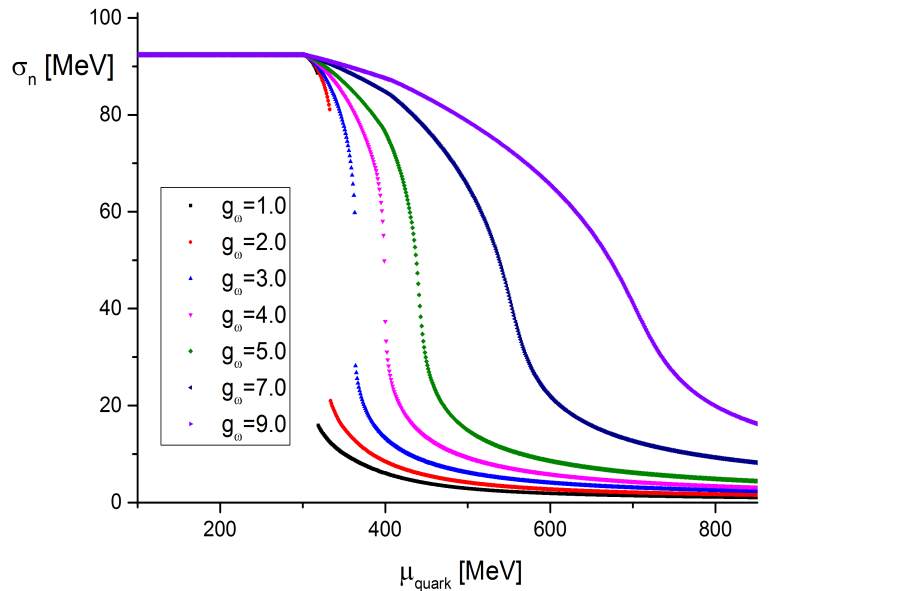


Abbildung 8.10: Die skalaren Kondensate  $\sigma_n$  als Funktion des chemischen Potentials  $\mu_q$  bei Variation von  $g_\omega$  bei  $m_q = 300$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Deutlich erkennbar ist auch, dass mit kleiner werdendem  $g_\omega$  das  $\sigma_n$ -Kondensat mehr und mehr in die *chiral restaurierte* Phase übergeht, was ja wünschenswert ist.

Das strange Kondensat  $\sigma_s$  in Abbildung (8.11) verhält sich dazu erwartungsgemäß. Es bleibt, ebenso wie bei der Diskussion bei Variation von  $m_q$ , in der

chiral gebrochenen Phase.

In beiden Abbildungen ist deutlich zu sehen, dass sich bei größer werdendem  $g_\omega$  der Sprung zu höherem  $\mu_q$  verschiebt, bis es ein *crossover* bei etwa  $g_\omega \simeq 5.0$  wird. Da wir in unserem Modell den Sprung im Phasenübergang bei etwa  $\simeq 310\text{MeV}$ , sowie chirale Restauration, anstreben, belassen wir bei der Variation der anderen Parameter die Vektorkopplung bei  $g_\omega = 2.0$

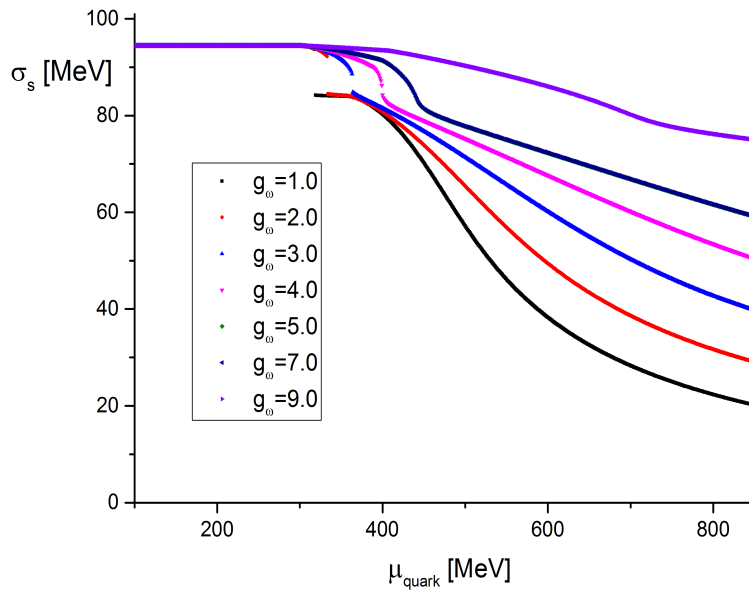


Abbildung 8.11: Die skalaren Kondensate  $\sigma_s$  als Funktion des chemischen Potentials  $\mu_q$  bei Variation von  $g_\omega$  bei  $m_q = 300$ ,  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$

### 8.3.2 Zustandsgleichung und Masse Radius Relation

Bedingt durch den repulsiven Charakter der Vektormesonen erwartet man bei größerem  $g_\omega$  auch eine größere Maximalmasse bei gegebenem Radius, also sollte die EOS härter werden. Dieses Verhalten sieht man sehr deutlich in Abbildung (8.12).

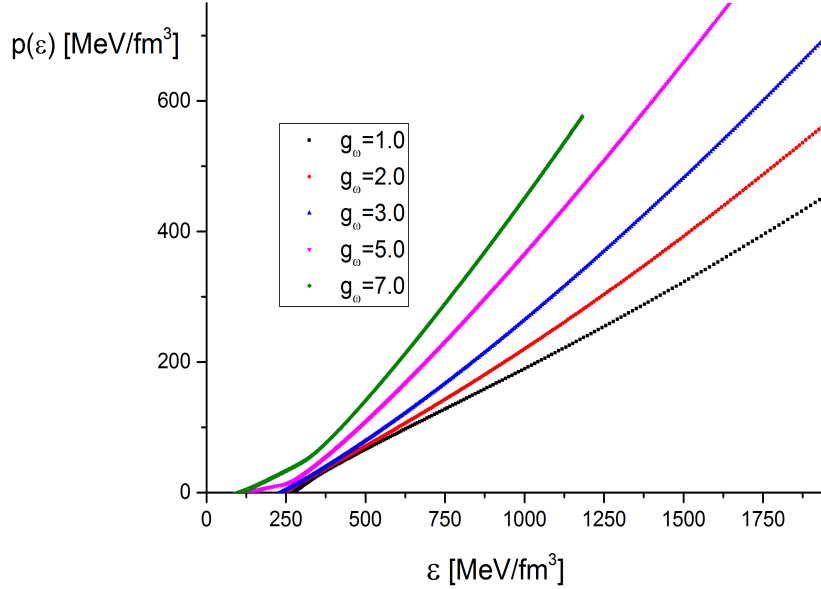


Abbildung 8.12: Die Zustandsgleichung bei Variation von  $g_\omega$  bei  $m_q = 300$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $Bag^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Bei gegebener Energiedichte hat der Stern höheren Druck zur Gegenwehr der Gravitation zur Verfügung. Die Zustandsgleichungen steigen relativ rasch an, wobei man zudem noch in Betracht ziehen muss, nicht zu Nahe an das *kausale Limit*  $p = \epsilon$  zu gelangen<sup>4</sup>. Bedingt durch die relativistische Konstruktion der Gleichungen ist  $p = \epsilon$  glücklicherweise ausgeschlossen, dennoch wäre  $p \simeq \epsilon$  eher zweifelhaft. Auch diese Tatsache führt zu der Entscheidung, die Vektorkopplung doch eher verhältnismäßig klein ( $g_\omega = 2.0$ ) zu lassen, obwohl eine kleinere Masse bei gegebenem Radius die Folge ist.

<sup>4</sup>In diesem Fall wäre die Schallgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit. Erinnerung sei an dieser Stelle an die Diskussion des MIT-Bag Modelles in Kapitel (5), bei der ja  $p \sim \frac{1}{3}\epsilon$

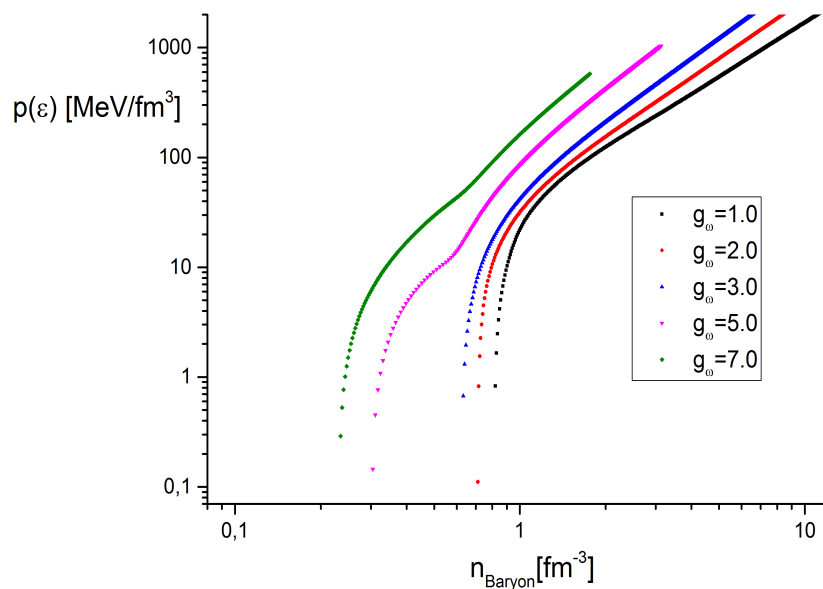


Abbildung 8.13: *Der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte  $n_b$  bei Variation von  $g_\omega$  bei  $m_q = 300$ ,  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$*

Auch Abbildung (8.13) verdeutlicht den Sachverhalt der jeweiligen Härte der EOS. Bei größer werdender Vektorkopplung beobachtet man, dass der Stern bei gleicher Baryonendichte (der Gravitation) mehr Druck entgegen setzen kann. Der etwas geschwungene Verlauf bei  $g_\omega = 5.0$  und  $g_\omega = 7.0$  kommt vom Übergang der beiden skalaren Kondensate  $\sigma_n$  und  $\sigma_s$  von *crossover* zu Phasenübergang erster Ordnung.

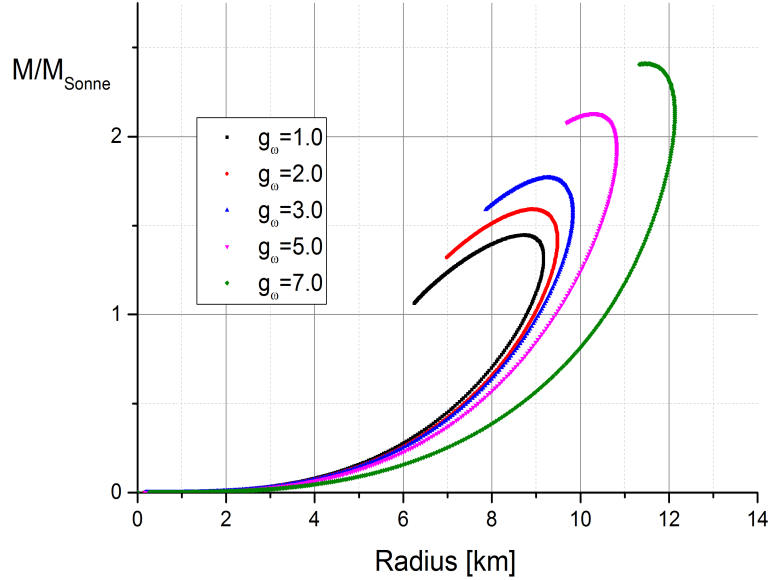


Abbildung 8.14: Die Masse Radius Relation bei Variation von  $g_\omega$  bei  $m_q = 300$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  und  $B a g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Abbildung (8.14) zeigt die Masse-Radius Relation bei Variation der Vektorkopplung. Wie erwartet, erreicht man mit hohen Kopplungen auch hohe Massen bei gegebenem Radius, welche jedoch auf Grund der eben geführten Diskussion wohl eher physikalisch unwahrscheinlich zu realisieren sind.

Die Variation von  $g_\omega$  ist eine mächtige Stellschraube an der Masse-Radius Beziehung, jedoch sollte man sich vor Augen halten, dass sie nur aus analogen Überlegungen zur skalaren kopplung in eben jenem Bereich gewählt wurde.

## 8.4 Variation von $m_\sigma$

Da die Masse des Sigma-Mesons bisher experimentell nur auf einen Bereich von 400 – 1000 MeV eingegrenzt werden konnte, haben wir mit dessen Variation einen weiteren Parameter zu Verfügung, durch dessen Einfluß wir die EOS und damit die erhaltenen Masse Radius Relationen studieren können.

### 8.4.1 Die skalaren Kondensate

Die nonstrangen skalaren Kondensate sind in Abbildung (8.15) dargestellt. Man beobachtet das für größeres  $m_\sigma$  der Phasenübergang immer mehr zu einem *crossover* wird, während für kleiner werdendes  $m_\sigma$  der Sprung deutlich unterhalb von  $\mu_q = 300\text{MeV}$  stattfindet.

Dies kann man im SU(2) Modell nach [Mal12], also ohne die Berücksichtigung von *strangeness*, wie folgt deuten:

Die Masse des Sigma-Mesons hängt dort direkt mit dem Parameter  $\lambda$  zusammen, welcher die Potentialtiefe widerspiegelt. Ähnlich ist es auch im SU(3) Fall [TBs12], obwohl hier noch mehrere Parameter eine Rolle spielen. Jedenfalls wird bei größerem  $m_\sigma$  auch mehr Energie zur Entwicklung des zweiten Minimums benötigt, was den Phasenübergang zu größerem  $\mu_q$  schiebt.

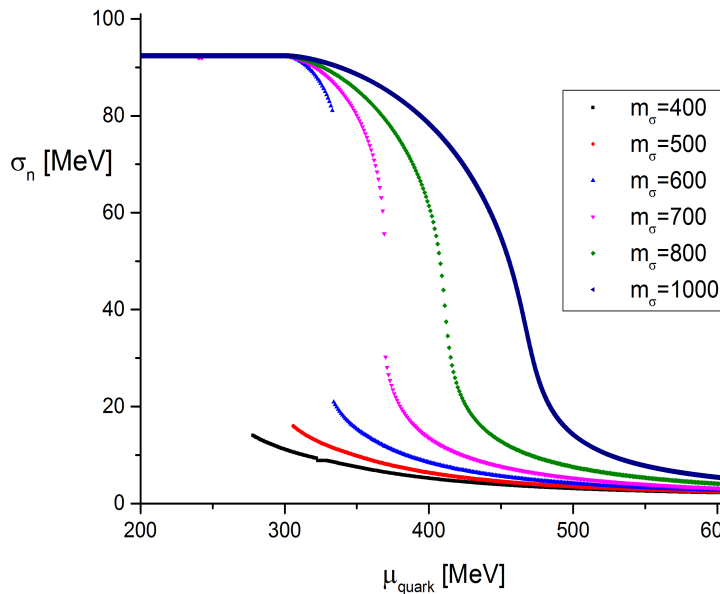


Abbildung 8.15: Die skalaren Kondensate  $\sigma_n$  als Funktion des chemischen Potentials  $\mu_q$  bei Variation von  $m_\sigma$  bei  $m_q = 300\text{MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$

Das gleiche Verhalten für den Phasenübergang zeigt auch das skalare

strange Kondensat in Abbildung (8.16), wobei wieder zu beobachten ist, dass es nicht in die *chiral restaurierte* Phase übergeht. Für die Variation der anderen Parameter belassen wir  $m_\sigma$  auf 600 MeV, welches ein guter Mittelwert ist und auch in vielen anderen Arbeiten Verwendung fand. Dort liegt der Sprung zwar bei etwas über 320 MeV, was diese Entscheidung sicherlich dennoch rechtfertigt.

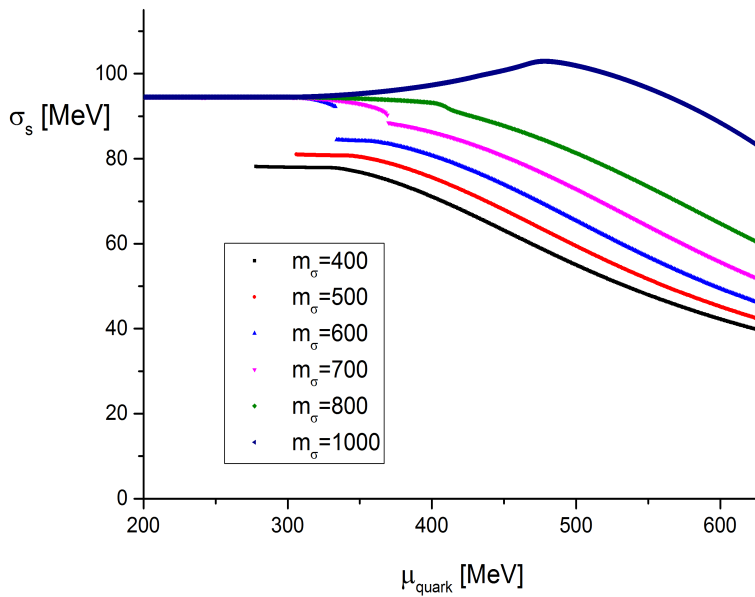


Abbildung 8.16: Die skalaren Kondensate  $\sigma_s$  als Funktion des chemischen Potentials  $\mu_q$  bei Variation von  $m_\sigma$  bei  $m_q = 300 \text{ MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Seltsam ist das Verhalten des  $\sigma_s$ -Kondensates bei der Wahl  $m_\sigma = 1000$  MeV. Dort geht der *crossover* zunächst in Bereiche über den Vakuumerwartungswert, um dann *sanft* abzunehmen. Zu diesem Ergebnis fanden wir keinerlei Literatur, so dass  $m_\sigma = 1000$  MeV für die EOS und die Masse-Radius Relationen außer acht gelassen wurde. Dies ist gerechtfertigt, da mit großem  $m_\sigma$  die EOS weicher wird, was ja ohnehin **nicht** Ziel dieser Arbeit ist.

## 8.4.2 Zustandsgleichung und Masse Radius Relation

Die Zustandsgleichungen für verschiedene  $m_\sigma$  in Abbildung (8.17) variieren auf den ersten Blick, verglichen mit den EOS der Vektorkopplungen, nicht allzu sehr voneinander. Dennoch sind die Unterschiede deutlich zu erkennen, was sich auch in den Masse-Radius Relationen widerspiegelt. Mit größer werdendem  $m_\sigma$  werden auch die EOS wesentlich weicher. Damit sollten größere Massen bei gegebenem Radius beobachtet werden. Dies kann man in der Tat in Abbildung (8.19) sehen.

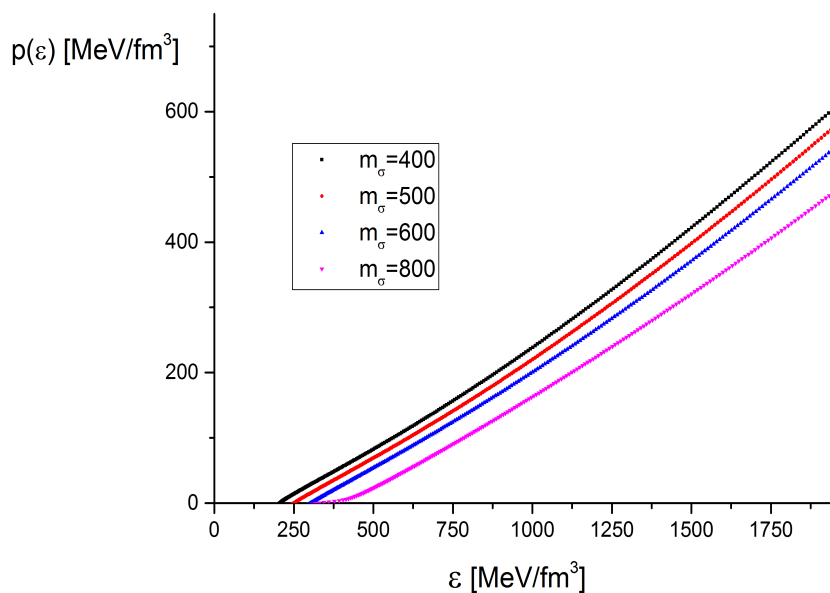


Abbildung 8.17: Die Zustandsgleichung bei Variation von  $m_\sigma$  bei  $m_q = 300\text{MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$

Abbildung (8.18) verdeutlicht diesen Sachverhalt ebenfalls. Für klein gewähltes  $m_\sigma$  ist bereits bei geringer Baryonendichte der Druck, verglichen mit größer werdendem  $m_\sigma$  größer.



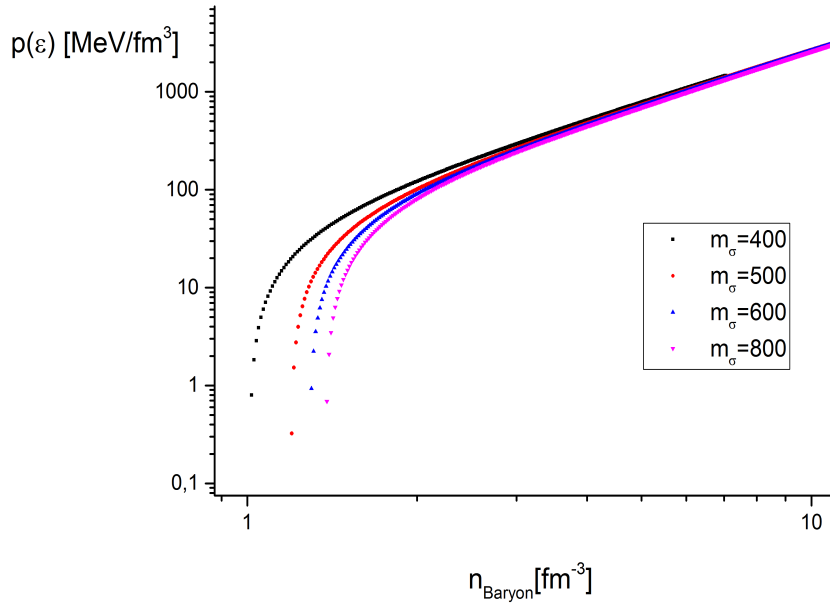


Abbildung 8.18: Der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte  $n_b$  bei Variation von  $m_\sigma$  bei  $m_q = 300\text{MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$

Der Stern verträgt mehr Druck, die Masse sollte bei gegebenem Radius größer sein.

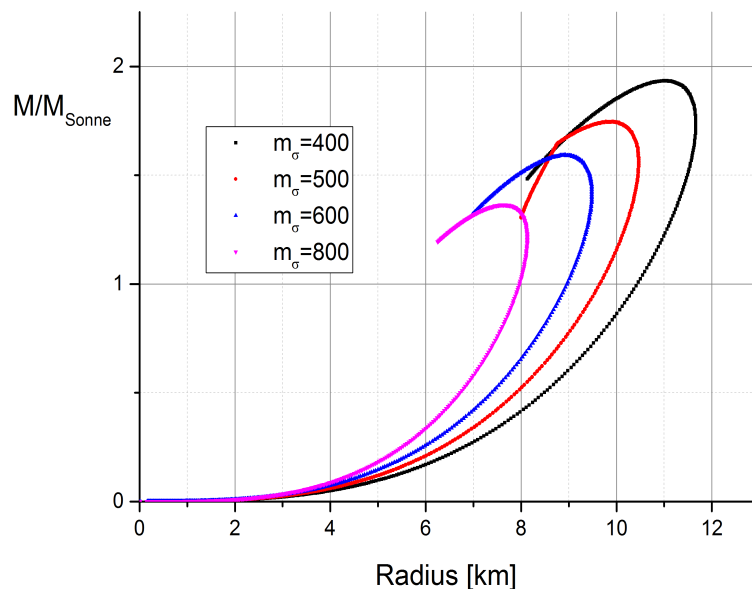


Abbildung 8.19: Die Masse Radius Relation bei Variation von  $m_\sigma$  bei  $m_q = 300 \text{ MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$

Die Maximalmassen variieren im Bereich von  $1.4 - 1.8 M_\odot$ . Im weiteren beschränken wir uns also auf die Wahl  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$ , motiviert unter anderem durch unsere Ergebnisse, aber auch durch die Arbeiten von [Mal12] und [TBs12].

## 8.5 Variation der Bag Konstanten

Die Bag-Konstante hat keinerlei Einfluß auf die skalaren und vektoriellen Kondensate<sup>5</sup>. Ihr Zweck dient einzig und allein die EOS weicher bzw. härter zu machen.

<sup>5</sup>Vergleiche dazu die Diskussion in Kapitel (5)

### 8.5.1 Zustandsgleichung und Masse Radius Relation

Die Bag Konstante wurde im eher ungewöhnlichen Bereich von  $40 \leq Bag^{\frac{1}{4}} \leq 100 \text{ MeV}$  variiert (Abbildung (8.20)). Es mag entweder an der Wahl der anderen fixierten Parameter liegen, dass man nicht auf Werte zwischen  $100 \leq Bag^{\frac{1}{4}} \leq 200 \text{ MeV}$  kam, um die gewünschten  $2M_{\odot}$  zu erreichen, oder aber daran, dass ein weiterer Freiheitsgrad (die *strangeness*) die EOS schon im Vorfeld sehr weich macht. Eine groß gewählte Bag Konstante macht die EOS dann noch weicher. Resultat ist, dass die Masse bei gegebenem Radius deutlich unter der erstrebten Grenze von  $2M_{\odot}$  bleibt.

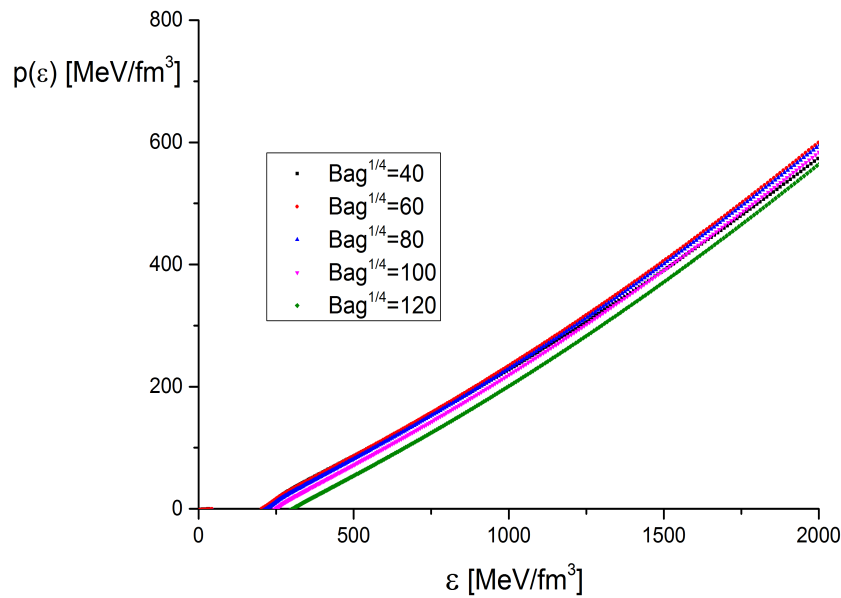


Abbildung 8.20: Die Zustandsgleichung bei Variation der Bag-Konstanten im Bereich von  $40 \leq Bag^{\frac{1}{4}} \leq 120 \text{ MeV}$  mit  $g_{\omega} = 2.0$ ,  $m_q = 300 \text{ MeV}$  und  $m_{\sigma} = 600 \text{ MeV}$

Für größere Bag Konstanten erhält man eine deutlich weichere EOS, wie in Abbildung (8.21) zu sehen ist. Demnach sollte auch die dazugehörige maximale Sternmasse kleiner sein. Für  $B^{\frac{1}{4}} \geq 120 \text{ MeV}$  haben wir den Bereich der angestrebten  $2M_{\odot}$  bereits lange verlassen. Daher fanden auch keine Mas-

se Radius Relationen zu den EOS aus Abbildung (8.21) in dieser Arbeit Beachtung.

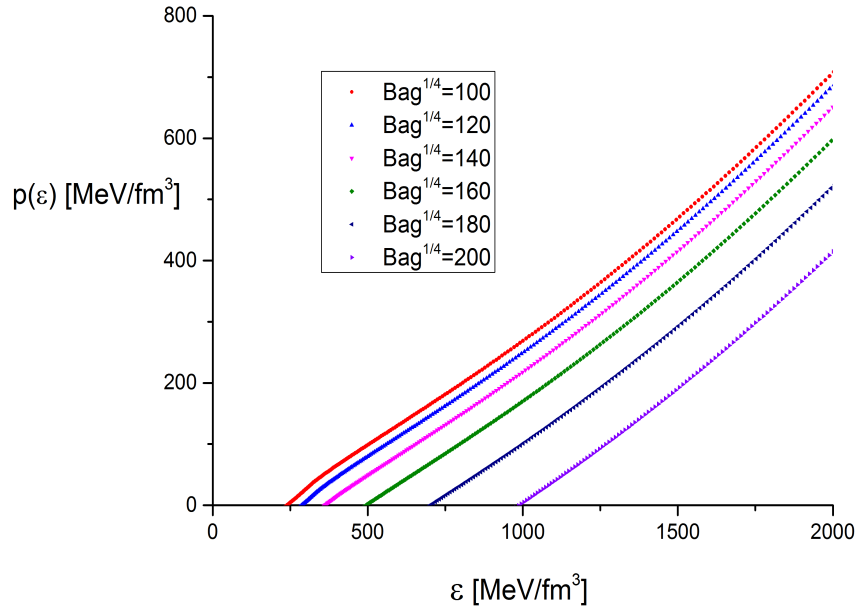


Abbildung 8.21: Die Zustandsgleichung bei Variation der Bag-Konstanten im Bereich von  $100 \leq Bag^{\frac{1}{4}} \leq 200 \text{ MeV}$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_q = 300 \text{ MeV}$  und  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$

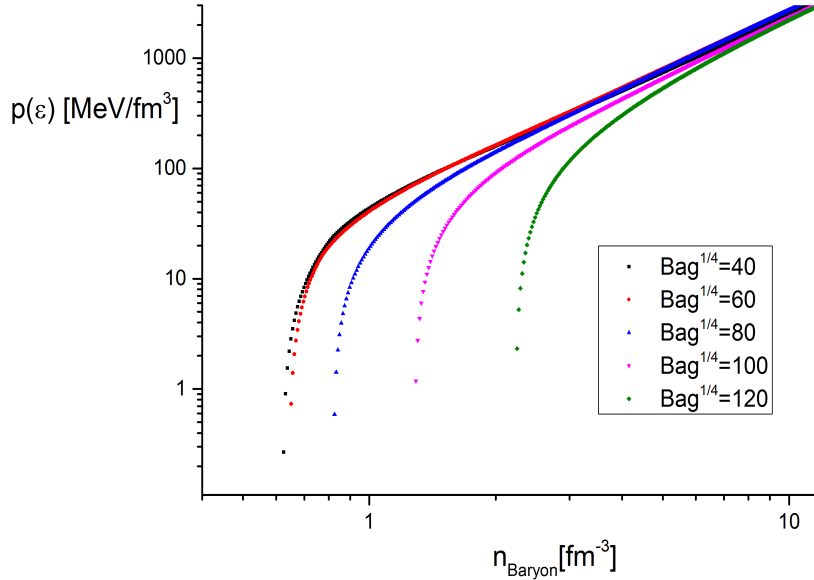


Abbildung 8.22: Der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte  $n_q$  bei Variation der Bag-Konstanten im Bereich von  $40 \leq \text{Bag}^{\frac{1}{4}} \leq 120 \text{ MeV}$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_q = 300 \text{ MeV}$  und  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$

In Abbildung (8.22) ist der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte dargestellt. Auch bei der Variation der Bag-Konstanten kommen wir zu den gleichen Schlussfolgerungen wie bei den vorangegangenen Abschnitten, vergleichen wir die jeweilige Härte der EOS mit der Abhängigkeit des Druckes von der Baryonendichte.

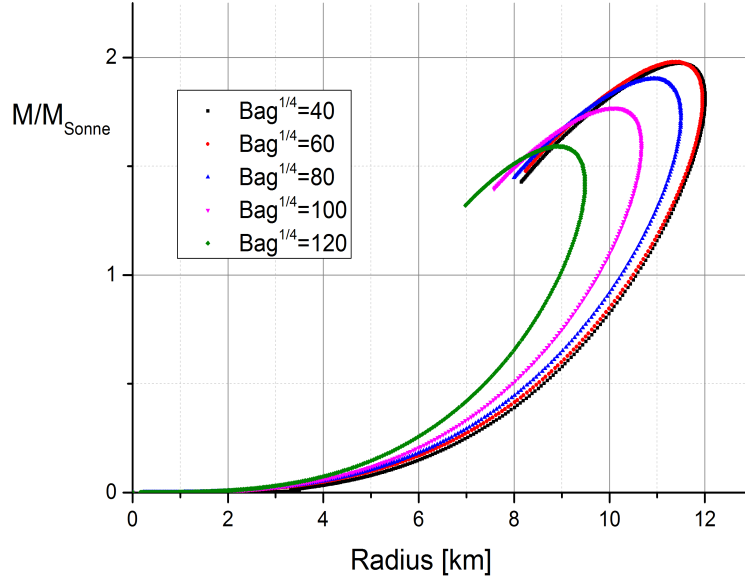


Abbildung 8.23: Die Masse Radius Relation bei Variation von Bag-Konstanten im Bereich von  $40 \leq Bag^{\frac{1}{4}} \leq 120 \text{ MeV MeV}$  mit  $g_\omega = 2.0$ ,  $m_q = 300 \text{ MeV}$  und  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$

Wie auch bei allen Diskussionen zuvor, erkennt man in allen Abbildungen, dass eine härtere EOS die Maximalmasse bei gegebenem Radius ansteigen lässt. Mit der Wahl  $Bag = 40 \text{ MeV}$  kamen wir ziemlich nahe an die erstrebte (Unter-)Grenze von  $2M_\odot$ . Durch die Variation der Bag Konstanten können wir die Maximalmasse von  $1.4 \sim 2.0M_\odot$  variieren.

## 8.6 Einschränken des Parameterbereiches

Auf Grund der gewonnenen Erkenntnisse aus den Abschnitten (8.2), (8.3), (8.4) und (8.5) sind wir nun in der Lage, die möglichen Parameter für einen (möglichen) Quarkstern von über zwei Sonnenmassen einzugrenzen. Bereits bei den Untersuchungen der eben genannten Abschnitte trat zu Tage, dass die Mittelwerte der variierten Parameter physikalisch sinnvolle, und somit gut gewählte Richtwerte für das Variieren der anderen Parameter sind.

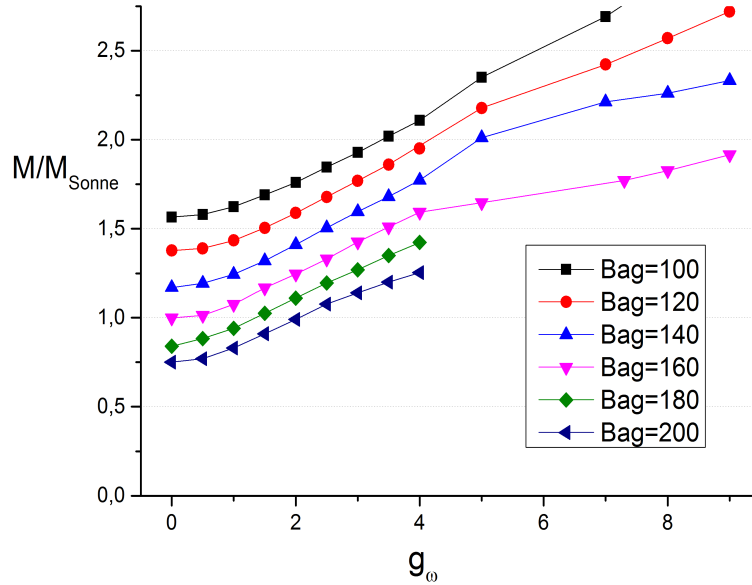


Abbildung 8.24: Die Maximalmasse in Abhängigkeit von  $g_\omega$  bei Variation der Bag-Konstanten mit  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $m_\sigma = 600\text{MeV}$

In Abbildung (8.24) kann man die Maximalmasse als Funktion von  $g_\omega$  bei verschiedenen Bag Konstanten sehen. Das wir die Bag Konstante bis auf den Wert 200 MeV bringen, soll verdeutlichen, dass, wie in Abschnitt (8.5) diskutiert, eine zu groß gewählte Konstante die Maximalmasse auf deutlich zu kleine Werte bringt. Wie wir noch sehen werden ist allerdings auch die Wahl einer zu kleinen Bag Konstanten physikalisch nicht sinnvoll. Deutlich zu erkennen zudem ist auch, dass der repulsive Charakter der Vektorkopplung auch Sterne größer werdender Masse gegen die Gravitation stabilisiert.

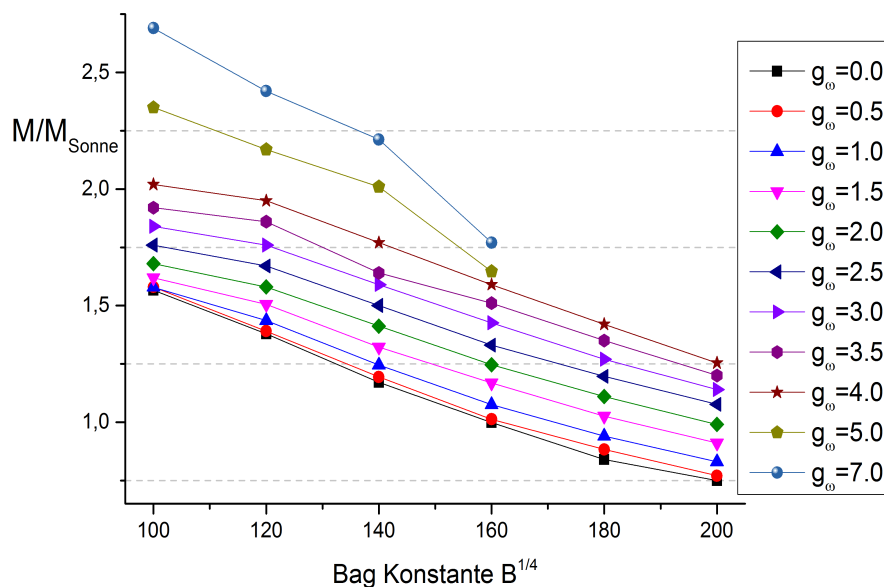


Abbildung 8.25: Die Maximalmasse in Abhängigkeit der Bag-Konstanten bei Variation von  $g_\omega$  mit  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $m_\sigma = 600\text{MeV}$

In Abbildung (8.25) ist nun die Maximalmasse als Funktion der Bag Konstanten für verschiedene  $g_\omega$  dargestellt. Auch hier ist zu sehen, dass ein zu groß gewählter Wert für  $B^{\frac{1}{4}}$  nur noch von viel zu großen  $g_\omega$  kompensiert werden kann, um an die Grenze der  $2M_\odot$  zu gelangen. Dieser Parameterbereich führt also nur für kleine Bereiche der Vektorkopplung sowie verhältnismäßig kleine Werte der Bag Konstanten zu entsprechenden Masse-Radius Relationen.



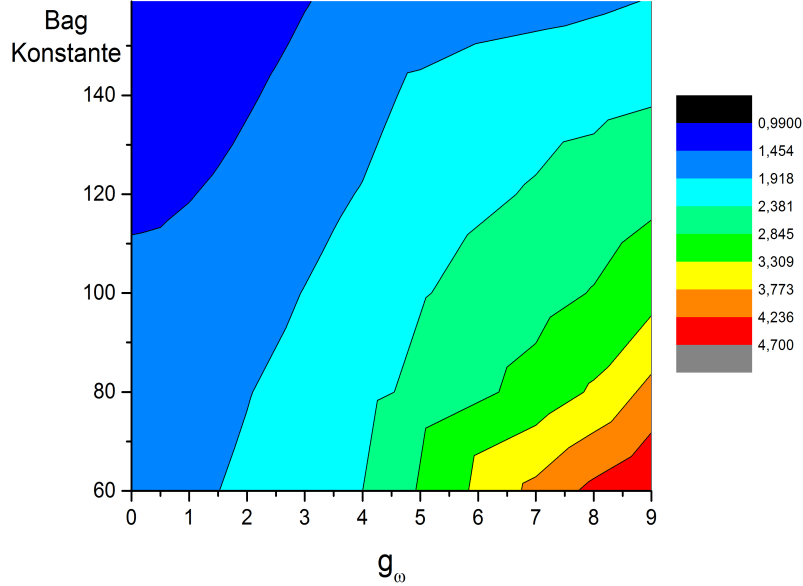


Abbildung 8.26: Die Maximalmassen auf die  $Bag$ - $g_\omega$ -Ebene bei fixierten  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  projiziert. Ab dem hellblauen Bereich hat man bereits Maximalmassen von  $\geq 1.9M_\odot$ . Zu größerer Vektorkopplung und kleinerem  $B^{\frac{1}{4}}$  steigt die Maximalmasse.

In Abbildung (8.26) haben wir die  $Bag$  Konstante von  $60 \leq Bag^{\frac{1}{4}} \leq 160\text{MeV}$  variiert, um einen physikalisch sinnvolleren Bereich zu durchforsten, jedoch hat man auch hier bei zu großen repulsiven Kopplungen und zu kleinen Werten für die  $Bag$ -Konstante unrealistische Werte von bis zu  $\pm 4.5M_\odot$  bei Radii von  $\sim 30\text{km}$ . Diese Werte sind unrealistisch, da die meisten *kompakten Sterne* Pulsare sind, also im Millisekundenbereich um die eigene Achse rotieren. Bei zu großen Objekten wäre dies dann nicht mehr möglich, da es den Stern zerreißen würde [QmC11]. Abgesehen davon existiert für solche Objekte nicht der geringste Hinweis. Für unsere Parameterwahl  $m_q = 300\text{MeV}$ ,  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  und  $g_\omega = 2.0$  befinden wir uns mit  $g_\omega = 2.0$  und  $Bag^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$  bei circa  $1.66 M_\odot$ , also durchaus im Bereich des Möglichen.

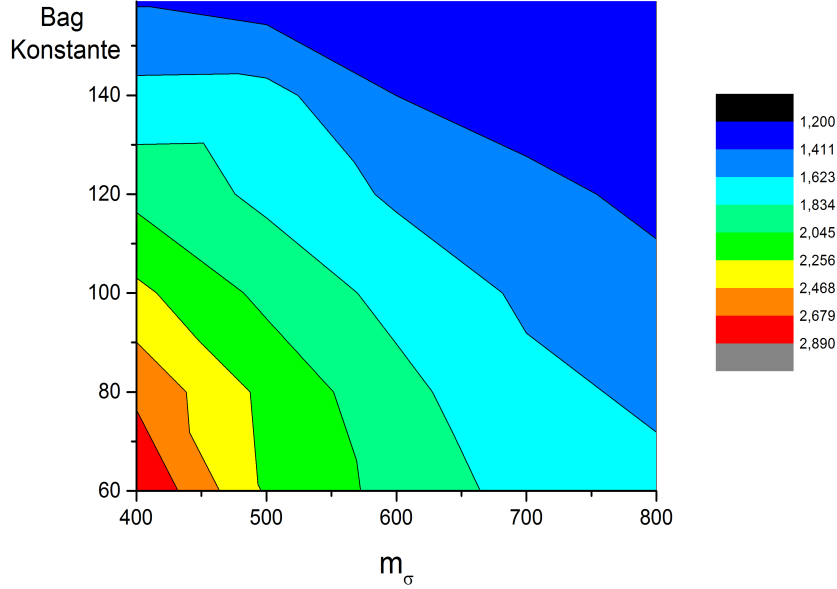


Abbildung 8.27: Die Maximalmassen auf die Bag- $m_\sigma$ -Ebene bei fixierten  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $g_\omega = 2.0$  projiziert. Ab dem hellgrünen Bereich hat man bereits Maximalmassen von  $\geq 1.8M_\odot$ . Zu kleinerem  $m_\sigma$  und kleinerem Bag steigt die Maximalmasse.

Wie wir in Abschnitt (8.4) sahen, hat auch die Masse des Sigma-Mesons erheblichen Einfluß auf die Maximalmasse bei gegebenem Radius. Dies zeigt Abbildung (8.27). Wieder ist ein kleiner Wert für die Bag-Konstante günstig, kann aber durch eine größere Masse des Sigma Mesons kompensiert werden. Auch in dieser Abbildung finden wir unsere Parameterwahl  $m_q = 300\text{ MeV}$ ,  $m_\sigma = 600\text{ MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $B^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$  bei etwa  $1.66 M_\odot$  wieder.

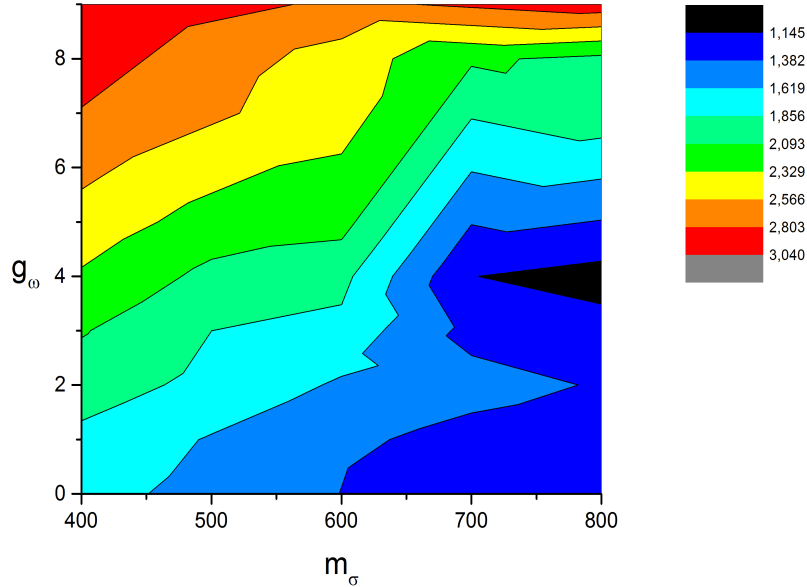


Abbildung 8.28: Die Maximalmassen mit  $B^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$  auf die  $g_\omega$ - $m_\sigma$ -Ebene projiziert. Ab dem hellgrünen Bereich hat man bereits Maximalmassen von  $\geq 1.8 M_\odot$ . Zu kleinerem  $m_\sigma$  und größerer Vektorkopplung steigt die Maximalmasse.

In Abbildung (8.28) haben wir die Bag Konstante auf dem Wert von  $120 \text{ MeV}$  gelassen. Zu sehen ist die Projektion der Maximalmasse auf die  $g_\omega$ - $m_\sigma$ -Ebene, auf welcher wir wieder unsere Parameterwahl  $m_q = 300 \text{ MeV}$ ,  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $B^{\frac{1}{4}} = 120 \text{ MeV}$  bei etwa  $1.6 M_\odot$  finden.

### 8.6.1 Stabilitätsbedingungen

Jede der in dieser Arbeit vorkommenden Masse Radius Beziehungen erfüllt die Buchdahl'sche Stabilitätsbedingung nach Gleichung (2.88).

Jedoch wäre ein *rein* aus Quarkmaterie bestehender Stern mit der hier durchlaufenen Parameterwahl nur für einige wenige Parametersätze realisierbar. Erinnerung sei an die Diskussion in Abschnitt (7.4.1). In diesem Abschnitt nun wird der Parameterbereich für reine Quarksterne diskutiert.

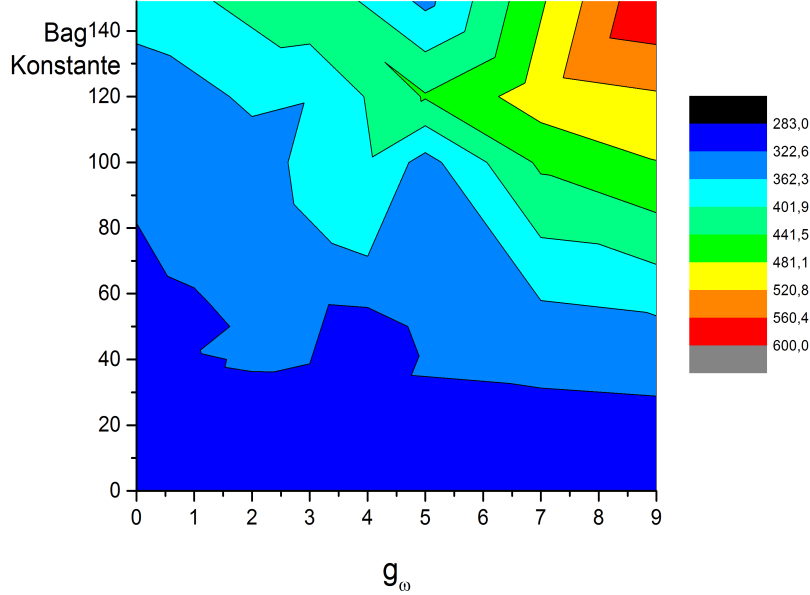


Abbildung 8.29: Reine Quarksternkonfigurationen findet man im dunkelblauen Bereich bei (sehr) kleiner Bag Konstante. Dort ist reine Quarkmaterie energetisch günstiger als hadronische Materie.  $g_\omega$  hat keinen allzugroßen Einfluß. Die beiden fixierten Werte sind  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $m_\sigma = 600\text{MeV}$

Die beiden Abbildungen (8.29) und (8.30) zeigen das Stabilitätslimit von reiner Quarkmaterie, die, nach der Diskussion in Abschnitt (7.4.1), bei etwa  $\leq 308\text{ MeV}$  liegen muss. Abbildung (8.29) zeigt jene Werte für  $\frac{E}{A}$  auf die Bag- $g_\omega$  Ebene projiziert, Abbildung (8.30) zeigt die Bag- $m_\sigma$ -Ebene. Für eine Projektion von  $\frac{E}{A}$  auf die  $g_\omega$ - $m_\sigma$ -Ebene (bei einer Bag-Konstanten von  $120\text{MeV}$ ) erhielten wir keine brauchbaren Resultate für reine Quarksternkonfigurationen.

Erstaunlicherweise hat die repulsive Vektorkopplung ((8.29)) kaum Einfluss. Wie es scheint sorgt alleine eine kleine Bag Konstante für stabile Quarkmaterie. Ein Objekt mit  $g_\omega = 1.0$  und  $B^{\frac{1}{4}} = 60\text{MeV}$  hätte nach Abbildung (8.26) eine Masse von etwa  $1.5M_\odot$ . Wir erreichen erst mit Vektorkopplungen ab  $1.5 \leq g_\omega \leq 4.0$  Massen von rund  $2M_\odot$ , diese sind aber nach Abbildung (8.29) bereits in hybrider Phase, zumindest also die Kruste dieser Objekte

besteht aus hadronischer Materie.

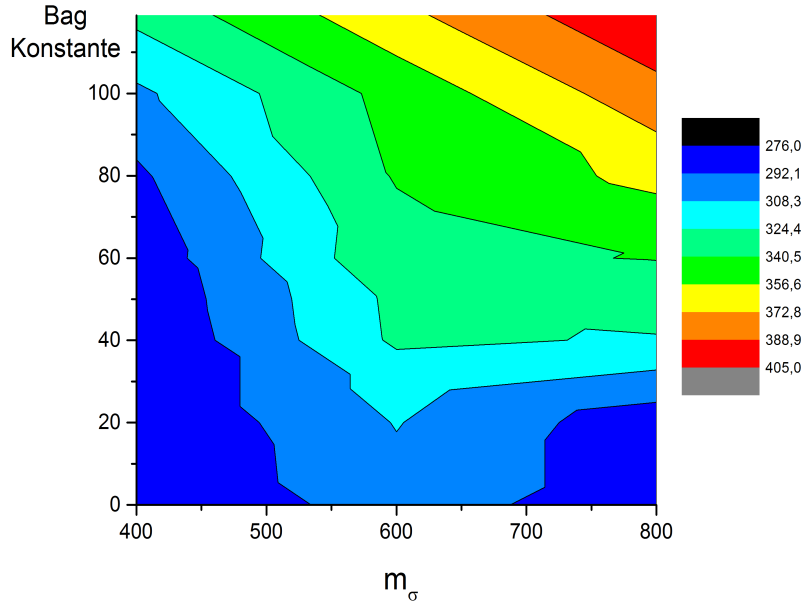


Abbildung 8.30:  $\frac{E}{A}$  auf die  $Bag$ - $m_\sigma$  Ebene projiziert. Reine Quarksternkonfigurationen findet man im dunkelblauen bis blauen Bereich bei kleiner  $Bag$  Konstante bei  $\frac{E}{A} \leq 308 \text{ MeV}$ . Die beiden anderen Werte sind  $m_q = 300 \text{ MeV}$  und  $g_\omega = 2.0$

Das eben Diskutierte findet sich teils auch in Abbildung (8.30) wieder. Auch hier ist ein klein gewähltes  $B^{\frac{1}{4}}$  (bei  $400 \leq m_\sigma \leq 550 \text{ MeV}$  sogar noch eher als für größere Werte von  $m_\sigma$ ) mitausschlaggebend für reine Quarksternkonfigurationen. Ein reiner Quarkstern der Parameterwahl  $m_\sigma = 400 \text{ MeV}$ ,  $g_\omega = 2.0$  und  $B^{\frac{1}{4}} = 60 \text{ MeV}$  könnte nach Abbildung (8.27) über die  $2M_\odot$ -Grenze kommen, dort hätte jedoch der Phasenübergang wegen der geringen Masse des  $\sigma$ -Mesons deutlich unter den  $\mu_q = 300 \text{ MeV}$  stattgefunden (Abbildung (8.15)). Bei der Wahl  $m_\sigma = 600 \text{ MeV}$  kann man für reine Quarksterne nur  $B^{\frac{1}{4}} \leq 20 \text{ MeV}$  wählen. Mit einer solchen Wahl käme man auch über die erstrebte Grenze. Allerdings ist  $B^{\frac{1}{4}} = 20 \text{ MeV}$  ein, verglichen mit anderen Arbeiten über Quarksterne (z.B.: ([KSt99])), doch eher (sehr) kleiner Wert. Die Masse des Sigma Mesons hat also einen erheblich größeren Einfluß

auf das (reine) Quark-Gluon Plasma als die Vektorkopplung. Leider konnte dessen Masse experimentell bisher nicht besser eingegrenzt werden. Eine andere *Hauptstellschraube* an der Maximalmasse in Zusammenhang mit reiner Quarksternmaterie ist die (phänomenologische) Bag-Konstante, die hier verhältnismäßig sehr klein gewählt wurde. Diese Tatsachen bieten Raum für Spekulationen um Validität der diskutierten Parameter.

Will man in einem physikalisch sinnvollen Bereich bleiben, so ist es in unserem Modell nicht gerade einfach, rein aus Quarkmaterie bestehende Sterne von über  $2M_{\odot}$  zu finden, jedoch auch nicht unmöglich.

# 9

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein *chirales 3 flavor Quark Meson Modell mit Bag-Konstante*<sup>1</sup> aufgestellt, um die Existenz von Quarksternen bzw. rein aus Quarkmaterie bestehender *kompakter Objekte* zu analysieren. Ausschlaggebend dafür war die Entdeckung des Pulsars PSR J1614-2230 mit fast  $2M_{\odot}$ . Es sollte untersucht werden, ob sich im Parameterbereich des Modelles physikalisch sinnvolle Lösungen befinden, die die Existenz von (puren) Quarksternen mit  $\geq 2M_{\odot}$  zulassen. Obgleich aus Arbeiten wie etwa [QmC11] bekannt ist, dass ein weiterer Freiheitsgrad (die *strangeness*) die Zustandsgleichung (EOS) weicher werden lässt, und somit die Maximalmasse, vergleichen mit zwei flavor Quarkmaterie eher senkt, so ergaben sich doch auch einige physikalisch sinnvolle Lösungen für die Existenz solch exotischer Objekte, zumindest in diesem Modell.

Aufbauend auf dem in [Mal12] diskutierten 2-flavor Quark-Meson Modell haben wir in dieser Arbeit das *strange quark* als weiteren Freiheitsgrad mitberücksichtigt. Im verwendeten  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  Lagrangian  $\mathcal{L}$  wurde *spontane-* und *explizite* Symmetriebrechung eingearbeitet, um Eigenschaften der

---

<sup>1</sup>Auch unter dem Namen *Lineares Sigma Modell* bekannt

starken Wechselwirkung, wie etwa das *quark-confinement* und die *asymptotische Freiheit*, so gut wie möglich beschreiben zu können. Bedingt durch die *strangeness* haben wir, statt wie im SU(2)-Modell drei mesonische Felder ( $\sigma_n$ ,  $\omega$  und  $\rho$ ) zwei weitere Felder mitzuberücksichtigen, nämlich das skalare  $\sigma_s$  und das vektorielle  $\phi$ . Diese Felder wurden als stationärer Hintergrund betrachtet, mit denen die freien *quarks* wechselwirken können.

Die aus diesem Lagrangian gewonnene Zustandssumme  $\mathcal{Z}$  wurde im Matsubara-Formalismus über die Pfadintegralmethode ausgerechnet. Mit Hilfe der Gibbs-Duhem Relation wurde über die Zustandssumme das großkanonische Potential  $\Omega$  bestimmt, um damit Aussagen über thermodynamische Beziehungen wie Druck und Dichte treffen zu können. Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen ließen wir eine andere thermodynamische Größe, die Temperatur  $T \rightarrow 0$  gehen. Anschliessend wurden die Ableitungen des Potentials nach den jeweiligen Feldern  $\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_s}$ ,  $\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_n}$ ,  $\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}$ ,  $\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}$  und  $\frac{\partial\Omega}{\partial\phi}$  Null gesetzt, um numerisch an die Feldwerte in Abhängigkeit des chemischen Potentials  $\mu_q$  zu kommen. Mit jenen stellten wir die gewünschten Beziehungen zwischen Druck und Energiedichte her (EOS), um die TOV-Gleichungen, die die Masse-Radius Beziehungen solcher Objekte bestimmen, zu lösen. Die Ableitungen nach den Feldern, die so genannten *Gap-equations*, wurden mit Hilfe einer *solver*-Routine der *gnu-scientific library* in **c** gelöst. Die erhaltenen Ergebnisse wurden zum Zwecke der Validität mit diversen Arbeiten verglichen, bevor eine Auswertung der erhobenen Daten stattfinden konnte.

Wir konnten in diesem Modell *vier* Freiheitsgrade, die konstituente Quarkmasse  $m_q$ , die gemäß Gleichung (7.104) die skalare Kopplung repräsentiert, die vektormesonische Kopplung  $g_\omega$ , die experimentell noch nicht besser eingegrenzte Masse des Sigma-Mesons  $m_\sigma$  sowie die phänomenologische Bag-Konstante  $\mathbf{B}$  variieren.

Wir konnten für kleines  $m_q \leq 300$  MeV einen *crossover* betrachten. Der Phasenübergang fand je etwa bei dem gewählten  $m_q$  statt. Bei einem Wert von  $m_q = 300$  MeV bekamen wir einen Phasenübergang erster Ordnung in den beiden skalaren Feldern, während für Werte über  $m_q \geq 400$  MeV der Phasenübergang sehr stark sprang, und die EOS für unsere Zwecke zu weich machte. Obgleich wir mit  $m_q = 100$  MeV eine beachtliche Masse von  $\sim 1.9M_\odot$



bei knapp über 10 km Radius bekamen, beließen wir bei der Variation der anderen Parameter die *konstituente* Quarkmasse stets auf einem Wert von  $m_q = 300$  MeV, was zwar die Maximalmasse bei gegebenem Radius absenkte, sich jedoch physikalisch als das Sinnvollste herausstellte.

Im Anschluss variierten wir die Kopplung der Vektormesonen. Auch hier konnten wir *crossover* in den skalaren Feldern betrachten, und zwar für Werte  $g_\omega \geq 5.0$ . Für jene Werte näherte sich in der EOS die Energiedichte dem Druck und tendierte immer mehr zur Akausalität, was sie selbstverständlich durch Konstruktion nie wurde. Für die Masse Radius Relationen zwar günstig, jedoch eher unwahrscheinlich. Da wir den Sprung in den skalaren Kondensaten bei  $\mu_q = 300$  MeV anstrebten, beließen wir die Vektorkopplung bei Variation der anderen Parameter bei  $g_\omega = 2.0$ . Die Vektorkopplung hat einen erheblichen Einfluß auf die EOS und somit auf die Lösungen der TOV-Gleichungen. Für  $g_\omega = 7.0$  kamen wir beispielsweise spielend über  $2M_\odot$ , jedoch wollten wir in einem physikalisch eher sinnvolleren Bereich agieren.

Für die experimentell noch nicht besser bestimmte Masse des Sigma-Mesons wählten wir einen Bereich zwischen  $400 \text{ MeV} \leq m_\sigma \leq 1000 \text{ MeV}$ . Hier beobachteten wir einen *crossover* für Werte jenseits  $m_\sigma \geq 800$  MeV bei gleichzeitigem Erweichen der EOS. Da beides nicht wünschenswert war, wählten wir  $m_\sigma = 600$  MeV, womit wir an die  $1.5M_\odot$  erreichten. Mit  $m_\sigma = 400$  MeV erreichten wir zwar knapp  $2M_\odot$ , jedoch fand der Phasenübergang deutlich unter  $\mu_q = 300$  MeV statt, so dass wir, wie auch in den Arbeiten von [Mal12] oder [TBs12] den Wert von  $m_\sigma = 600$  MeV beließen.

Durch Variation der Bag-Konstanten konnten wir, erwartungsgemäß der Diskussion in Kapitel (5), die EOS weicher oder härter machen. Der Feldverlauf blieb dabei unabhängig von der Bag-Konstanten. Die Masse bei gegebenem Radius stieg auch hier mit der Härte der EOS an. Wir kamen mit Bag=40 MeV den  $2M_\odot$  ziemlich nahe, entschieden uns aber, motiviert durch Arbeiten wie beispielsweise [KSt99], für Bag=120 MeV und den dazugehörenden  $1.7M_\odot$  für die Variation der anderen freien Parameter.

Innerhalb des verwendeten Modelles kamen wir zu dem Schluß, dass  $m_q = 300$  MeV der physikalisch sinnvollste Wert ist. Für große Vektorkopplung

konnten wir die EOS entsprechend härter machen, um somit die Maximalmasse zu erhöhen. Auch ist die Masse des Sigma Mesons bevorzugt klein zu wählen. Die EOS wird dadurch härter und die Maximalmasse größer. Die phänomenologische Bag-Konstante beließen wir, trotz relativ kleiner Maximalmasse, bei einem Wert von 120 MeV.

Für *reine* Quarksternkonfigurationen kamen wir zu nahezu analogem Ergebnis: Die Masse des Sigma Mesons erweist sich klein als günstiger. Ebenso muss die Bag Konstante relativ klein gewählt werden. In jedem anderen Fall kam heraus, dass man zumindest eine hadronische Kruste hat, also einen Hybridstern. Für eine klein gewählte Bag Konstante und kleines  $m_\sigma$  gab (bei konstantem  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $g_\omega=2.0$ ) es tatsächlich ein kleines Fenster, in dem reine Quarksterne mit über  $2M_\odot$  möglich scheinen. Die repulsiven Vektormesonen spielten hierbei jedoch kaum ins Gewicht, daher konnte auch mit einer relativ klein gewählten Vektorkopplung die erstrebte Masse erreicht werden.

Aufbauend auf dem in dieser Arbeit diskutierten Modell könnte man in (naher) Zukunft das Modell auf endliche Temperaturen erweitern. Dadurch wäre man beispielsweise in der Lage, die Konditionen für *kompakte Objekte* direkt nach einer Supernova-Explosion vom Typ II zu simulieren. Da nach gängiger Meinung die Kühlung von kompakten Objekten hauptsächlich durch Neutrino-Emission in den ersten  $\pm 10^4$  Jahren besorgt wird [Sed11], müsste man deren Wirkungsquerschnitt im verwendeten Modell miteinbeziehen, um zu studieren, wie viel Energie in gegebenem Zeitintervall sie dem Stern tatsächlich zu entziehen vermögen. Die Neutrinoemission findet dabei durch geladene ( $W^\pm$ ) und ungeladene ( $Z^0$ ) Prozesse der schwachen Wechselwirkung statt. Damit würde man den hier diskutierten Parameterbereich zudem etwas besser eingrenzen können.

Im Fall von rein aus Quark-Materie bestehenden Objekten, aber auch im Inneren von Hybridsternen, muss man sicherlich mehrere *quantenchromodynamische* Korrekturfaktoren miteinbeziehen. Effekte, wie etwa die *Farbsupraleitung*, spielen bei der Beschreibung von **sehr** kompakten Objekten sicherlich ebenfalls eine nicht zu vernachlässigende Rolle.

Auch die Rotationsperiode solcher Objekte<sup>2</sup> grenzt die Maximalmasse erheblich ein, und wurde in dieser Arbeit ebensowenig berücksichtigt, wie Effekte durch Magnetfelder, die an den Oberflächen solcher Objekte um Größenordnungen von irdisch reproduzierbaren Magnetfeldern abweichen. Interessant im Zusammenhang mit der Rotation dieser Objekte ist sicherlich auch das *frame-dragging*, welches dann die Metrik außerhalb des Sternes um einiges komplizierter machen würde, als hier (statisch) diskutiert.

---

<sup>2</sup>Die meisten kompakten Objekte sind Millisekundenpulsare

# 10

## Danksagung

Für meine Tochter Emilia Lara  
Andreas Zacchi

# Abbildungsverzeichnis

2.1	<i>Albert Einstein (aus [LKr10])</i> . . . . .	6
2.2	<i>Mechanische Vorgänge in Gravitationsfeld und in gleichförmig beschleunigtem Bezugssystem [AsM11])</i> . . . . .	16
2.3	<i>Die Wegstrecken der beiden Objekte unter Gravitation ((a):links) und Beschleunigung ((b):rechts) aus ([Sta08])</i> . . . . .	17
2.4	<i>Geodäte: Kürzeste Verbindung auf einer gekrümmten Fläche (aus [Sci01])</i> . . . . .	19
4.1	<i>Potential des <math>\varphi^4</math> - Lagrangians für den Fall <math>m^2 &gt; 0</math></i> . . . . .	46
4.2	<i>Potential des <math>\varphi^4</math> - Lagrangians für den Fall <math>m^2 &lt; 0</math></i> . . . . .	47
4.3	<i><math>\pi</math>-<math>\sigma</math>-Potential. Anregungen in radiale Richtungen (entlang des schwarzen Kreises) kosten keine Energie, wohin gegen eine Anregung aus dem Minimum heraus (z.B.:den Hügel hoch) Energie kostet</i> . . . . .	48
4.4	<i>Potential des <math>\varphi^4</math> - Lagrangians für den Fall <math>m^2 &lt; 0</math> mit explizitem Symmetriebruch</i> . . . . .	49
4.5	<i>up-, down-, und strange quark in Multiplett Darstellung. <math>\hat{Y}</math> bezeichnet die Hyperladung und <math>\hat{I}</math> den Isospin</i> . . . . .	52
5.1	<i>Die Zustandsgleichungen für verschiedene Bag Konstanten im Bag-Modell</i> . . . . .	58
5.2	<i>Die Masse-Radius-Relationen für verschiedene Bag Konstanten im Bag-Modell</i> . . . . .	59
5.3	<i>Die Masse-Druck Beziehung für verschiedene Bag Konstanten im Bag-Modell</i> . . . . .	60

8.1	<i>Die normierte (Ladungs-)dichteverteilung von up- down- und strange Quark in Abhängigkeit von <math>\mu_q</math>. Aus diesem Graphen kann man sowohl die Ladungsneutralität als auch die Dichteverteilung ablesen.</i>	91
8.2	<i>Die (Ladungs-)dichteverteilung der Elektronen in Abhängigkeit von <math>\mu_q</math></i>	92
8.3	<i>Die skalaren Kondensate <math>\sigma_n</math> als Funktion des chemischen Potentials <math>\mu_q</math> bei Variation von <math>m_q</math> mit <math>g_\omega = 2.0</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	94
8.4	<i>Die skalaren Kondensate <math>\sigma_s</math> als Funktion des chemischen Potentials <math>\mu_q</math> bei Variation von <math>m_q</math> mit <math>g_\omega = 2.0</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	95
8.5	<i>Die skalaren Kondensate <math>\sigma_n</math> und <math>\sigma_s</math> als Funktion von <math>\mu_q</math> mit <math>m_q = 300</math> MeV, <math>g_\omega = 2.0</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	96
8.6	<i>Die vektoriellen Kondensate <math>\omega</math>, <math>\rho</math> und <math>\phi</math> als Funktion des chemischen Potentials <math>\mu_q</math> bei <math>m_q = 300</math>, <math>g_\omega = 2.0</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	97
8.7	<i>Die Zustandsgleichung bei Variation von <math>m_q</math> mit <math>g_\omega = 2.0</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	98
8.8	<i>Der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte <math>n_b</math> bei Variation von <math>m_q</math> mit <math>g_\omega = 2.0</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	99
8.9	<i>Die Masse Radius Relation bei Variation von <math>m_q</math> mit <math>g_\omega = 2.0</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	100
8.10	<i>Die skalaren Kondensate <math>\sigma_n</math> als Funktion des chemischen Potentials <math>\mu_q</math> bei Variation von <math>g_\omega</math> bei <math>m_q = 300</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	101
8.11	<i>Die skalaren Kondensate <math>\sigma_s</math> als Funktion des chemischen Potentials <math>\mu_q</math> bei Variation von <math>g_\omega</math> bei <math>m_q = 300</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	102
8.12	<i>Die Zustandsgleichung bei Variation von <math>g_\omega</math> bei <math>m_q = 300</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	103
8.13	<i>Der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte <math>n_b</math> bei Variation von <math>g_\omega</math> bei <math>m_q = 300</math>, <math>m_\sigma = 600</math> MeV und <math>Ba g^{\frac{1}{4}} = 120</math> MeV</i>	104

8.14	Die Masse Radius Relation bei Variation von $g_\omega$ bei $m_q = 300$ , $m_\sigma = 600\text{MeV}$ und $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$ . . . . .	105
8.15	Die skalaren Kondensate $\sigma_n$ als Funktion des chemischen Po- tentiales $\mu_q$ bei Variation von $m_\sigma$ bei $m_q = 300\text{MeV}$ , $g_\omega = 2.0$ und $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$ . . . . .	106
8.16	Die skalaren Kondensate $\sigma_s$ als Funktion des chemischen Po- tentiales $\mu_q$ bei Variation von $m_\sigma$ bei $m_q = 300\text{MeV}$ , $g_\omega = 2.0$ und $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$ . . . . .	107
8.17	Die Zustandsgleichung bei Variation von $m_\sigma$ bei $m_q = 300\text{MeV}$ , $g_\omega = 2.0$ und $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$ . . . . .	108
8.18	Der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte $n_b$ bei Varia- tion von $m_\sigma$ bei $m_q = 300\text{MeV}$ , $g_\omega = 2.0$ und $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$	109
8.19	Die Masse Radius Relation bei Variation von $m_\sigma$ bei $m_q =$ $300\text{MeV}$ , $g_\omega = 2.0$ und $Ba g^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$ . . . . .	110
8.20	Die Zustandsgleichung bei Variation der Bag-Konstanten im Bereich von $40 \leq Ba g^{\frac{1}{4}} \leq 120\text{MeV}$ mit $g_\omega = 2.0$ , $m_q =$ $300\text{MeV}$ und $m_\sigma = 600\text{MeV}$ . . . . .	111
8.21	Die Zustandsgleichung bei Variation der Bag-Konstanten im Bereich von $100 \leq Ba g^{\frac{1}{4}} \leq 200\text{MeV}$ mit $g_\omega = 2.0$ , $m_q =$ $300\text{MeV}$ und $m_\sigma = 600\text{MeV}$ . . . . .	112
8.22	Der Druck in Abhängigkeit der Baryonendichte $n_q$ bei Variati- on der Bag-Konstanten im Bereich von $40 \leq Ba g^{\frac{1}{4}} \leq 120\text{MeV}$ mit $g_\omega = 2.0$ , $m_q = 300\text{MeV}$ und $m_\sigma = 600\text{MeV}$ . . . . .	113
8.23	Die Masse Radius Relation bei Variation von Bag-Konstanten im Bereich von $40 \leq Ba g^{\frac{1}{4}} \leq 120\text{MeV}$ mit $g_\omega = 2.0$ , $m_q = 300\text{MeV}$ und $m_\sigma = 600\text{MeV}$ . . . . .	114
8.24	Die Maximalmasse in Abhängigkeit von $g_\omega$ bei Variation der Bag-Konstanten mit $m_q = 300\text{MeV}$ und $m_\sigma = 600\text{MeV}$ . . . .	115
8.25	Die Maximalmasse in Abhängigkeit der Bag-Konstanten bei Variation von $g_\omega$ mit $m_q = 300\text{MeV}$ und $m_\sigma = 600\text{MeV}$ . . . .	116

- 8.26 Die Maximalmassen auf die Bag- $g_\omega$ -Ebene bei fixierten  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  projiziert. Ab dem hellblauen Bereich hat man bereits Maximalmassen von  $\geq 1.9M_\odot$ . Zu größerer Vektorkopplung und kleinerem  $B^{\frac{1}{4}}$  steigt die Maximalmasse. . . . . 117
- 8.27 Die Maximalmassen auf die Bag- $m_\sigma$ -Ebene bei fixierten  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $g_\omega = 2.0$  projiziert. Ab dem hellgrünen Bereich hat man bereits Maximalmassen von  $\geq 1.8M_\odot$ . Zu kleinerem  $m_\sigma$  und kleinerem Bag steigt die Maximalmasse. . . . . 118
- 8.28 Die Maximalmassen mit  $B^{\frac{1}{4}} = 120\text{MeV}$  auf die  $g_\omega$ - $m_\sigma$ -Ebene projiziert. Ab dem hellgrünen Bereich hat man bereits Maximalmassen von  $\geq 1.8M_\odot$ . Zu kleinerem  $m_\sigma$  und größerer Vektorkopplung steigt die Maximalmasse. . . . . 119
- 8.29 Reine Quarksternkonfigurationen findet man im dunkelblauen Bereich bei (sehr) kleiner Bag Konstante. Dort ist reine Quarkmaterie energetisch günstiger als hadronische Materie.  $g_\omega$  hat keinen allzugroßen Einfluß. Die beiden fixierten Werte sind  $m_q = 300\text{MeV}$  und  $m_\sigma = 600\text{MeV}$  . . . . . 120
- 8.30  $\frac{E}{A}$  auf die Bag- $m_\sigma$  Ebene projiziert. Reine Quarksternkonfigurationen findet man im dunkelblauen bis blauen Bereich bei kleiner Bag Konstante bei  $\frac{E}{A} \leq 308\text{MeV}$ . Die beiden anderen Werte sind  $m_q = 300\text{ MeV}$  und  $g_\omega = 2.0$  . . . . . 121



# Tabellenverzeichnis

2.1	<i>Allgemeinrelativistische Korrekturen für verschiedene Objekte in der Schwarzschildmetrik . . . . .</i>	30
4.1	<i>Transformationen und erhaltene Größen (klassisch) . . . . .</i>	44
4.2	<i>Die sechs quark-Generationen mit spin <math>\frac{1}{2}</math> (aus[PDG12]) . . . . .</i>	55
7.1	<i>Die Mesonenfelder . . . . .</i>	85

# Literaturverzeichnis

- [Mar88] J.L. Martin:  
*General relativity: A guide to its consequences for gravity and cosmology*  
Ellis Horwood Library of physics; ISBN 0-470-21183-0
- [Bie07] Daniel Bielecki:  
*Spontane Symmetriebrechung und Goldstone Theorem*  
Westfälische Wilhelm Universität, Münster
- [SGS00] K.Schertler, C.Greiner, J. Schaffner-Bielich, M.H. Thoma  
*Quark phases in neutron stars and a third family of compact stars as signature for phase transitions*  
Universität Giessen, RIKEN BNL, Cern
- [SGM98] K.Schertler, C.Greiner, M.H. Thoma  
*Medium effects and the structure of neutron stars in the effective Bag Model*  
Universität Giessen
- [SGT98] K.Schertler, C.Greiner, P.K. Sahu M.H. Thoma  
*The influence of Medium effects on the Gross structure of hybrid stars*  
Universität Giessen
- [Fli33] Torsten Fließbach:  
*Allgemeine Relativitätstheorie*  
Spektrum der Wissenschaft ISBN 3-8274-1356-7

- [Gln96] Norman Glendenning:  
*Compact stars - Nuclear physics, particle physics and general relativity*  
Springer Verlag; ISBN 0-387-94783-3
- [Bro87] I.N. Bronstein; K.A. Semendjajew:  
*Taschenbuch der Mathematik*  
Teubner Verlag; ISBN 3 87144 492 8
- [DoS98] S. Doniach; E.H. Sondheimer:  
*Green's functions for solid state physics*  
Imperial College Press; ISBN 1-86094-080-3(pbk)
- [DGr08] David Griffiths:  
*Introduction to Elementary Particles*  
WILEY-VCH; ISBN 978-3-527-40601-2
- [Fun00] E. Freitag; R. Busam:  
*Funktionentheorie I*  
Springer-Verlag; ISBN 3-540-67641-4
- [Gia12] Francesco Giacosa:  
*Ein effektives Modell der QCD mit Vektormesonen, Dilaton und Tetraquarks: Physik im Vakuum und bei nichtverschwindender Dichte und Temperatur*  
Habilitationsschrift; Universität Frankfurt 2012
- [MSQ85] Franz Mandl; Graham Shaw:  
*Quantenfeldtheorie*  
Aula Verlag; ISBN 3-89104-532-8
- [QFD08] David McMahon:  
*Quantum field theory: Demystified*  
McGraw/Hill; ISBN 987-0-07-154382-8
- [Mos98] Ulrich Mosel:  
*Fields, Symmetries and Quarks*  
Springer Verlag; ISBN 3-540-65235-3

[Mal12] Margit Maly:

*Compact stars in the Quark-Meson Model*

Diplomarbeit; Universität Heidelberg 2012

[TBs12] Thomas Beisitzer:

*Supernova Equation of State with an extended  $SU(3)$  Polyakov Quark Meson Model*

Master Arbeit; Universität Heidelberg 2012

[KSt99] Klaus Schertler:

*Quarkphasen in Neutronensternen und die Dritte Familie kompakter Sterne*

Inaugural-Dissertation; Universität Gießen 1999

[Han04] Matthias Hanauske:

*Eigenschaften von kompakten Sternen in QCD motivierten Modellen*

Inaugural-Dissertation; Universität Gießen 1999

[Com05] I.Sagert, M.Hempel, C.Greiner, J.Schaffner-Bielich:

*Compact stars for undergraduates*

arXiv:astro-ph/0506417v1; 17. Juni 2005

[MVP12] D.Parganlĳia, P.Kovacs, Gy.Wolf, F.Giacosa, D.-H.Rischke:

*Meson vacuum phenomenology in a three-flavor linear sigma model with (axial-)vector mesons*

arXiv:1208.0585v1; 02. August 2012

[PSR10] F.Özel, D. Psaltis, S. Ransom, P. Deremost, M. Alford:

*The massive pulsar PSR J1614-2230: Linking QCD, Gamma-ray bursts and gravitational wave astronomy*

arXiv:1010.5790v1; 27. Oktober 2010

[HDQ08] B.-J. Schaefer, M. Wagner:

*The three-flavor chiral phase structure in hot and dense QCD matter*

arXiv:0808.1491v2; 18. November 2008

- [PQM07] B.-J. Schaefer, J.M. Pawłowski, J. Wambach:  
*The phase structure of the Polyakov-Quark-Meson Model*  
arXiv:0704.3234v2; 24. September 2007
- [CSR00] Jonathan T. Lenaghan, Dirk H. Rischke, J. Schaffner-Bielich:  
*Chiral Symmetry Restoration at Nonzero Temperature in the  $SU(3)_r \times SU(3)_l$  Linear Sigma Model*  
arXiv:nucl-th/000400v1; 04. April 2000
- [QmC11] S.Weissenborn, I.Sagert, G.Pagliara, M.Hempel, J.Schaffner-Bielich:  
*Quark matter in massive compact stars*  
arXiv:1102.2869v2; 07. Oktober 2011
- [QmP08] I.Sagert, G.Pagliara, M.Hempel, J.Schaffner-Bielich:  
*Is there Quark matter in (low mass) Pulsars?*  
arXiv:0808.1049v1; 07. August 2008
- [NJL99] Klaus Schertler, Stefan Leupold:  
*Neutron stars and quark phases in the NJL model*  
arXiv:astro-ph/990152v1; 12. Januar 1999
- [ChS97] Volker Koch:  
*Aspects of chiral Symmetry*  
arXiv:nucl-th/970675v2; 27. Juni 1997
- [QmS10] J.Schaffner-Bielich:  
*Strangeness in compact stars*  
arXiv:1002.1658v2; 20. April 2010
- [Lic57] A.Lichnerowicz:  
*Einführung in die Tensoranalysis*  
Bibliographisches Institut - Mannheim
- [Sta08] Russel Stannard:  
*Relativity:A very short Introduction*  
Oxford University Press; ISBN 978-0-19-923622-0

- [SaW23] Brian D. Serot and John D. Walecka:  
*The relativistic nuclear many-body-problem*  
Indiana University, Bloomington and Stanford University, Stanford,  
CA
- [Par12] Denis Parganl'ja: *Quarkonium Phenomenology in Vacuum*  
Dissertation 12. Dezember 2011, Goethe Universität, Frankfurt/Main
- [MTW55] Misner, Thorne, Wheeler:  
*Gravitation*
- [Ris10] Dirk H. Rischke: „*Theoretische Elektrodynamik*“  
WS 10/11 Skript zur Vorlesung, Goethe Universität, Frankfurt/Main
- [Ris12] Dirk H. Rischke: *Quantenmechanik II*  
SS 12 Skript zur Vorlesung, Goethe Universität, Frankfurt/Main
- [Zch12] Andreas Zacchi: *Exponentialfunktionen - Eine kleine Anleitung*  
<http://www.user.uni-frankfurt.de/~zacchi>  
SfE und Goethe Universität, Frankfurt/Main
- [Sed11] Armen Sedrakian: „*Astroteilchenphysik*“  
WS 11/12 Skript zur Vorlesung, Goethe Universität, Frankfurt/Main
- [Sci01] <http://www.scienceblogs.de/mathlog/Web.jpeg>  
Zugriff: 19.09.2011
- [LKr10] <http://www.leipziger-kritiken.de/wp-content/uploads/2010/06/Einstein.jpg>  
Zugriff: 11.10.2011
- [AsM11] <http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen.html>  
Zugriff: 11.10.2011
- [PDG12] <http://pdg.lbl.gov/2012/tables/rpp2012-sum-quarks.pdf>  
Zugriff: 05.07.2012

[Bla12] Matthias Blau *Lecture notes on General relativity*

<http://www.blau.itp.unibe.ch/lecturesGR.pdf>

Zugriff: 05. Januar 2012