R. Stiele / T. Bödel

1 Differentialgeometrie gekrümmter Flächen

Ergänzung zur Vorlesung "Allgemeine Relativitätstheorie", J. Reinhardt

Literatur: D.C. Kay, Tensor Calculus, McGraw-Hill, 1988 (Schaum's Outline Series)

Grundlage der ART: 4-dimensionaler gekrümmter Riemannscher Raum. Dies entzieht sich der direkten Anschauung. Einfachere Analogie: 2-dimensionale gekrümmte Flächen, eingebettet in den 3-dimensionalen euklidischen Raum unserer Anschauung.

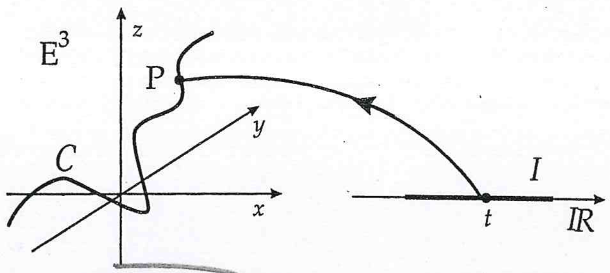
1.1 Vorbetrachtung: Kurven im 3-dimensionalen Raum

Raumkurven können verschiedenartig definiert werden, z.B. durch Angabe von zwei Bedingungsgleichungen (Interpretation: Schnittkurve von zwei Flächen) oder durch Parameterdarstellung.

Beispiel: Kreis in der $x-y$-Ebene

$$\begin{aligned} \text{Gleichungssystem:} \quad & x^2+y^2=a^2 \quad \text{und} \quad z=0 \\ \text{Parameterdarstellung:} \quad & \vec{r}(\varphi)=(a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0) \quad , \quad 0\le\varphi<2\pi \end{aligned}$$

Die Raumkurve C als Abbildung aus einem eindimensionalen Parameterraum in den dreidimensionalen euklidischen Raum E^3.



Allgemeine *Parameterdarstellung einer Raumkurve*: $\boxed{\vec{r}=\vec{r}(t)}$ mit dem Kurvenparameter t. Das ist eine Abbildung aus einem reellen Intervall I in den euklidischen Raum E^3

$$\begin{aligned} I\in\mathbb{R} \quad &\rightarrow \quad E^3 \\ t \quad &\mapsto \quad (f(t),g(t),h(t)) \end{aligned}$$

mit drei eindimensionalen Funktionen f,g,h (die als hinreichend stetig differenzierbar vorausgesetzt werden). Die Wahl der Parametrisierung ist beliebig und hat keine "physikalische" Bedeutung.

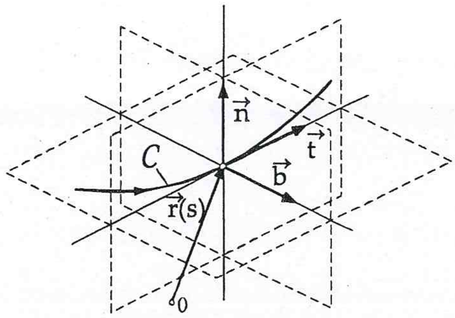
Tangenteneinheitsvektor: $\vec{t}=\dfrac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{d\vec{r}}{ds}$.

mit der Bogenlänge $ds=|d\vec{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Hier wird die euklidische Metrik im Raum E^3 benutzt.

Krümmungsvektor: $\vec{k}=\dfrac{d\vec{t}}{ds}$. für später wichtig

Die Richtung von $\vec{k}$ definiert den *(Haupt-)Normalenvektor* $\vec{n}=\dfrac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$.

Sein Betrag ist die *Krümmung* $|\vec{k}| = \kappa$, also $\vec{k} = \kappa\,\vec{n}$. Der zu κ reziproke Wert ist der *Krümmungsradius* $\rho = 1/\kappa$.



Binormalenvektor: $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$.
Zur Erinnerung: Es gelten die Frenetschen Formeln

$$\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n}} \quad , \quad \dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b} \quad , \quad \dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}$$

mit der Abkürzung $\cdot \equiv d/ds$. τ ist die Torsion.

1.2 Flächen im 3-dimensionalen Raum

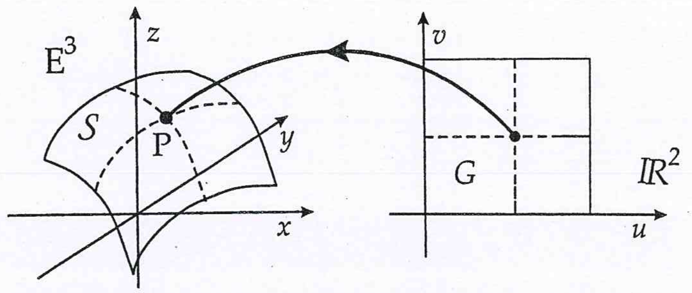
2-dim Fläche

Mögliche Arten der Definition einer Fläche:
a) Angabe einer Bedingungsgleichung $F(x, y, z) = 0$,
b) Explizite Funktion $z = f(x, y)$,
c) Parameterdarstellung.

Beispiel: Kugeloberfläche

a) Bedingungsgleichung:	$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
b) Explizite Gleichung:	$z(x, y) = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
c) Parameterdarstellung:	$\vec{r} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$
	mit $\quad 0 \le \varphi < 2\pi\ ,\ 0 \le \theta \le \pi$

Die Fläche $\mathcal{S}$ als Abbildung aus einem zweidimensionalen Parameterraum in den dreidimensionalen euklidischen Raum E^3.



Allgemeine *Parameterdarstellung einer Fläche:* $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ mit den Flächenparametern u, v. Das ist eine Abbildung aus einem zweidimensionalen Gebiet G in den euklidischen Raum E^3

$$\begin{array}{ccc} G \in \mathbb{R}^2 & \rightarrow & E^3 \\ (u, v) & \mapsto & (f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \end{array}$$

Unter Umständen wird nur ein Teil der gesamten Fläche durch die Parametrisierung erfasst (Karte, Patch). Die Flächenparameter müssen *keine* cartesischen Koordinaten sein. Trotzdem schreiben wir abkürzend $x^i = (x^1, x^2) = (u, v)$. Das darf nicht mit den cartesischen Koordinaten (x, y, z) im Einbettungsraum verwechselt werden!

Koordinatenlinien: Zwei Familien von Kurven von denen jeweils eine durch jeden Punkt P läuft.

u-Koordinatenlinie: $\quad \vec{r}(u) = \vec{r}(u, v = \text{const})$,

v-Koordinatenlinie: $\quad \vec{r}(v) = \vec{r}(u = \text{const}, v)$.

Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien (nicht normiert):

$\vec e_1, \vec e_2$ spannen Tangential Raum auf klarmachen

$u \to x^1$

$v \to x^2$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \equiv \overbrace{\partial_1 \vec{r}}^{\vec e_1} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \equiv \overbrace{\partial_2 \vec{r}}^{\vec e_2}$$

(Anmerkung: In der Literatur findet man auch die Notation $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ für die Tangentenvektoren.) Die beiden Tangentenvektoren werden zu einem Dreibein (Triade) – und somit zu einer Basis des Raums $I\!R^3$ – ergänzt indem man die *Flächennormale* $\vec{N}$ definiert:

$$\boxed{\vec{N} = \frac{\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}}{|\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r}|} .}$$

steht senkrecht auf

"Pathologische Stellen" wo dies nicht möglich ist, d.h. $\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r} = 0$ bezeichnet man als irreguläre Punkte.

Die Vektoren $\partial_1 \vec{r}$ und $\partial_2 \vec{r}$ spannen in jedem Punkt P einen 2-dimensionalen *Tangentialraum* (Tangentialebene) auf. Die Tangente an jede Kurve $\mathcal{C} \in \mathcal{S}$ die durch P läuft liegt im Tangentialraum. Aus $\vec{r} = \vec{r}(x^1(t), x^2(t))$ ergibt sich für die Tangente

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} \equiv u^1 \, \partial_1 \vec{r} + u^2 \, \partial_2 \vec{r} \equiv u^i \, \partial_i \vec{r} .$$

Hier ist $u^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ und es wurde die *Summationskonvention* verwandt (Summation über wiederholte Indizes). u^i ist die "Änderungsgeschwindigkeit" der Koordinate x^i entlang der Kurve $\mathcal{C}$.

Die erste Fundamentalform

Betrachte eine Kurve $\mathcal{C}$ auf der Fläche $\mathcal{S}$, parametrisiert durch die Funktion $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Für die Bogenlänge gilt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = u^i \partial_i \vec{r} \cdot u^j \partial_j \vec{r} = g_{ij} u^i u^j$$

$\vec e_i \cdot \vec e_j = g_{ij}(x)$

oder $\quad \boxed{ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \equiv I} \quad$ mit $\quad \boxed{g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}}$

$g_{ij} = g_{ji}$

Die Metrik g_{ij} beschreibt die Längen und Winkel auf der Fläche $\mathcal{S}$. Der Tangenteneinheitsvektor an eine Kurve $\mathcal{C}$ lautet

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{u^i \partial_i \vec{r}}{\sqrt{g_{ij} u^i u^j}} .$$

$\frac{dx^2}{dt} = 0$

$\vec r(x^1(t), x^2 = \text{const})$

Schnittwinkel zwischen zwei Koordinatenlinien: $\cos\theta = \dfrac{u^1 \partial_1 \vec{r} \cdot u^2 \partial_2 \vec{r}}{|u^1 \partial_1 \vec{r}| \, |u^2 \partial_2 \vec{r}|} = \dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$.

$\vec N = \vec N(x_1, x_2)$
$\vec r = \vec r(x_1, x_2)$

Die zweite Fundamentalform

Die zweite Fundamentalform bezieht sich auf "Beschleunigungen" die aus der Fläche heraus führen, erkennbar am Auftreten der Flächennormale $\vec{N}$. Sie ist definiert durch

$i, j = 1,2$

$$\boxed{II \equiv f_{ij} dx^i dx^j} \qquad \text{mit} \qquad \boxed{f_{ij} = \vec{N} \cdot \partial_i \partial_j \vec{r}}$$

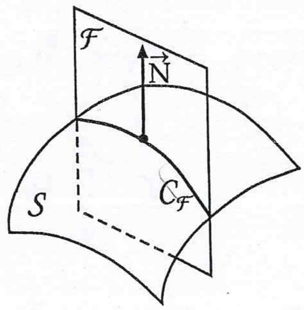
$f_{ij} = f_{ji}$

Anmerkung: Die Koeffizientenmatrix f_{ij} lässt sich auch anders hinschreiben. Aus der Orthogonalität der Tangentenvektoren $\vec{N} \cdot \partial_i \vec{r} = 0$ ergibt sich durch Ableiten $\partial_j(\vec{N} \cdot \partial_i \vec{r}) = \partial_j \vec{N} \cdot \partial_i \vec{r} + \vec{N} \cdot \partial_j \partial_i \vec{r} = 0$ woraus folgt $f_{ij} = -\partial_i \vec{N} \cdot \partial_j \vec{r}$.

Die Normalkrümmung

Betrachte einen Satz von Kurven $\mathcal{C} \in \mathcal{S}$ die durch den Punkt P laufen. Als *Normalkrümmung* κ_N wird die Projektion des Krümmungsvektors $\vec{k}$ der jeweiligen Kurve auf die Fächennormale $\vec{N}$ bezeichnet:

$$\kappa_N = \vec{k} \cdot \vec{N} \,. \qquad \vec k \hat{=} \frac{d\vec t}{ds}$$



Dabei werden als Kurven $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ "Normalschnitte" betrachtet. Dies sind die Schnittkurven der Fläche $\mathcal{S}$ mit Ebenen $\mathcal{F}$, die senkrecht auf der Fläche stehen, d.h., die den Normalenvektor $\vec{N}$ enthalten.

Die Normalkrümmung erweist sich als der Quotient aus zweiter und erster Fundamentalform:

$$\kappa_N = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \cdot \vec{N} = \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \partial_i \partial_j \vec{r} \cdot \vec{N} = f_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2} = \frac{f_{ij} u^i u^j}{\frac{dx^i}{dt}\partial_i \vec{r} \cdot \frac{dx^j}{dt}\partial_j \vec{r}}.$$

(i?) $\vec t = \frac{d\vec r}{ds} = (\partial_j \vec r) \cdot \frac{dx^j}{ds}$, $\frac{d\vec t}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec r}{ds}\right)$

also $= (\partial_i \partial_j \vec r)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + (\partial_j \vec r)\frac{d^2 x^j}{ds^2}$ $\qquad \boxed{\kappa_N = \frac{f_{ij} u^i u^j}{g_{ij} u^i u^j}} \qquad = K(u)$

steht senkrecht zu $\vec N$, da $\vec N \sim (\partial_1 \vec r) \times (\partial_2 \vec r)$

Der Wert von κ_N ist eine kontinuierliche Variable, die von der Orientierung der Schnittebene $\mathcal{F}$, also von der Richtung (nicht der Länge) des Vektors $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ in der Parameterebene abhängt (als periodische Funktion im Azimutalwinkel). Von besonderem Interesse sind die Extrema dieser Funktion $\quad \kappa_1 = \max \kappa_N \quad , \quad \kappa_2 = \min \kappa_N$.
κ_1 und κ_2 werden als die beiden *Hauptkrümmungen* der Fläche $\mathcal{S}$ im Punkt P bezeichnet.

Nebenrechnung:
Mathematisch handelt es sich bei der Bestimmung der Hauptkrümmungen um ein Extremalproblem für eine Funktion zweier Variablen die sich aus dem Verhältnis von zwei Bilinearformen bestimmt:

$u^i = \frac{dx^i}{dt}$ ≙ Vektor in Tangentialebene

$$F(\mathbf{u}) = \frac{f_{ij} u^i u^j}{g_{kl} u^k u^l} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{f}\, \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{g}\, \mathbf{u}}$$

mit den symmetrischen 2×2-Matrizen $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$, wobei die Matrix

$\mathbf{g}$ positiv definit ist.

Wie bei Extremwertaufgaben üblich findet man die Extrema durch Nullsetzen der Ableitung, also $\vec{\nabla}F(\mathbf{u}) = 0$. Die komponentenweise Berechnung des Gradienten liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u^n} &= \frac{(f_{nj}u^j + f_{in}u^i)(g_{kl}u^k u^l) - (f_{ij}u^i u^j)(g_{nl}u^l + g_{kn}u^k)}{(g_{kl}u^k u^l)^2} \\
&= 2\,\frac{(f_{nj}u^j)(g_{kl}u^k u^l) - (f_{ij}u^i u^j)(g_{nl}u^l)}{(g_{kl}u^k u^l)^2} \\
&= \frac{2}{g_{kl}u^k u^l}\left[f_{nj}u^j - F(\mathbf{u})\, g_{nl}u^l\right]
\end{aligned}$$

oder vektoriell geschrieben

Anmerkung: (*)

$$\vec{\nabla}F = \frac{2}{\mathbf{u}^T\mathbf{g}\mathbf{u}}\left[\mathbf{f}\,\mathbf{u} - F(\mathbf{u})\,\mathbf{g}\,\mathbf{u}\right] \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Hier handelt es sich um ein *Eigenwertproblem.* Nach den Regeln der linearen Algebra besitzt das Gleichungssystem nichttriviale Lösungen wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\det(\mathbf{f} - \kappa\mathbf{g}) = \begin{vmatrix} f_{11} - \kappa g_{11} & f_{12} - \kappa g_{12} \\ f_{12} - \kappa g_{12} & f_{22} - \kappa g_{22} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Die beiden Eigenwerte $\kappa_n = F(\mathbf{u}^{(n)})$, $n = 1, 2$ ergeben sich als Lösung der "charakteristischen Gleichung"

$$(f_{11} - \kappa g_{11})(f_{22} - \kappa g_{22}) - (f_{12} - \kappa g_{12})^2 = 0$$

oder

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\kappa^2 - (f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12})\kappa + f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0\,.$$

Anmerkung: Wie gewohnt bei solchen Eigenwertproblemen sind die beiden Eigenvektoren $\mathbf{u}^{(n)}$ orthogonal (im Sinn der Metrik g_{ij}), also $g_{ij}u^{(1)i}u^{(2)j} = 0$, vorausgesetzt dass sich die Eigenwerte unterscheiden, $\kappa_1 \neq \kappa_2$. Beweis durch Projektion und Subtraktion der Eigenwertgleichungen.

Die elementare Lösung der quadratischen Gleichung führt auf folgende Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,2} &= \frac{1}{2}\frac{f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\right)^2 - 4\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\Big(f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12} \\
&\qquad \pm\sqrt{(f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}\Big)
\end{aligned}$$

Nun kommt der zentrale Begriff. Man definiert die *Gaußsche Krümmung* als Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien

K unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems u_1, u_2 ist, also ein Skalar ist. Oder doch: es gibt eine maximale und minimale Krümmung entlang zweier spez. Tangenten.

$$\boxed{K = \kappa_1 \kappa_2}$$

Ein alternatives (aber hier weniger wichtiges) Maß ist die *mittlere Kümmung* $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.

Für die Gaußsche Krümmung ergibt sich durch Ausmultiplikation

$$K = \frac{1}{4}\frac{(f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12})^2 - (f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12})^2 + 4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2}$$

also

$$\boxed{K = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}$$

Gauss'sche Krümmung

Die entsprechende Formel für die mittlere Krümmung lautet

$$H = \frac{f_{11}g_{22} + f_{22}g_{11} - 2f_{12}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} .$$

← bis hier →

1.3 Zusammenhang mit dem Riemannschen Krümmungstensor

Quelle ??

In der ART-Vorlesung wird der Begriff der Krümmung auf völlig anderem Weg eingeführt. Ausgangspunkt ist die Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung von Vektoren, die in gekrümmten Räumen auftritt und auf den Riemannschen Krümmungstensor führt. Mit einigem Rechenaufwand lässt sich aber der Zusammenhang zwischen beiden Krümmungsmaßen herstellen.

1. Schritt
Zerlegung des Vektors $\partial_i \partial_j \vec{r}$ in der Basis des Dreibeins $\{\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}, \vec{N}\}$

Wir machen für die Zerlegung den allgemeinen Ansatz

$$\partial_i \partial_j \vec{r} = c_{ij}^1 \partial_1 \vec{r} + c_{ij}^2 \partial_2 \vec{r} + c_{ij}^3 \vec{N} = c_{ij}^n \partial_n \vec{r} + c_{ij}^3 \vec{N} .$$

Projektion auf $\vec{N}$: $\quad \vec{N} \cdot \partial_i \partial_j \vec{r} = f_{ij} = c_{ij}^3 \quad$ (vgl. 2. Fundamentalform)
Projektion auf $\partial_k \vec{r}$: $\quad \boxed{\partial_k \vec{r} \cdot \partial_i \partial_j \vec{r} = c_{ij}^n \partial_k \vec{r} \cdot \partial_n \vec{r} = g_{kn}\, c_{ij}^n}$. Das Produkt $\partial_k \vec{r} \cdot \partial_i \partial_j \vec{r}$ lässt sich durch eine Kombination von Ableitungen der Metrik ausdrücken. Dazu betrachten wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{jk} = \partial_i(\partial_j \vec{r} \cdot \partial_k \vec{r}) &= \partial_i \partial_j \vec{r} \cdot \partial_k \vec{r} + \partial_j \vec{r} \cdot \partial_i \partial_k \vec{r} && (a)\\
\partial_j g_{ik} = \partial_j(\partial_i \vec{r} \cdot \partial_k \vec{r}) &= \partial_j \partial_i \vec{r} \cdot \partial_k \vec{r} + \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \partial_k \vec{r} && (b)\\
\partial_k g_{ij} = \partial_k(\partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}) &= \partial_k \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r} + \partial_i \vec{r} \cdot \partial_k \partial_j \vec{r} && (c)
\end{aligned}$$

Bildet man die Kombination $(a)+(b)-(c)$ so heben sich auf der rechten Seite vier der sechs Terme weg, die beiden verbliebenen sind identisch (wir setzen in allen Rechnungen die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen voraus) mit dem Resulat

$$\partial_k \vec{r} \cdot \partial_i \partial_j \vec{r} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = \Gamma_{ijk} .$$

Es handelt sich hier um das *Christoffel-Symbol erster Art.*
Schließlich lässt sich die Gleichung $g_{kn} c_{ij}^n = \Gamma_{ijk}$ nach dem Entwicklungskoeffizienten auflösen

„unser" Christoffel-Symbol

indem man mit dem "inversen" metrischen Tensor multipliziert und ausnutzt $g^{lk}g_{kn} = \delta^l_n$ (Kronecker-Delta): $g^{lk}g_{kn}c^n_{ij} = g^{lk}\Gamma_{ijk}$. Die rechte Seite definiert das *Christoffel-Symbol zweiter Art* Γ^l_{ij}, mit dem Resultat $\boxed{c^l_{ij} = \Gamma^l_{ij}}$.
Somit ergibt sich schließlich die "Gaußsche Gleichung"

$$\boxed{\partial_i\partial_j\vec{r} = \Gamma^l_{ij}\partial_l\vec{r} + f_{ij}\vec{N}\ .}$$

2. Schritt
Gleichsetzen der dritten Ableitungen $\partial_k\partial_i\partial_j\vec{r} = \partial_j\partial_i\partial_k\vec{r}$

Differentiation des Resultats aus Schritt 1 liefert

$$\partial_k\left(\Gamma^s_{ij}\partial_s\vec{r} + f_{ij}\vec{N}\right) = \partial_j\left(\Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r} + f_{ik}\vec{N}\right)$$

Ausdifferenzieren nach der Produktregel führt auf

$$\partial_k\Gamma^s_{ij}\partial_s\vec{r} + \Gamma^s_{ij}\partial_k\partial_s\vec{r} + \partial_k f_{ij}\vec{N} + f_{ij}\partial_k\vec{N} = \partial_j\Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r} + \Gamma^s_{ik}\partial_j\partial_s\vec{r} + \partial_j f_{ik}\vec{N} + f_{ik}\partial_j\vec{N}\ .$$

Projektion auf den Tangentenvektor $\partial_l\vec{r}$ liefert

$$\begin{aligned} & \partial_k\Gamma^s_{ij}g_{ls} + \Gamma^s_{ij}\partial_l\vec{r}\cdot\partial_k\partial_s\vec{r} + \partial_k f_{ij}\partial_l\vec{r}\cdot\vec{N} + f_{ij}\partial_l\vec{r}\cdot\partial_k\vec{N} \\ = \quad & \partial_j\Gamma^s_{ik}g_{ls} + \Gamma^s_{ik}\partial_l\vec{r}\cdot\partial_j\partial_s\vec{r} + \partial_j f_{ik}\partial_l\vec{r}\cdot\vec{N} + f_{ik}\partial_l\vec{r}\cdot\partial_j\vec{N}\ . \end{aligned}$$

In den zweiten Termen links und rechts ist ein zweites Christoffelsymbol (erster Art) erkennbar, während die dritten Terme wegen der Orthogonalität von Flächennormale und Tangentenvektor verschwinden. Damit folgt

$$\partial_k\Gamma^s_{ij}g_{ls} + \Gamma^s_{ij}\Gamma_{skl} + f_{ij}\partial_l\vec{r}\cdot\partial_k\vec{N} = \partial_j\Gamma^s_{ik}g_{ls} + \Gamma^s_{ik}\Gamma_{sjl} + f_{ik}\partial_l\vec{r}\cdot\partial_j\vec{N}\ .$$

Benutzt man noch den Ausdruck für das Skalarprodukt $\partial_l\vec{r}\cdot\partial_k\vec{N} = -f_{kl}$ dann findet man

$$\underbrace{f_{ik}f_{jl} - f_{ij}f_{kl}}_{= R_{lijk}} = g_{ls}\left(\partial_j\Gamma^s_{ik} - \partial_k\Gamma^s_{ij}\right) + \Gamma^s_{ik}\Gamma_{sjl} - \Gamma^s_{ij}\Gamma_{skl}\ .$$

$$R^\alpha_{\ \mu\beta\gamma} = \Big(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma\mu}$$

$$R_{\kappa\mu\beta\gamma} = g_{\kappa\alpha}R^\alpha_{\ \mu\beta\gamma}$$

3. Schritt
Vergleich mit dem Riemann-Tensor

Dieser Ausdruck unterscheidet sich noch leicht von der Standard-Form des Riemannschen Krümmungstensors durch den Faktor g_{sl}. Um diesen Faktor zu eliminieren ziehen wir ihn unter die Ableitung:

$$\begin{aligned} f_{ik}f_{jl} - f_{ij}f_{kl} &= \partial_j(g_{ls}\Gamma^s_{ik}) - \partial_k(g_{ls}\Gamma^s_{ij}) + \Gamma^s_{ik}\Gamma_{sjl} - \Gamma^s_{ij}\Gamma_{skl} - (\partial_j g_{ls})\Gamma^s_{ik} + (\partial_k g_{ls})\Gamma^s_{ij} \\ &= \partial_j\Gamma_{ikl} - \partial_k\Gamma_{ijl} + \Gamma^s_{ik}\left(\Gamma_{sjl} - \partial_j g_{sl}\right) - \Gamma^s_{ij}\left(\Gamma_{skl} - \partial_k g_{sl}\right)\ . \end{aligned}$$

Die beiden letzten Terme lassen sich auf folgende Weise umformen:

$$\Gamma_{sjl} - \partial_j g_{sl} = \frac{1}{2}(\partial_s g_{jl} + \partial_j g_{sl} - \partial_l g_{sj}) - \partial_j g_{sl}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_s g_{jl} - \partial_j g_{sl} - \partial_l g_{sj})$$
$$= -\frac{1}{2}(\partial_j g_{sl} + \partial_l g_{sj} - \partial_j g_{sl}) = -\Gamma_{jls}$$

und analog $\Gamma_{skl} - \partial_k g_{sl} = -\Gamma_{kls}$. Damit ergibt sich schließlich die Standardform des Riemann-Tensors

$$f_{ik}f_{jl} - f_{ij}f_{kl} = \partial_j\Gamma_{ikl} - \partial_k\Gamma_{ijl} + \Gamma^s_{ij}\Gamma_{kls} - \Gamma^s_{ik}\Gamma_{jls} = R_{lijk}\,.$$ (− R_{eijk} bei uns)

Benötigt wird folgende Kombination: $f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = R_{2121} = -R_{1221} = R_{1212}$ wobei wir noch die Reihenfolge der Indizes unter Ausnutzung der Antisymmetrieeigenschaften des Tensors unsortiert haben.

Krümmungsskalar ✓

Auf wen geht diese Ableitung zurück? Auf Riemann

Damit lässt sich die Gaußsche Krümmung durch den Riemannschen Tensor ausdrücken:

$$R = 2\left(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2\right)R_{1212} = 2\,\frac{1}{g^2}\,g \cdot R_{1212} = \frac{2}{g}R_{1212}$$

$$\boxed{K = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g}}$$

sehr schön

mit der Determinante des metrischen Tensors im Nenner $g = \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Man beachte, dass der Riemann-Tensor in zwei Dimensionen nur diese eine nichtverschwindende Komponente besitzt.

Faktor 2 ~~aus~~ (−) Zeichen ⇒ historische Unterschied

1.4 Diskussion

intrinsisch heisst hier ohne explizite Einbettung in höhere Dimension, vgl. anschliessende Diskussion

Das Resultat für K geht auf C.F. Gauß zurück und hängt mit dessen "*Theorema egregium*" zusammen (1827). Besonders bedeutsam und erstaunlich ist die Feststellung, dass die Gaußsche Krümmung *eine intrinsische Eigenschaft der Fläche* ist, im Gegensatz zu den anderen hier diskutierten Krümmungsmaßen (κ_1, κ_2, H). Zur Bestimmung der Gaußschen Krümmung ist also keine Einbettung in einen höherdimensionalen (hier dreidimensionalen) Raum erforderlich. Das geht daraus hervor, dass der Riemann-Tensor nur vom metrischen Tensor und dessen Ableitungen abhängt, der die Längen und Winkel auf der Fläche misst. Eine intelligente "zweidimensionale Ameise" kann durch geometrische Messungen feststellen, wenn sie auf einer Kugel lebt ($K \neq 0$), aber nicht, wenn es sich um einen Zylinder handelt ($K = 0$). Analog ist es auch in der ART bzgl. Kosmologie nicht nötig, die Existenz eines höherdimensionalen Raums anzunehmen, in den die vierdimensionale "gekrümmte Raumzeit" eingebettet ist.

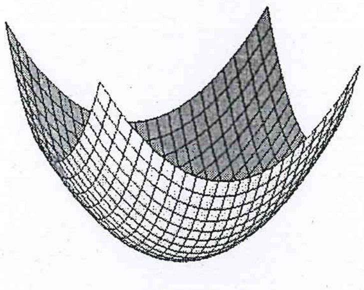
Eine Konsequenz von praktischer Bedeutung besagt, dass es nicht möglich ist, ein verzerrungsfreie Landkarte der Erdoberfläche herzustellen, denn die Kugeloberfläche besitzt nichtverschwindende intrinsische Krümmung – im Gegensatz zur Papieroberfläche. Andererseits ist ein ein Papierblatt (anders als ein Gummituch) im Gaußschen Sinne immer flach, auch wenn man es zusammenknüllt (solange keine unstetigen Knickstellen entstehen).

Für jeden Punkt P auf einer Fläche S sind drei Fälle möglich:

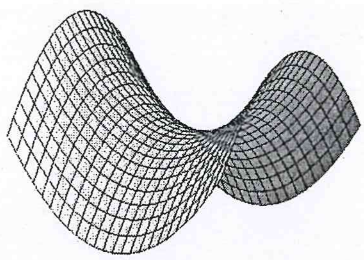
$K > 0$: *Elliptischer Punkt*
Die beiden Hauptkrümmungsvektoren zeigen in die gleiche Richtung, relativ zur Fläche. Die Fläche läßt sich (lokal!) durch ein Ellipsoid approximieren.

$K < 0$: *Hyperbolischer Punkt*
Die beiden Hauptkrümmungsvektoren besitzen entgegengesetzte Orientierung. Die Fläche hat lokal die Gestalt eines Hyperboloids (Sattelfläche), d.h. sie ist in einer Richtung konvex und in einer anderen Richtung konkav.

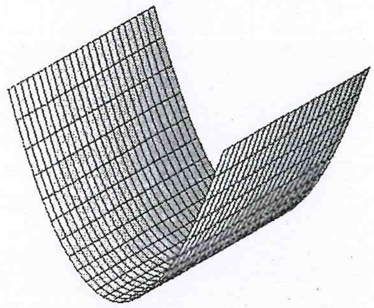
$K = 0$: *Parabolischer Punkt*
In (mindestens) einer Hauptkrümmungsrichtung verschwindet der Wert der Krümmung. Beispiel hierfür ist die Zylinderoberfläche, deren Gaußsche Krümmung verschwindet. Die "Isometrie" des Zylinders zur flachen Ebene ist daran erkennbar, dass sich der Zylinder verzerrungsfrei auf die Ebene abbilden (abrollen) lässt.



$K > 0$

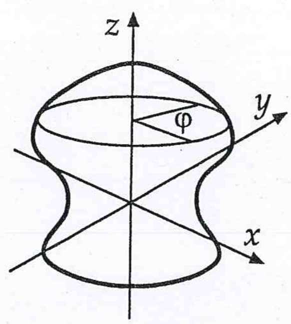


$K < 0$



$K = 0$

1.5 Spezialfall: Die Krümmung von Rotationsflächen



Liegen spezielle Symmetrien vor, dann lässt sich die Berechnung der Krümmung noch vereinfachen. Im Fall von Rotationsflächen (Zylindersymmetrie um die z-Achse) empfiehlt sich Benutzung von Polarkoordinaten in der $x-y$-Ebene, d.h. wir verwenden zur Parametrisierung der Fläche als zweite Koordinate den Azimutalwinkel $x^2 = \varphi$ und setzen an

$$\vec{r} = (f(x^1)\cos\varphi,\ f(x^1)\sin\varphi,\ g(x^1))$$

mit zwei frei wählbaren Funktionen $f(x^1)$ und $g(x^1)$. Damit ergibt sich

$$\partial_1\vec{r} = (f'\cos\varphi,\ f'\sin\varphi,\ g') \quad , \quad \partial_2\vec{r} = (-f\sin\varphi,\ f\cos\varphi,\ 0)$$

$$\vec{N} = \frac{\partial_1\vec{r}\times\partial_2\vec{r}}{|\partial_1\vec{r}\times\partial_2\vec{r}|} = \left(\frac{-g'\cos\varphi}{\sqrt{f'^2+g'^2}},\ \frac{-g'\sin\varphi}{\sqrt{f'^2+g'^2}},\ \frac{ff'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}\right)$$

$$g_{11} = \partial_1\vec{r}\cdot\partial_1\vec{r} = f'^2+g'^2 \quad , \quad g_{22} = f^2 \quad , \quad g_{12} = 0$$

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_1\vec{r} &= (f''\cos\varphi,\ f''\sin\varphi,\ g'') \\
\partial_2\partial_2\vec{r} &= (-f\cos\varphi,\ -f\sin\varphi,\ 0) \\
\partial_1\partial_2\vec{r} &= (-f'\sin\varphi,\ f'\cos\varphi,\ 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \vec{N}\cdot\partial_1\partial_1\vec{r} = \frac{-f''g'+f'g''}{\sqrt{f'^2+g'^2}} \\
f_{22} &= \vec{N}\cdot\partial_2\partial_2\vec{r} = \frac{fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}} \\
f_{12} &= \vec{N}\cdot\partial_1\partial_2\vec{r} = 0
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Gaußsche Krümmung $$\boxed{K = \frac{g'}{f} \frac{f'g'' - f''g'}{(f'^2 + g'^2)^2}}$$

Benutzt man Zylinderkoordinaten, wählt also als ersten Kurvenparameter die z-Koordinate, $x^1 = z$, und setzt $g(x^1) = z$, dann reduziert sich der Ausdruck noch weiter:

$$\boxed{K = -\frac{f''}{f(1 + f'^2)^2}}$$