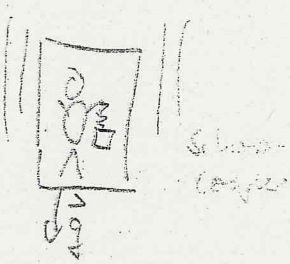
Bewegung im Gravitationsfeld

Das Äquivalenzprinzip (oder auch das Axiom der Ununterscheidbarkeit zwischen Gravitation und Trägheit)

Das Prinzip der Äquivalenz zwischen Schwerkraft und Trägheit beruht auf der von Galilei, Eötvös und Dicke experimentell bewiesenen Gleichheit von schwerer und träger Masse, $m_s = m_t$. Einstein macht das Äquivalenzprinzip zur Grundlage seiner Allgemeinen Relativitätstheorie, indem er realisierte, daß es ein Prinzip abliefert, die Wirkung der Gravitation auf ein beliebiges physikalisches System zu bestimmen. Wir machen uns zunächst die Bedeutung des Äquivalenzprinzips am Einsteinschen Fahrstuhl-Gedankenexperiment klar. Dazu nehmen wir an, ein Experimentator befinde sich in einem abgeschlossenen Raum (dem „Fahrstuhl") der in einem (quasi) homogenen Gravitationsfeld frei fällt. Da das Schwerefeld auf alle Körper innerhalb des Fahrstuhls, auch auf den Experimentator, dieselbe Beschleunigung $\vec{g}$ ausübt wie auf den Fahrstuhl selbst, merkt der Experimentator nichts von der Anwesenheit des Gravitationsfeldes (Schwerelosigkeit, befindet sich in seinem lokalen Inertialsystem). Dies können wir leicht beweisen für ein System von im Fahrstuhl befindlichen Körpern, die untereinander über z.B. Zwei-Körper-Kräfte $\vec{F}(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ wechselwirken.

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = m_i \vec{g} + \sum_{k \neq i} \vec{F}_i(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$



Koordinatentransformation $\vec{r}\,' = \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2$ (mitbewegtes Bezugssystem – i.e. Fahrstuhl)

$$\Rightarrow \; m_i \frac{d^2 \vec{r}_i\,'}{dt^2} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_i(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$

– i.e. kein (lokaler) Einfluß des Schwerefeldes !!!

Der Unterschied in der Betrachtungsweise des mitfallenden und eines ruhenden Beobachters besteht nun einzig darin, daß der ruhende Beobachter sehr wohl den Einfluß des Schwerefeldes bemerkt und der fallende aber nicht. Das Äquivalenzprinzip besagt, daß dies für alle physikalischen Systeme zutrifft, d.h. daß wir sie nicht ebenso in jedes Bezugsystem gleichungen sich umschreiben lassen.

Aber: In der Regel ist das Gravitationsfeld nicht überall quasi homogen und konstant (oder zeitunabhängig). $\vec{g} \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}, t)$

Siehe Erde im Umlauf um Sonne, Erde ist im freien Fall, aber an den Äquator resultieren kleine Differenzen $g(d_{Sonne} \pm r_E) - g(d_{Sonne})$, die für die wohlmöglichen Gezeitenkräfte verantwortlich sind.

(Dieses würde ein genügend großer Experimentator $r_{exp} \sim r_E$ ebenfalls im Fahrstuhl bemerken.) $\Rightarrow$ $\Delta t_{Fahrstuhl} \ll \Delta t_{\vec{g}\ \text{ändert sich}}$, dann $\vec{g}$ quasi-homogen

Weinberg zitiert dies usw.

$\Rightarrow$ **(starkes) Äquivalenzprinzip:**

An jedem Raum-Zeit-Punkt in einem beliebigen Gravitationsfeld ist es möglich, ein "lokales Inertialsystem" einzuführen, in dem alle physikalischen Gesetze für eine genügend kleine Umgebung dieses Punktes dieselbe Form haben wie in Abwesenheit eines Schwerefeldes.

Anmerkung: Das Verhalten in anderen Systemen (Koordinatentrafos) folgt daraus als Kovarianzpostulat der Gleichungen als Tensor-Gleichungen.

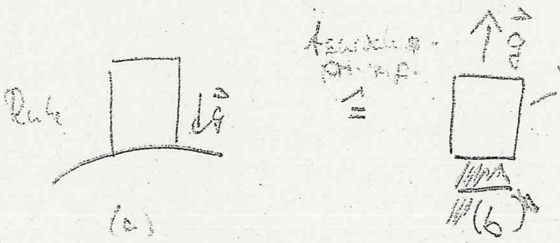
- **Zu $m_s = m_t$:** Hier sollte eigentlich auch die relativistische Energie stehen, also so was wie $\boxed{\frac{\text{Ges. Energie (als Masse)}}{c^2}}$

$$m = m_0 / (1-\beta^2)^{1/2}, \quad \text{e.m.-Energie, SWW-Energie}$$

^{56}Fe: Summe der kin. Energie der Elektronen $\approx$ 50 keV / Gesamtmasse $\approx$ 50 GeV $\approx \underbrace{10^{-6}}$

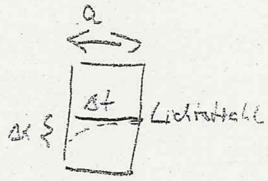
[illegible]

Ablenkung von Lichtstrahlen im Gravitationsfeld — weiteres Gedankenexperiment von Einstein.



wird nach oben beschleunigt (Raketentriebwerk)

(b)



$\Delta t = \frac{a}{c}$

$\Delta x_{\text{Fahrstuhl}} = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$ im ruhenden (außerhalb) befindlichen Inertialsystem, wo die Lichtstrahlen sich auf geraden Trajektorien bewegen sollen

$\Rightarrow \Delta x_{\text{im Fahrstuhl}} = -\frac{ga^2}{2c^2}$ nach unten abgelenkt,

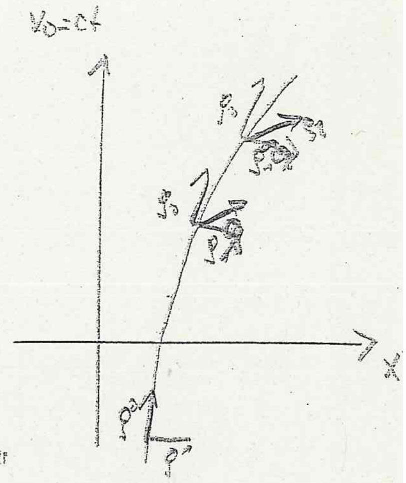
der Lichtstrahl erscheint also für den Beobachter im Fahrstuhl um $|\Delta x|$ nach unten von einer geraden Bahn abgelenkt.

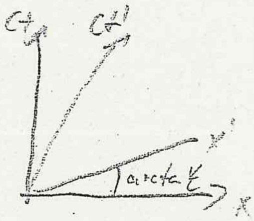
(a) Aufgrund des Äquivalenzprinzips können wir daraus schließen, daß der Lichtstrahl im Gravitationsfeld ebenfalls um $\Delta x = -\frac{ga^2}{2c^2}$ nach unten abgelenkt wird. (Die Ablenkung des Lichtes an der Sonne wurde 1916 von Eddington verifiziert!)

Wir erhalten damit das Resultat, daß die Gravitation auch auf Teilchen der Ruhemasse 0, wie das Licht wirkt.

Der freie Fall

- erste richtige Anwendung des Äquivalenzprinzips
- Nach dem Äquivalenzprinzip können wir dann in der unmittelbaren Umgebung eines jeden Punktes des Raumes ein mitfallendes Koordinatensystem ($\vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{g}(\vec{r},t)\,t^2$) einführen, in dem die physikalischen Vorgänge so ablaufen, als sei überhaupt kein Gravitationsfeld vorhanden.





Mit zunehmender Geschwindigkeit wird dieses Koordinatensystem immer mehr vom ursprünglichen abweichen, wobei eine Lorentztransformation einer Drehung der Achse (siehe Figur) entspricht. (Eine Lorentztrafo ist meines Erachtens aber nicht relevant, da dabei nur von einem Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem übergeht. Das Teilchen würde dann nur etwas verschoben)

Die Bewegung für unser frei fallendes (massives) Teilchen ist also nach dem Äquivalenzprinzip identisch mit der Bewegung eines freien Teilchens in der (speziellen) Relativitätstheorie — wohlgemerkt, in diesem Koordinatensystem $\xi^\alpha = (\xi^0, \vec{\xi})$ $\quad (x^\alpha = (x^0, \vec{x}) \to \xi^\alpha)$

Es ist

$$c^2 d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\vec{\xi})^2$$

, da lokal Minkowski-Raum und deshalb in kleiner Umgebung gültig

und die Bewegungsgleichung lautet dann einfach (für hinreichend kleines Zeitintervall $\Delta\xi^0$)

$$\ddot{\xi}^\alpha = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 ,$$

d.h. das Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\xi}^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \text{const}$.

Wir können nun diese Bewegungsgleichung auf irgend ein anderes Koordinaten-(Bezugs-)System x^μ, z.B. das ursprüngliche, im Gravitationsfeld ruhende Bezugssystem, (zurück-) transformieren, wenn wir den Zusammenhang zwischen den Koordinaten x^μ und ξ^α kennen.

$$0 = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\sum_\mu \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \sum_\mu \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \sum_{\mu,\nu}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\cdot\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\overset{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}{\hat{=}} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\ddot{x}^\mu + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$$

Multiplizieren mit $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ (dem "Inversen") liefert unter $\left(\sum_\alpha\right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu$

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \,,$$ — Bewegung in einem beliebigen Koordinatensystem.

wobei

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$ (symm. in unteren Indizes)

die affine Übertragung (oder auch später Christoffel-Symbol) bezeichnet.
Zur Charakterisierung des Koordinatensystems ist es zweckmäßig, auch die Eigenzeit τ durch die x^μ auszudrücken

$$c^2 d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\vec{\xi})^2 \hat{=} \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad \text{mit} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_3 \end{pmatrix}$$ - Minkowski-Metrik

$$\rightarrow \quad = \eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} dx^\mu \frac{d\xi^\beta}{dx^\nu} dx^\nu = \underbrace{\left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \frac{d\xi^\beta}{dx^\nu} \eta_{\alpha\beta}\right)}_{\hat{=}\, g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu \equiv \underline{g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}$$

Hierbei wird $g_{\mu\nu}$ als metrischer Tensor bezeichnet.
Dies stellt die Verallgemeinerung der bereits besprochenen metrischen Form zur Definition eines Abstandes auf krümmlinigen Flächen dar:

$$\overset{\text{euklidisch}}{ds^2 = dx_1^2 + \ldots dx_n^2} \longrightarrow \overset{\text{pseudoeuklidisch}}{c^2 d\tau^2 = ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}.$$ (Ereignis, Weltpunkt)

Der Abstand ist also nun als Eigenzeitabstand zweier infinitesimaler benachbarter Raum-Zeit-Punkte zu verstehen!

Das frei mitfallende Koordinatensystem ξ^α ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihm lokal (im unmittelbaren Umgebung des sich bewegenden Teilchens) keine Gravitationskräfte sind. In einem anderen Koordinatensystem machen sie sich aber (zum Teil) in der Form der $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ bemerkbar.
Anmerkung: Man sieht wieder die Identifikation von Gravitationskräften mit Schein-Kräften.

Die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ enthalten also auch Scheinkräfte, ebenso wie die (ungeschickte) Wahl des Koordinaten...

Überlegen wir uns, wie sich die Bewegung des freien Falles im Schwerefeld beschreiben läßt: Dazu müssen wir im Prinzip erst (die allerdings noch unbekannte) Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten bewerkstelligen. Diese seien die x^μ.

Nehmen wir an, daß (ursprüngliches) Gravitationsfeld sei schwach (noch nicht spezifiziert). Auch seien die Teilchen-Geschwindigkeitskomponenten klein gegen c, dann ist die Eigenzeit $d\tau$ in etwa auch die Systemzeit dt (bis auf $O(\frac{v}{c})$).

$$d\tau \approx dt$$

$$|\dot{x}^i| \equiv \left|\frac{dx^i}{d\tau}\right| \approx \left|\frac{dx^i}{dt}\right| \ll c = \frac{dx^0}{dt} \approx \frac{dx^0}{d\tau} = \dot{x}^0 \quad - \text{nichtrel. Grenzfall}$$

Für die räumlichen Komponenten gilt dann näherungsweise (unter der Annahme, alle Γ seien etwa gleich groß).

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00}\, c^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \text{Newton} \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g} \mathrel{\hat{=}} \frac{\vec{F}_{\text{Grav}}}{m}$$

$\Rightarrow$ $-\Gamma^i_{00}\, c^2$ entspricht der i-ten Komponente der im Bezugssystem gemessenen Schwerebeschleunigung.

Zusammenhang: Affine Übertragung und Metrik ... und Gravitation

Um die physikalische Bedeutung der Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ zu erkennen, müssen wir den Zusammenhang zwischen den $g_{\mu\nu}$ und den affinen Übertragungen $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ herleiten. Eine solche Verbindung muß bestehen, da beide Größen mit den partiellen Ableitungen der lokalen Koordinaten ξ^{σ} nach den Koordinaten x^{μ} verknüpft.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Rightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \qquad (1)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \delta_{\sigma\alpha} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \qquad (2)$$

Die 2-ten Ableitungen $\frac{\partial^2 \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$ lassen sich eliminieren

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \eta_{\alpha\beta} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu} \qquad (3)$$

Dies ist ein erster Teilschritt.

Umbenennen der Indizes liefert

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} \qquad (3')$$

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu} \qquad (3'')$$

Beachte $\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}$

$$\Rightarrow (3) + (3') - (3''): \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 2 \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu}$$

Bezeichne $g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu}$ $\left(= \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\sigma}}\right)$, d.h. $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_{\mu\nu}$ die inverse Matrix zu $g_{\mu\nu}$, so wird schließlich

als kombinierte Ableitungen des $g_{\mu\nu}$ ← Christoffel-Symbol (zweiter Art)

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right] \equiv \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$$

das uns schon bekannte Resultat

Kehren wir nun wieder zur schwachen nicht-relativistischen Betrachtung zurück:

$-\Gamma^i_{00}\, c^2$ war ein Maß für die tatsächlich erwartete Schwerebeschleunigung, insbesondere im ursprünglichen, d.h. festen Bezugssystem.

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\alpha}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right] \approx -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} g^{ki}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k},$$

wobei wir Terme proportional $\frac{1}{c}$ systematisch weggelassen haben (z.B. stationäre Metrik)

Wenn die Bewegung im freien Fall langsam und die Schwerebeschleunigung gering ist, differieren die mitfallenden Koordinaten und die stationären Koordinaten x^μ nur wenig, oder besser,

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_{\alpha\mu} + \epsilon^\alpha_\mu \text{ mit } |\epsilon^\alpha_\mu| \ll 1 \text{ und const}$$

Unsere Metrik sollte ja nahezu fast "Lorentzform" sein, kleine Änderungen dann also Gravitationseffekte ✓

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha\mu} + \epsilon^\alpha_\mu\right)\left(\delta_{\beta\nu} + \epsilon^\beta_\nu\right) \hat{=} \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \text{ mit } |h_{\mu\nu}| \ll 1.$$

$$g^{\mu\nu} = \underbrace{\eta^{\mu\nu}}_{=\eta_{\mu\nu}} + O(h)$$

$$\Rightarrow \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\eta_{ki}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &\approx -\frac{1}{2} g^{\alpha 0}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right] \\ &\approx -\frac{1}{2} g^{00}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\right] \approx -\frac{1}{2} g^{00}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\right] \approx 0 \quad \text{stationär} \\ \Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} &\approx 0 \Rightarrow x^0 \approx c\tau \hat{=} ct \Rightarrow \tau \approx t\end{aligned}}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \approx -\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad \text{bzw} \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \approx -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla} h_{00} \overset{\text{Newton-Fall}}{\equiv} -\nabla\phi$$

$$\Rightarrow h_{00}(\vec{r}) = g_{00}(\vec{r}) - 1 \approx +\frac{2\phi(\vec{r})}{c^2} \hat{=} -\frac{2G}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}, \quad \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{i2}} = 4\pi G\cdot\rho$$

In der Metrik steckt also das Gravitationspotential (in der groben, gemachten Näherung)

Alles weitere wäre an dieser Stelle spekulativ. Ziel ist es eine konsistente Theorie aufzustellen, die eine Bestimmung der Metrik aus der Massen (Energie) im Raum erlaubt.

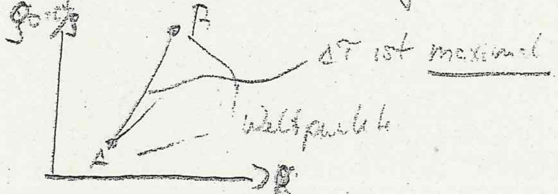
Check: Ist h_{00} klein?

$$h_{00}(R_E) \approx -\frac{2GM_E}{c^2 R_E} = -1.4\cdot 10^{-9} \ll 1 \quad ✓$$

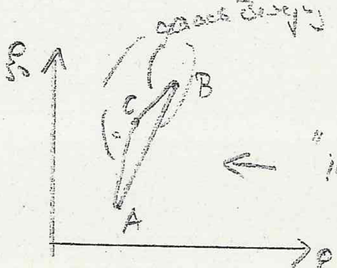
$$v_\infty = \sqrt{2\phi(R_E)} = 11.2\,\frac{km}{s} \ll c \quad ✓$$

Geodätische Linien

- Zusammenhang zwischen den affinen Verbindungen $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ und der Metrik $g_{\mu\nu}$ hergestellt
- Im spez. lokalen (pseudo-)euklidischen Inertialsystem bewegen sich Teilchen in der hinreichend lokalen Umgebung frei einer Geraden, i.e. "Geodäte", sozusagen die "kürzeste" Verbindung zweier Punkte. Dies gilt <u>auch</u> im 4-dimensionalen Raum, wo der "Abstand" dem Eigenzeitabstand entspricht, allerdings ist hier die Eigenzeitdifferenz maximal.



<u>kurze Überlegung zum Beweis</u>
der Maximalität



$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $u^\mu u_\mu = 1$

← "infinitesimale Betrachtung"

$$\Rightarrow \quad u^\mu_{AC}\,\Delta\tau_{AC} + u^\mu_{CB}\,\Delta\tau_{CB} = u^\mu_{AB}\,\Delta\tau_{AB} \qquad \Big|\cdot\big[(\;)_\mu = (\;)_\mu\big]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\tau_{AC}^2 + \Delta\tau_{CB}^2 + 2\,u^\mu_{AC}\,u_{\mu,CB}\,\Delta\tau_{AC}\,\Delta\tau_{CB} = \Delta\tau_{AB}^2$$

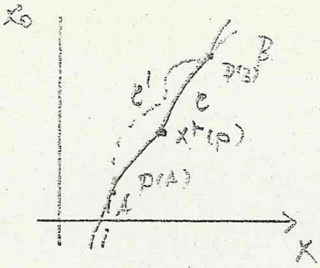
Z.z.: $u^\mu_{AC}\,u_{\mu CB} \geq 1$, denn dann ist $\Delta\tau_{AB}^2 \geq \Delta\tau_{AC}^2 + \Delta\tau_{CB}^2 + 2\,\Delta\tau_{AC}\Delta\tau_{CB} = (\Delta\tau_{AC} + \Delta\tau_{CB})^2$

$\Leftrightarrow \Delta\tau_{AB} \geq (\Delta\tau_{AC} + \Delta\tau_{CB})$ (was wir zeigen wollten)

$$u^\mu_{AC} = \gamma_1\left(1, \frac{\vec{v}_1}{c}\right), \quad u_{\mu CB} = \gamma_2\left(1, -\frac{\vec{v}_2}{c}\right)$$

$$u^\mu_{AC}\,u_{\mu CB} = \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{c^2}\right) \geq \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) \overset{?}{\geq} 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2 \geq \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) \Leftrightarrow \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} - 2\frac{v_1 v_2}{c^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}(v_1 - v_2)^2 \geq 0 \quad \text{q.e.d.}$$



Wir parametrisieren die Kurve zwischen A und B mit Hilfe eines Parameters p : $x^\mu(p)$

Die (Eigenzeit-) Länge ergibt sich dann entlang $\mathcal{C}$ zu:

$$\tau_{AB} = \int_{p_A}^{p_B} dp \, \frac{d\tau}{dp} = \int_{p_A}^{p_B} dp \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>Extremalitätsbedingung</u>: Bei kleinen Variationen $x^\mu(p) \to x'^\mu(p)$, $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ soll τ_{AB} extremal (am "größten") sein, i.e. $\delta\tau_{AB} \overset{!}{=} 0$; $\delta x^\mu(p_A) \overset{!}{=} \delta x^\mu(p_B) = 0$

$$0 = \delta\tau_{AB} = \tau_{AB}(\mathcal{C}') - \tau_{AB}(\mathcal{C})$$

$$= \int_{p_A}^{p_B} dp \left\{ \left[g_{\mu\nu}(x^\alpha + \delta x^\alpha) \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{dp} \frac{d(x^\nu + \delta x^\nu)}{dp} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Taylor-Entwicklung

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

$$\simeq \int_{p_A}^{p_B} dp \; \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{\left(g_{\mu\nu}(x^\alpha(p)) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{\frac{1}{2}}}}_{= \frac{d\tau}{dp}} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + 2 g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{d(\delta x^\mu)}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}$$

$\swarrow$ die Eigenzeit der zu maximierenden Kurve, die dann als Parameter aller Trajektorien dienen darf.

$$= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \underbrace{g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}_{g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\alpha)}{d\tau}} \right\}$$

$$g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\alpha)}{d\tau} \xrightarrow{\text{part. Int.}} -\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \delta x^\alpha$$

part. Integration

$$= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \, \delta x^\alpha \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu \right\} \qquad \forall \, \delta x_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \underbrace{\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}_{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0 \qquad \Big| \cdot g^{\lambda\alpha} \swarrow \text{der inversen}$$

$$g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = \ddot{x}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \equiv - \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}}_{\equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu}} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für <u>Bestimmung</u> der (Raum-Zeit) <u>Geodäten</u>.

Dies ist aber auch genau die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes, d.h. die Teilchen bewegen sich so, als ob würden sie geometrisch auf der längsten Pfad in der Raum-Zeit sich bewegen, wobei die Länge durch die bezüglichen Eigenzeit gemessen wird

<u>Aufgabe</u> Zeigen Sie, daß die geodätischen Linien Großkreise auf einer Kugel sind.

$$ds^2 = R^2(\underset{\uparrow \atop u_1}{d\vartheta^2} + \sin^2\vartheta\, \underset{\uparrow \atop u_2}{d\varphi^2}), \quad g_{11} = R^2,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = R^2\sin^2\vartheta$$

$$g^{11} = \frac{1}{R^2},\ g^{12} = g^{21} = 0,\ g^{22} = \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}$$

Die affinen Übertragungen lauten:

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} = 0$$

$$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 22} \right\} = 0$$

$$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \underline{\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \cot\vartheta}$$

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \underline{-\sin\vartheta\cos\vartheta}$$

$\Rightarrow$ $i=1,\ u_1 = \vartheta$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \left\{ {1 \atop ik} \right\} \frac{du_i}{ds}\frac{du_k}{ds} = \frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \left\{ {1 \atop 22} \right\} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{d^2\vartheta}{ds^2} - \sin\vartheta\cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0$$

Bogenlänge

$i=2,\ u_2 = \varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left\{ {2 \atop ik} \right\} \frac{du_i}{ds}\frac{du_k}{ds} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left\{ {2 \atop 12} \right\} \frac{d\vartheta}{ds}\frac{d\varphi}{ds} + \left\{ {2 \atop 21} \right\} \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\cot\vartheta \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\vartheta}{ds}$$

$(1)\cdot\sin^2\vartheta$: $\quad \frac{d}{ds}\left(\sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0$ bzw. $\underline{\sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{ds} = h = \text{const}}$ (2)

In (1a): $\quad \frac{d^2\vartheta}{ds^2} - \frac{h^2\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} = 0 \quad \Big| \; 2\frac{d\vartheta}{ds}$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \frac{h^2}{\sin^2\vartheta} \right] = 0 \Rightarrow \underline{\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \frac{h^2}{\sin^2\vartheta} = \text{const} = \frac{h^2}{\sin^2\vartheta_0}} \quad \left(0 \le \vartheta_0 \le \frac{\pi}{2} \right)$$

Übergang zur $\vartheta(\varphi)$-Darstellung: $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{\sin^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\varphi}$

(3)

$$\Rightarrow \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \pm \frac{1}{\sin\vartheta} \left(\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

Hier ist die Integrationskonstante h wieder verschwunden (Skalentrafo $s \to s/h$ in (2), hierauf $\vartheta(\phi)$).

Aufgrund von 6c. (3) bilden ϑ_0 und $\pi-\vartheta_0$ die Grenzen des zulässigen Bereichs der Variablen ϑ. Aus (4) folgt dann (Gradshteyn-Ryzhik, Formel (2.599.6)

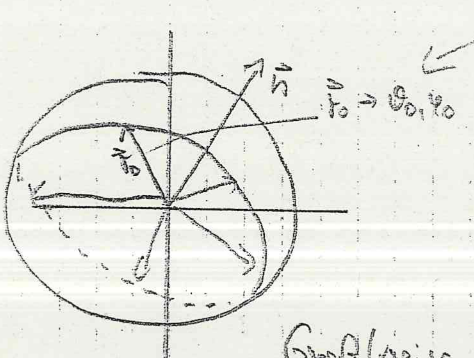
$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1\right)^{-\frac{1}{2}} = \varphi_0 \mp \arctan \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1}}\Bigg|_{\vartheta_0}^{\vartheta}$$

$$= \varphi_0 \mp \arctan \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1}} \pm \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\varphi-\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cot(\varphi-\varphi_0) = \frac{\mp\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1}} = \frac{\mp\cot\vartheta}{\sqrt{\cot^2\vartheta_0-\cot^2\vartheta}}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\vartheta = \cot\vartheta_0 \cdot \frac{\cot(\varphi-\varphi_0)}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi-\varphi_0)}} = \underline{\cot\vartheta_0\,\cos(\varphi-\varphi_0)} \qquad (6)$$

ϑ_0 ist kleinster Winkel $\vartheta \in [\vartheta_0, \pi-\vartheta_0]$



Hierbei sind ϑ_0, φ_0 die Koordinaten des Scheitelpunktes der geodätischen Linie (siehe Figur).

<u>Großkreise</u>: Einen Großkreis durch den Punkt

soll höchster Punkt sein.

$\vec r_0 = R(\sin\vartheta_0\cos\varphi_0, \sin\vartheta_0\sin\varphi_0, \cos\vartheta_0) \equiv (\vartheta_0,\varphi_0)$ erhalten wir, indem wir den Vektor $\vec r_0$ um eine auf ihm senkrecht stehende Kugelachse, deren Richtung wir mit $\vec n$ bezeichnen, rotieren lassen. Da der Großkreis bzgl. dieser Achse gerade den Äquator darstellt und $\vec r_0$ der höchste Punkt sein soll, muß $\vec n$ in Richtung des <u>Meridians</u>, d.h. in Richtung $\vec e_\theta$ am Punkte $\vec r_0$ liegen.

$$\vec n = \vec e_\theta(\vec r_0) = \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}_{\vartheta_0,\varphi_0} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0\\ \cos\vartheta_0\sin\varphi_0\\ -\sin\vartheta_0\end{pmatrix}$$

Der zu suchende Grosskreis ergibt sich aus der offensichtlichen Forderung

$$\vec n\cdot\vec r(\vartheta,\varphi) \overset{!}{=} 0 = R\left(\cos\vartheta_0\cos\varphi_0\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta_0\sin\varphi_0\sin\vartheta\sin\varphi - \sin\vartheta_0\cos\vartheta\right)$$

$$= R\left(\cos\vartheta_0\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi_0) - \sin\vartheta_0\cos\vartheta\right) \overset{!}{=} 0$$

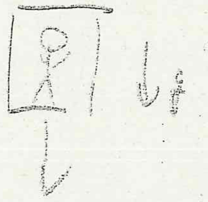
$$\Rightarrow \quad \cot\vartheta = \cot\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \,\hat{=}\, (6), \qquad \text{q.e.d.}$$

Wiederholung:

starke Äquivalenzprinzip:

An jedem Raumzeitpunkt in einem beliebigen Gravitationsfeld ist es möglich, ein lokales Inertialsystem einzuführen, in dem alle physikalische Gesetze für eine genügend kleine Umgebung dieses Punkts dieselbe Lorentz-Form haben wie in Abwesenheit eines Schwerefeldes.

Fahrstuhl



- (Lichtablenkung)

- freier Fall: $\frac{d^2 \xi_\alpha}{d\tau^2} = 0$ lok. Inertialsystem, $\Gamma^{\alpha}_{I\,\beta\gamma} = 0$ in lok. Umgebung

  beliebige Koord.-system $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}\left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right] = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ Christoffel-Symbol 2. Art

  Skalar, invariante Größe unter Wechsel des Bezugssystems – $c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = \underbrace{\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)}_{g_{\mu\nu}\text{ – metr. Tensor}} dx^\mu dx^\nu$

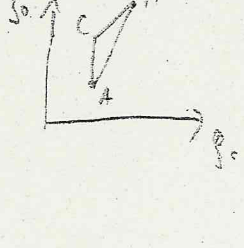
- nichtrel. Grenzfall, stat. Metrik

$$\frac{d^2 r^i}{d t^2} \approx -\Gamma^i_{00}\cdot c^2 \overset{g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}}{\approx} -\frac{1}{2}c^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \;\hat{=}\; -\nabla_i \phi_{Grav.}$$

$$\Rightarrow \quad g_{00}(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2\phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}, \quad \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{i2}} = 4\pi G\rho$$

(zu allg. Gravitationsgesetz sollte 2. te Ableitung der Metrik enthalten)

- freier Fall $\hat{=}$ Geodätenbewegung, i.e. längster möglicher Abstand in der Raum-Zeit



$\tau_{AB} > \tau_{AC} + \tau_{BC}$

...