# Die Einsteinschen Feldgleichungen

(sechster Teil)

## "Ableitung" der Feldgleichungen

Einen näherungsweise elementaren Zusammenhang zwischen Newtonscher Gravitation und dem metrischen Tensor hatten wir bereits in der nichtrelativistischen Betrachtung der Geodätengleichung mit stationärer Metrik und "schwacher" Gravitationsfelder:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = - \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad , \quad \phi(\vec{r}) = - G \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

und

$$\Gamma^i_{00}(\vec{r}) \approx \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad , \quad g_{00}(\vec{r}) = 1 + h_{00}(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2}{c^2}\phi(\vec{r})$$

Eine Differentialgleichung für das Newtonsche Gravitationspotential erhalten wir analog zur Poisson-Gleichung aus der Elektrodynamik, i.e.

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G \sum_{i=1}^{N} M_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \rightarrow 4\pi G \underbrace{\rho_0(\vec{r})}_{\text{Massendichteverteilung}}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 g_{00}(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0(\vec{r}) \approx \underline{\frac{8\pi G}{c^4}\,T_{00}(\vec{r})} \quad , \qquad (*)$$

da im nichtrelativistischen Grenzfall die Massedichte gerade (bis auf einen Faktor $c^2$) der Energiedichte, also der 00-Komponente des Energie-Impuls-Tensors entspricht.

Die Aufgabe besteht nun darin, eine geeignete Tensorgleichung, die obige Gleichung als nichtrelativistischen Grenzfall enthält, aufzustellen. Wir erkennen auch schon, daß auf der rechten Seite der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ stehen soll, da er die Massen- und Energie-Verteilung in der Raum-Zeit charakterisiert. Wir stellen deshalb folgende Forderung an die zu findende Gleichung:

(1) Die rechte Seite soll proportional zum Tensor $T_{\mu\nu}$ sein.

(2) Die linke Seite muß daher auch ein Tensor 2-ter Stufe sein, der aus dem metrischen Tensor abgeleitet ist und höchstens 2-te Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ enthält. Dieser Tensor soll keine neuen Naturkonstanten (i.e. dimensionsbehaftete Konstante) enthalten.

(3) Obige Gleichung soll sich im nichtrel., d.h. Newtonschen Limes, ergeben.

Wir nennen den gesuchten Tensor auf der linken Seite $G_{\mu\nu}$, i.e. (3)

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (**)$$

Es folgen sofort 2 Bedingungen an den Tensor $G_{\mu\nu}$:

(a) symmetrie: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ , da dies auch für $T_{\mu\nu}$ gilt

(b) Divergenzfrei: $T^{\mu\nu}_{\;\;\;\|\nu} = 0 \Rightarrow$

$$G^{\mu\nu}_{\;\;\;\|\nu} = 0 \, ,$$

i.e. die Erhaltung von Energie und Impuls impliziert, daß auch der gesuchte Tensor $G_{\mu\nu}$ divergenzfrei ist.

Speziell für den Materiefreien Raum, i.e. den vollkommen leeren Raum, fordern wir auch noch, daß

(4) Die Lösungen zu den Feldgleichungen im materiefreien Raum sollen die Lorentz-Metrik für die gesamte Raum-Zeit als spez. Lösung beinhalten, i.e. $T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist spez. Lösung

Als letztes Kriterium wollen wir auch erreichen, daß die Feldgleichung eine eindeutige Lösung garantieren: Betrachte wir eine Diff-Gleichung der Form

$$F(y^{(n)}, \ldots, y, x) = 0 \, ,$$

welche nach $y^{(n)}$ aufgelöst werden kann, so ist klar, daß die Lösung nur dann eindeutig ist, wenn $y^{(n)}$ eindeutig aus $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}$ etc. hervorgeht. Dies ist garantiert, wenn $y^{(n)}$ linear in $F$ eingeht. In der Tat ist $F$ algebraisch, so garantiert Linearität in $y^{(n)}$ eine notwendige wie hinreichende Kondition für die Eindeutigkeit der Lösung. $\Rightarrow$

(5) Die 2-ten Ableitung nach $g_{\mu\nu}$ sollen linear in den Feldgleichungen vorkommen, evtl. nicht aber die 1-te Ableitungen oder 0-te Ableitungen, i.e. die Feldgleichungen sollen quasi-linear sein.

Die Struktur von $G_{\mu\nu}$ bezüglich der Ableitungen des metr. Tensor können wir aber auch aus Dimensionsbetrachtungen erschließen. Da der Tensor $g_{\mu\nu}$ dimensionslos ist (falls alle $dx^\mu$ die Dimension Länge haben, z.B. in Kugelkoordinaten ist dies nicht der Fall, die $d\varphi$ sind hier dimensionslos), während die rechte Seite von (**) die Dimension [Länge$^{-2}$] hat, muß jeder in $G_{\mu\nu}$ additiv auftretende Term genau zwei Ableitungen nach den Ortskoordinaten enthalten (da nach Forderung (2) keine weiteren dimensionsbehafteten Naturkonstanten, etwa eine „Elementarlänge", vorkommen). Es folgt: $G_{\mu\nu}$ kann also nur die 2-ten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ linear (Forderung (5)) oder die ersten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ in quadratischer Form enthalten. Der metrische Tensor, da dimensionslos, kann in beliebiger Weise vorkommen.

Da die kovariante Ableitung von $g_{\mu\nu}$ verschwindet, bleibt als einziger geeigneter Ausgangspunkt zur Konstruktion des Tensors $G_{\mu\nu}$ der Riemannsche Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. In der expliziten Schreibweise sehen wir auch, daß er die richtige Struktur bezüglich der Ableitungen des metrischen Tensors hat: die 2-ten Ableitungen kommen linear vor, die ersten Ableitungen (über die Christoffel-Symbole) quadratisch; höhere als 2-te Ableitungen treten nicht auf.

Wir müssen nun aus dem Krümmungstensor einen Tensor 2-ter Stufe konstruieren, der (1) symmetrisch und (2) divergenzfrei ist. Wie wir bereits im letzten Kapitel besprochen haben, ist der einzige Tensor 2-ter Stufe, den wir durch Kontraktion von $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ bestimmen können, der Ricci-Tensor

← dimensionslos, da es ja $g_{\mu\nu}$ invertiert.

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = R_{\nu\mu} \quad \leftarrow \text{besitzt Dim } [\text{Länge}^{-2}]$$

der auch bereits symmetrisch in seinen Indizes ist.

Der einzig andere sym. Tensor 2. Stufe, der in Frage kommt, ist der metrische Tensor selbst. Wir können ihn mit einem beliebigen Skalar der Dimension [Länge$^{-2}$] multiplizieren, der einzig geeignete, vom Krümmungstensor abgeleitete Skalar, ist also gerade der Krümmungsskalar, der ebenfalls die Dim [Länge$^{-2}$] bereits besitzt:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$$

Weitere geeignete Tensoren, die vom metrischen Tensor abgeleitet werden, gibt es nicht.

Der allgemeinste Ansatz lautet daher

$$G_{\mu\nu} = a\, R_{\mu\nu} + b \cdot R\, g_{\mu\nu},$$

mit dimensionslose Konstante a und b. Um das rel. Verhältnis der Konstanten zu bestimmen, "erhoffen" wir, daß die Divergenzfreiheit von $G_{\mu\nu}$ uns Aufschluß liefert (Wenn dies nicht klappt, dann scheitert die gesamte Überlegung, und auch Einsteins Theorie?):
Um die Divergenz des Ausdruckes zu bilden, benötigen wir die Bianchi-Identitäten

$$R_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} + R_{\alpha\mu\delta\beta\|\gamma} + R_{\alpha\mu\gamma\delta\|\beta} = 0$$

Wir kontrahieren $\alpha$ mit $\beta$ und $\mu$ mit $\gamma$ durch Überschiebung mit $g^{\alpha\beta}$ und $g^{\mu\gamma}$ ($g^{\mu\beta}{}_{\|\gamma} = 0$):

$$0 = R^{\beta\gamma}{}_{\beta\gamma\|\delta} + \underbrace{R^{\beta\gamma}{}_{\delta\beta\|\gamma}}_{-R^{\gamma}_{\delta}} + \underbrace{R^{\beta\gamma}{}_{\gamma\delta\|\beta}}_{-R^{\beta}_{\delta}} =$$

$$= R_{\|\delta} - R^{\gamma}{}_{\delta\|\gamma} - R^{\beta}{}_{\delta\|\beta} = R_{\|\delta} - 2R^{\gamma}{}_{\delta\|\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad R^{\gamma}{}_{\delta\|\gamma} = \frac{1}{2} R_{\|\delta} \overset{\text{(Skalar)}}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^{\delta}}$$

Mit der Forderung

$$G^{\mu\nu}{}_{\|\nu} \overset{!}{=} 0 \overset{\text{da } G^{\mu\nu} \text{ symmetrisch}}{\Leftrightarrow} G^{\nu\mu}{}_{\|\nu} \overset{!}{=} 0 \overset{(g_{\alpha\mu})_{\|\nu}=0}{\Leftrightarrow} G^{\nu}{}_{\mu\|\nu} \overset{!}{=} 0$$

folgt

$$G^{\nu}{}_{\mu\|\nu} = a\, R^{\nu}{}_{\mu\|\nu} + b\, R_{\|\nu}\, \delta^{\nu}_{\mu} \overset{\hat{=}\, g^{\nu}_{\mu}}{=} \left(\frac{a}{2} + b\right) R_{\|\mu} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad b = -\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}\right) \hat{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Bemerkung: Der Tensor $(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu})$ bezeichnet man auch als den divergenzfreien Ricci-Tensor.

Ohne Beweis: Er ist neben $g_{\mu\nu}$ selber der einzige andere Tensor 2. Stufe, dessen Divergenz verschwindet und der vollständig aus dem metr. Tensor und dessen ersten und zweiten Ableitungen aufgebaut ist.

nun eigentlich plausibel?

Um die Konstante $a$ zu bestimmen, müssen wir uns den Newtonschen Grenzfall dieser Gleichung betrachten und mit den anfänglichen Gleichungen vergleichen. Die 00-te Komponente (alle anderen Komponenten von $T^{\mu\nu}$ sind im Limes kleiner Geschwindigkeiten linear oder quadratisch klein) lautet:

$$G_{00} = a\left(R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00}\right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0(\vec{r})$$ ← stationäre Verteilung in einem spez. Bezugssystem

Weiter ist

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\right) + g_{\varrho\lambda}\left(\Gamma^\varrho_{\alpha\mu}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\varrho_{\beta\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\right)$$

Nun ist

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

sodaß $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sim O(h_{\mu\nu})$, $\Gamma \sim \frac{\partial g}{\partial x} \sim O(h_{\mu\nu})$, $\Gamma \cdot \Gamma \sim O(h_{\mu\nu}^2)$

und wir die quadratischen Terme, i.e. die nichtlinearen Terme $\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ erst einmal als quadratisch kleine Terme vernachlässigen können.

$$\Rightarrow \quad R_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha 0} = g^{\alpha\beta} R_{\beta 0\alpha 0} \overset{\text{Beschränkung auf lineare Terme}}{\approx} \eta^{\alpha\beta} R_{\beta 0 \alpha 0} = \underbrace{R_{0000}}_{0} - \sum_{i=1}^{3} R_{i0i0} = -\sum_{i=1}^{3} R_{i0i0}.$$

Antisymmetrieeigenschaft

Weiter sei (wie gehabt) die Metrik stationär, i.e. $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial ct} = 0$, i.e. $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)$, sodaß

$$R_{i0i0} \overset{\nu=\beta=0}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^i)^2} + O(h_{\mu\nu}^2) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^i)^2}$$

(Statt der Stationarität könnte wir auch weniger restriktiv fordern, daß $\frac{\partial}{\partial ct}$ sehr viel kleiner als $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sei und somit, ähnlich wie bei $v \ll c$ zu vernachlässigen ist).

$$\Rightarrow \quad \underline{R_{00}} \approx -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \overset{\text{Newton-Limes Seite 2}}{\approx} \underline{-\frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi(\vec{r})} \quad \rightarrow \quad -\frac{4\pi G}{c^4} T_{00}(\vec{r})$$

Um $R$ und damit die Konstante $a$ zu bestimmen, werden wir an dieser Stelle $R$ nicht direkt (vgl. zusätzliche Betrachtung Seite 8), sondern durch einen geschickten Trick aus $R_{00}$ und $T_{00}$ ermitteln. Unsere Zielgleichung lautete:

$$G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) \overset{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (***)$$

Nun ist im nichtrel. Limes $\quad T_{\mu\nu} \overset{T}{=} \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$, wobei $T_{00} \approx \rho_0(\vec{r}) c^2$ den dominanten Beitrag darstellt, da die Geschwindigkeiten klein gegen $c$ sein soll und der Druck gegenüber der Massendichte $\rho c^2$ ebenfalls als klein angenommen werden soll.

Aus (***) folgt durch Verjüngen

dominanter Beitrag

$$a\left(R^\mu_{\ \mu} - \frac{1}{2} R\,\delta^\mu_{\ \mu}\right) = a\,(R - 2R) = \underline{-aR} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T^\mu_{\ \mu} \approx \frac{8\pi G}{c^4}\,T^0_{\ 0} \approx \underline{\frac{8\pi G}{c^4}\,T_{00}},$$

da $T^0_{\ 0} = g^{0\alpha}\,T_{\alpha 0} \approx \eta^{0\alpha}\,T_{\alpha 0} \approx \eta^{00}\,T_{00} = T_{00}$ ist.

Daraus folgt dann für die (00)-Komponente aus (***)

$$a\,(R_{00}) \stackrel{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{00} + \frac{a}{2}\,R\,g_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2}\,T_{00}\right) = \frac{4\pi G}{c^4}\,T_{00}$$

bzw. das Resultat für $R_{00}$ eingesetzt

$$a\left(-\frac{1}{2}\,\nabla^2 g_{00}\right) \approx \frac{4\pi G}{c^4}\,T_{00}$$

Ein Vergleich mit (*) liefert sofort, daß $\underline{a = -1}$. Damit

$$G_{\mu\nu} = \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,R\,g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}}$$ – Einsteinsche Feldgleichung.

haben wir die Einsteinschen Feldgleichungen deduziert.

Da die linke Seite divergenzfrei ist, folgt sofort, daß auch $T_{\mu\nu}$ divergenzfrei ist (das haben wir nun zwar in die Deduktion hereingesteckt, umgekehrt aber, postulieren wir die EG, so folgt dann zwingend $T_{\mu\nu||\nu} = 0$, i.e. die Erhaltung von Energie und Impuls).

Die EG lassen sich auch noch in eine andere vollkommen äquivalente Form bringen:

$$R^\mu_{\ \mu} - \frac{1}{2}\,R\,\delta^\mu_{\ \mu} = R - 2R = \underline{-R} = -\frac{8\pi G}{c^4}\,T^\mu_{\ \mu} \equiv \underline{-\frac{8\pi G}{c^4}\,T}$$

Gleichung oben ein

$$\Rightarrow \boxed{R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,T\,g_{\mu\nu}\right) \quad \text{mit } T \equiv T^\mu_{\ \mu}},$$

diese Form, also in der wir den Krümmungsskalar $R$ durch die Spur $T^\mu_{\ \mu}$ des Energie-Impulstensors ausgedrückt haben, weist eine bemerkenswerte Symmetrisierung der obigen Form der EG auf und drückt noch einmal den engen Zusammenhang zwischen Gravitation und Materie aus.

• In unserer gesamten Deduktion ist nur die Abweichung $h_{00} = g_{00} - 1$, nicht aber die anderen Einträge $h_{0i}, h_{ij}$ aufgetreten. Im Kapitel 9.5 zeigt Adler, dass in der Tat der Newtonsche Limes durch eine Metrik mit folgender diagonaler Form

$$g_{\mu\nu} \hat{=} \begin{pmatrix} 1+h_{00} & & & 0 \\ & -1+h_{00} & & \\ & & -1+h_{00} & \\ 0 & & & -1+h_{00} \end{pmatrix}$$

gelöst wird. Daraus resultiert ein genähertes Linien-Element der Form

$$ds^2 = \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)c^2dt^2 - \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)d\vec{x}^{\,2}.$$

• Im vollkommen materiefreien Fall ist $T^{\mu\nu}=0$ über den gesamten Raum-Zeit-Bereich. Daraus resultiert dann

(Form aus $R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$, wie wir den Krümmungstensor gegen Ende des letzten Kapitels eingeführt haben)

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\nu\mu} = 0$$

Wir wissen, dass dies $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ (im Großen) als Lösung enthält, da wenn $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow R^\alpha_{\mu\beta\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$. Damit gilt unsere Forderung (4).
Es muß aber nicht die einzige sein, (da z.B. beliebige Koordinatentransformation ja möglich, sodaß $\eta_{\mu\nu} \xrightarrow{x \to \bar{x}} g_{\mu\nu}$, aber Raum natürlich derselbe).

• Wenn $R_{\mu\nu}=0$ in einem endlichen Bereich, dann folgt daraus nicht, daß auch der Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ dort verschwindet, i.e. der Raum kann gekrümmt sein.

Innen $T^{\mu\nu} \neq 0$

z.B. Sonne

Außen $T^{\mu\nu}=0$

$\Rightarrow R^{\mu\nu}=0$, aber $R_{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$, da ja immer noch Gezeitenkräfte $F^i(x+\delta x) - F^i(x)$ wirken, wie ja auch gerade im Newtonschen Limes gezeigt. Der Raum ist also um die Erde oder Sonne gekrümmt!

• Die Einfachheit der EG darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ sehr komplex aus den $g_{\mu\nu}$ aufgebaut ist! Die Lösung der EG ist daher ein schwieriges math. Problem.

## Zusätzliche Betrachtung: direkte Berechnung vom Krümmungsskalar R im Newtonschen Grenzfall

Es ist

$$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}$$

Umbenennung

$$R = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \approx \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$\approx \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha\partial x^\mu}\right) + O(h_{\mu\nu}^2)$$

$$\approx \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha\partial x^\nu}\right) \quad \leftarrow \text{direkte Auswertung, stat. Metrik}$$

$$\overset{\text{stat. M.}}{\hat{=}} -\sum_i \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^i)^2} + \sum_{i,j}\frac{\partial^2 g_{jj}}{(\partial x^i)^2} - \sum_{i,j}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i\partial x^j}$$

An dieser Stelle fehlt uns Information über das Verhalten der $h_{ij}$.
Diese hatten wir bis dato auch nicht benötigt.
Falls nun die Form von Seite ⑦ oben gilt, also wie in Adler Kap 9.5 angegeben, also

$$h_{ij} = (+h_{00})\,\delta_{ij}\,,$$

sodaß sich nach einer kürzeren Rechnung ergibt

$$R = -\sum_i \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^i)^2} + 3\cdot\sum_i \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x_i^2} - \sum_i \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x_i^2} = \nabla^2 h_{00} = \nabla^2 g_{00}$$

Zusammen mit der Beziehung $R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}$
wird dann aus der (00)-te Komponente von (***)

$$G_{00} = a\Big(R_{00} - \frac{1}{2} R \underbrace{g_{00}}_{\approx 1}\Big) = a\Big(-\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} - \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}\Big) = (-a)\,\nabla^2 g_{00} \overset{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

Ein Vergleich mit (*) ergibt dann wieder $\underline{a = -1}$

Bemerkung: Im Adler Kap. 9.5. erkennt man, daß dies alles konsistent ist und daß $R_{\mu\nu}$ im Rahmen der Näherung Diagonal ist und proportional zu $1\!\!1_4$, i.e.

(9.87) $$R_{\mu\nu} = C\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\Big) = C\,\frac{\rho_0}{2}\,\delta_{\mu\nu}$$

Die Lösung (9.99), i.e. die Form von $g_{\mu\nu}$ auf Seite ⑦ oben, erfüllt dann diese Gleichung in dem Newtonschen Grenzfall.

## radialsymmetrische Gravitationsfelder

Um die Vorhersagen der EG an experimentellen Beobachtungen überprüfen zu können, müssen wir sie lösen. Die allgemeine Lösung der Feldgleichungen ist aber nicht bekannt. Man kennt aber spezielle Lösungen, die bestimmte Symmetriebedingungen und Randbedingungen erfüllen. Der für die Astronomie wohl wichtigste Spezialfall ist der eines zeitunabhängigen, radialsymmetrischen Gravitationsfeldes, das in der Umgebung eines kugelförmigen Sterns vorliegen sollte. Die exakte Lösung dieses Problems wurde 1916 von Karl Schwarzschild gefunden; wie man zeigen kann, ist die Lösung unter den folgenden Bedingungen sogar eindeutig:

1.) die Metrik ist zeitunabhängig

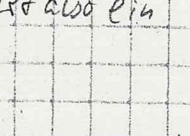
2) die Metrik ist radialsymmetrisch

3) für große Abstände vom Zentrum beschreibt die Metrik einen flachen Raum.

Bis auf Koordinatentransformationen (die ja immer möglich sind) und die Masse des Sterns ist die Schwarzschildlösung dann eindeutig bestimmt. Es existiert also ein spez. Koordinatensystem mit den Eigenschaften 1+3)

Wir betrachten also zunächst (noch nicht notwendig) den Raum außerhalb des kugelförmigen Sterns und suchen die Lösung der freien Feldgleichungen. Aus 1+2) folgt, daß das infinitesimale Linienelement $ds^2 = c^2 d\tau^2$ invariant unter den Ersetzungen

$$dt \to -dt, \quad d\theta \to -d\theta, \quad d\phi \to -d\phi$$



sein muß, i.e. die Metrik darf keine Mischterme $d\rho\, d\theta$, $d\theta\, d\phi$, $d\rho\, dt$ etc. enthalten. Weiter dürfen die Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ nur von der Radialkoordinate $\rho$ abhängen. Mit den Koordinaten

$$x^0 = ct, \quad x^1 = \rho, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi$$

lautet das allgemeinste Linienelement, daß 1.) und 2) genügt,

$$ds^2 = A(\rho)\, c^2 dt^2 - \left(B(\rho)\, d\rho^2 + C(\rho)\rho^2 d\theta^2 + D(\rho)\rho^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

Aufgrund der Radialsymmetrie können wir aber auch annehmen, daß $C(\rho) = D(\rho)$, da unter unserer Vorstellung von $\theta$ und $\phi$ das Längenelement $\sqrt{C(\rho)}\,\rho\, d\theta$ entlang dem Meridian gleich sein sollte zu $\sqrt{D(\rho)}\,\rho\, d\phi$ entlang des Äquators für $d\theta = d\phi$.

Also
$$ds^2 = A(\varrho)\, c^2 dt^2 - \left(B(\varrho)\, d\varrho^2 + C(\varrho)\, \varrho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right)$$

enthält unsere Erwartungen der Symmetrie. Wir können aber noch den „Abstand" $\varrho$ umskalieren, so daß das Linienelement entlang einer Kugelfläche die gewohnte Form annimmt:

$$C(\varrho)\, \varrho^2 \equiv r^2 \quad \rightarrow \quad r(\varrho) \text{ als neue globale Koordinate}$$

$$\Rightarrow \quad 2r\, dr = \left(C'(\varrho)\varrho^2 + 2\, C(\varrho)\varrho\right) d\varrho \quad \Rightarrow \quad dr^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} C'(\varrho)\, \varrho + C(\varrho)\right)^2}{C(\varrho)}\, d\varrho^2$$

Hier setzen wir voraus, daß $r$ eine neue, globale radiale Variable verkörpert, die dem Abstand entsprechen soll. Für das Linienelement finden wir

$$ds^2 = \tilde{A}(r)\, c^2 dt^2 - \left(\tilde{B}(r)\, dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right),$$

wobei
$$\tilde{A}(r) = A(\varrho(r)) \; , \quad \tilde{B}(r) = \frac{B(\varrho(r))\, C(\varrho(r))}{\left(C(\varrho(r)) + \frac{1}{2} C'(\varrho(r))\, \varrho(r)\right)^2}$$

Die dritte Bedingung besagt schließlich, daß für große Abstände vom Zentrum die Metrik einen flachen Raum beschreiben soll, d.h. wir verlangen

$$\tilde{A}(r) \xrightarrow{r\to\infty} 1 \; , \quad \tilde{B}(r) \xrightarrow{r\to\infty} 1 \; ,$$

so daß die Metrik einfach in die Lorentzmetrik (ausgedrückt in Kugelkoordinaten) übergeht.

Damit der inverse metr. Tensor $g^{\mu\nu}$ existiert, müssen wir auch verlangen, daß die Funktionen $\tilde{A}(r)$, $\tilde{B}(r)$ nirgends verschwinden. Sowohl $\tilde{A}$ wie $\tilde{B}$ müssen dann aufgrund ihres asymptotischen Verhaltens überall positiv sein. Wir setzen:

$$\tilde{A}(r) = e^{\nu(r)} \; , \quad \tilde{B}(r) = e^{\lambda(r)}$$

Damit
$$\boxed{ds^2 = e^{\nu(r)}\, c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)}\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)}$$

bzw.
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & & & \\ & -e^{\lambda(r)} & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} ; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & & & \\ & -e^{-\lambda(r)} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} , \quad \nu(r), \lambda(r) \xrightarrow{r\to\infty} 0 .$$

Um die Funktionen $\nu(r)$, $\lambda(r)$ zu bestimmen, müssen wir mittels dieses Ansatzes für die Metrik den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ (oder $G_{\mu\nu}$) durch die unbekannten Funktionen $\nu$ und $\lambda$ ausdrücken und in den Einstein-Gleichungen einsetzen.

Werten wir hierzu zunächst die Christoffel-Symbole

$$\left\{ {\sigma \atop \lambda\mu} \right\} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right]$$

explizit aus:

Index $\nu = 0$ — stationäre Metrik

(a) $\underline{\sigma = 0}$:
$$\Gamma^{0}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} e^{-\nu(r)} \left[ \frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{0}} \right]$$
$$= \frac{1}{2} e^{-\nu(r)} \left[ \delta_{\mu 0}\delta_{\lambda 1} \nu'(r) e^{\nu(r)} + \delta_{\lambda 0}\delta_{\mu 1} \nu'(r) e^{\nu(r)} - 0 \right] = \frac{1}{2}\nu'(r)\left[\delta_{\mu 0}\delta_{\lambda 1} + \delta_{\mu 1}\delta_{\lambda 0}\right]$$

d.h. $\Gamma^{0}_{01} = \Gamma^{0}_{10} = \frac{\nu'(r)}{2}$, sonst $\Gamma^{0}_{\lambda\mu} \equiv 0$

Symmetrie explizit realisiert

Index $\nu = 1$

(b) $\underline{\sigma = 1}$:
$$\Gamma^{1}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda(r)} \left[ \frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 1}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial r} \right]$$
$$= -\frac{1}{2} e^{-\lambda(r)} \left[ 2\delta_{\mu 1}\delta_{\lambda 1}\left(-\lambda'(r) e^{\lambda(r)}\right) - \delta_{\mu\lambda}\left( \delta_{\mu 0}\nu'(r) e^{\nu(r)} - \delta_{\mu 1}\lambda'(r) e^{\lambda(r)} - 2r\delta_{\mu 2} - 2r\sin^2\theta\,\delta_{\mu 3}\right)\right]$$
$$= \delta_{\mu\lambda}\left[ \frac{1}{2}\lambda'(r)\delta_{\mu 1} - r e^{-\lambda(r)}\left(\delta_{\mu 2} + \sin^2\theta\,\delta_{\mu 3}\right) + \frac{1}{2}\nu'(r) e^{\nu-\lambda}\delta_{\mu 0}\right]$$

d.h. $\Gamma^{1}_{11} = \frac{\lambda'(r)}{2}$; $\Gamma^{1}_{22} = -r e^{-\lambda(r)}$; $\Gamma^{1}_{00} = \frac{\nu'(r)}{2} e^{\nu-\lambda}$; $\Gamma^{1}_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda(r)}$; $\Gamma^{1}_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \neq \mu$

(c) $\underline{\sigma = 2}$:
$$\Gamma^{2}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2r^2}\left[ \frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 2}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial \theta}\right]$$
$$= -\frac{1}{2r^2}\left[ \delta_{\mu 2}\delta_{\lambda 1}(-2r) + \delta_{\lambda 2}\delta_{\mu 1}(-2r) - \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 3}\left(-2r^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]$$
$$= \frac{1}{r}\left(\delta_{\mu 2}\delta_{\lambda 1} + \delta_{\lambda 2}\delta_{\mu 1}\right) - \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 3}\sin\theta\cos\theta$$

d.h. $\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta$; $\Gamma^{2}_{\lambda\mu} = 0$ sonst.

(d) $\underline{\sigma = 3}$:
$$\Gamma^{3}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left[ \frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 3}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial \phi}\right]$$
$$= -\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left[ \delta_{\mu 3}\left(-2r\sin^2\theta\,\delta_{\lambda 1} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\delta_{\lambda 2}\right) + \delta_{\lambda 3}\left(-2r\sin^2\theta\,\delta_{\mu 1} - 2r\sin\theta\cos\theta\,\delta_{\mu 2}\right) - 0\right]$$
$$= \frac{1}{r}\left(\delta_{\mu 3}\delta_{\lambda 1} + \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 1}\right) + \cot\theta\left(\delta_{\mu 3}\delta_{\lambda 2} + \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 2}\right)$$

d.h. $\Gamma^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{r}$; $\Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = \cot\theta$, sonst $\Gamma^{3}_{\lambda\mu} = 0$.

Als nächstes wollen wir nun den Ricci-Tensor (vgl. S. 7)

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\nu\mu} = \qquad \Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\ln\sqrt{|g|} \leftarrow \text{vgl. Diskussion der Divergenz}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|}$$

Zunächst bemerken wir, daß die metrische Determinante lautet

$$|g| = e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2\theta \implies \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ln\sqrt{|g|} = \delta_{\mu 1}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right) + \delta_{\mu 2}\cot\theta$$

Nun heißt es Buchhalten:

(a) $\underline{\mu=\nu=0}$: $R_{00} = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 0} - \Gamma^\beta_{00}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|}$

$$= -\frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial r} + \left(\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10}\right) - \Gamma^1_{00}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\nu'' + \nu'(\nu'-\lambda')\right)e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'^2}{2}e^{\nu-\lambda} - \left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} =$$

$$\underline{= -\frac{1}{2}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}\right)e^{\nu-\lambda}}$$

(b) $\underline{\mu=0,\nu=1}$: $R_{01} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^1}\ln\sqrt{|g|}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma^\alpha_{10}}{\partial x^\alpha}}_{=0} + \Gamma^\alpha_{1\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 0} - \underbrace{\Gamma^\beta_{10}}_{\to \beta=0}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|}}_{\to 0} = \Gamma^\alpha_{1\beta}\underbrace{\Gamma^\beta_{\alpha 0}}\equiv 0$

$\Gamma^0_{10}$ ist einzig $\neq 0 \to \beta=0, \alpha=1 \to \Gamma^1_{10}$

(c) $\underline{\mu=0,\nu=2}$: $R_{02} = \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^2}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{20}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{2\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 0} - \Gamma^\beta_{20}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|} \overset{\dots}{=} \Gamma^\alpha_{2\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 0} \equiv 0$

(d) $\underline{\mu=0,\nu=3}$: $R_{03} = \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^3}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{30}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{3\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 0} - \Gamma^\beta_{30}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|} \overset{\dots}{=} \Gamma^\alpha_{3\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 0} \equiv 0$

Aufgrund der Symmetrie $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ folgt dann auch

$$\underline{R_{10} = R_{20} = R_{30} = 0}$$

(e) $\underline{\mu=\nu=1}$: $R_{11} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{11}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{1\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 1} - \Gamma^\beta_{11}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|} =$

$$= \left(\frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2}\right) - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial r} + \left(\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31}\right) - \Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= \frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2} - \frac{\lambda''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{2}{r^2} - \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right) = \underline{\frac{1}{2}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\right)}$$

(f) $\underline{\mu=1,\nu=2}$: $R_{12} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial\theta}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{21}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{2\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 1} - \Gamma^\beta_{21}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|} =$

$$= \underbrace{\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial\theta}}_{=0} + \left(\Gamma^1_{22}\underbrace{\Gamma^2_{11}}_{=0} + \Gamma^2_{21}\underbrace{\Gamma^1_{21}}_{=0} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{31}\right) - \Gamma^2_{21}\cot\theta = \cot\theta\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\cot\theta = \underline{0}$$

(g) $\underline{\mu=1,\nu=3:}$ $$R_{13} = \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\phi}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{31}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 1} - \underbrace{\Gamma^{\beta}_{31}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\ln\sqrt{|g|}}_{\to 0}$$

$$= -\underbrace{\frac{\partial\Gamma^{3}_{31}}{\partial\phi}}_{=0} + \Big(\Gamma^{2}_{33}\underbrace{\Gamma^{3}_{21}}_{=0} + \Gamma^{3}_{31}\underbrace{\Gamma^{1}_{31}}_{=0} + \Gamma^{3}_{32}\underbrace{\Gamma^{2}_{31}}_{=0}\Big) = \underline{0}$$

und wieder folgt auch $\underline{R_{21} = R_{31} = 0}$

(h) $\underline{\mu=2,\nu=2:}$ $$R_{22} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{22}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 2} - \Gamma^{\beta}_{22}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\ln\sqrt{|g|} =$$

$$= \frac{\partial\cot\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma^{1}_{22}}{\partial r} + \left(\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12} + \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22}\right) - \Gamma^{1}_{22}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\theta} + e^{-\lambda} - \lambda' r e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda} + \cot^2\theta + r e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right)$$

$$= \underline{-1 + e^{-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda'}{2}r + \frac{\nu'}{2}r\right)}$$

(i) $\underline{\mu=2,\nu=3:}$ $$R_{23} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\phi}\ln\sqrt{|g|}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{32}}{\partial x^{\alpha}}}_{=0}{}^{\alpha=3} + \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 2} - \overbrace{\Gamma^{\beta}_{32}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\ln\sqrt{|g|}}^{\to\beta=3\,=0}$$

$$= \Gamma^{2}_{33}\underbrace{\Gamma^{3}_{22}}_{=0} + \Gamma^{3}_{31}\underbrace{\Gamma^{1}_{32}}_{=0} + \Gamma^{3}_{32}\underbrace{\Gamma^{2}_{32}}_{=0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{R_{32} = R_{23} = 0}$$

(j) $\underline{\mu=\nu=3:}$ $$R_{33} = \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{33}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 3} - \Gamma^{\beta}_{33}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= -\frac{\partial\Gamma^{1}_{33}}{\partial r} - \frac{\partial\Gamma^{2}_{33}}{\partial\theta} + \left(\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{23} + 2\Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{33} + \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{2}_{33}\right) - \Gamma^{2}_{33}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\sqrt{|g|} - \Gamma^{1}_{33}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= (1-\lambda' r)e^{-\lambda}\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\, e^{-\lambda} + \cos^2\theta + r e^{-\lambda}\sin^2\theta\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right)$$

$$= \sin^2\theta\left[-1 + e^{-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda' r}{2} + \frac{\nu' r}{2}\right)\right] \mathrel{\hat=} \underline{\sin^2\theta\, R_{22}}$$

- Wir haben also explizit (und mühevoll) gefunden, daß alle <u>Nichtdiagonalelemente</u> des Ricci-Tensors $R_{\mu\nu}$ verschwinden. Es gilt zusammenfassend:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) \quad ; \quad R_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu\neq\nu$$

$$R_{22} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\nu'-\lambda'}{2}r\right) - 1$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\, R_{22}$$

Last, but not least, berechnen wir den divergenzfreien Ricci-Tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$.
Da $R_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ <u>diagonal sind</u>, ist dies auch $G_{\mu\nu}$, d.h. es ist

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu .$$

Der Krümmungsskalar $R$ berechnet sich dann zu

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-\nu} R_{00} - e^{-\lambda} R_{11} \underbrace{- \frac{1}{r^2} R_{22} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} R_{33}}_{-\frac{2}{r^2} R_{22}}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2}{r}(\nu' - \lambda')\right) - \frac{2}{r^2} e^{-\lambda}\left(1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right) + \frac{2}{r^2}$$

$$= -e^{-\lambda}\left(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + 2\frac{(\nu' - \lambda')}{r} - \frac{2}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2}$$

Damit erhalten wir nacheinander:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R e^{\nu} = e^{\nu - \lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^{\nu}}{r^2}$$

$$G_{11} = R_{11} + \frac{1}{2} R e^{\lambda} = -\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{\lambda}}{r^2}$$

$$G_{22} = R_{22} + \frac{1}{2} R r^2 = -\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right)$$

$$G_{33} = R_{33} + \frac{1}{2} R r^2 \sin^2\theta = \sin^2\theta \, G_{22}$$