Die Schwarzschild-Lösung

- $G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

- Wir beschränken uns hier auf den Außenraum, i.e. materiefreien Raum $T_{\mu\nu} \equiv 0$ (später werden wir auch ein einfaches Sternmodell betrachten).

$\Rightarrow G_{\mu\nu} = 0$ ($\Leftrightarrow R_{\mu\nu} = 0$, dies ist aber in diesem Fall etwas mühsamer (?))

$$\Rightarrow \quad -\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^\lambda}{r^2} = 0 \qquad (1)$$

$$-\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2} = 0 \quad ; \text{ da } e^\nu, e^\lambda > 0 \text{ und damit } \neq 0. \qquad (2)$$

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} = 0 \qquad (3)$$

Die wichtige Frage ist nun, ob es überhaupt Funktionen $\nu(r)$, $\lambda(r)$ gibt, die die Gleichungen (1,2,3) gleichzeitig erfüllen, da wir ja drei Bestimmungsgleichungen haben und das Differentialgleichungssystem eigentlich überbestimmt ist. Aber (3) folgt aus (1) und (2):

$$\frac{d}{dr}(r(2)) \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = \left(-\nu' - \frac{1}{r} + \frac{e^\lambda}{r}\right)' = \left(-\nu'' + \frac{1}{r^2} + \lambda'\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r^2}e^\lambda\right) \qquad (2')$$

Wenn (1), (2), (2') erfüllt ist, folgt für (3)

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{1}{r}(\nu' - \lambda') \overset{(2')}{=} \left(\frac{1}{r^2} + \lambda'\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r^2}e^\lambda + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{1}{r}(\nu' - \lambda')\right)$$

λ', ν' (1)(2)

$$= \left(\frac{1}{r^2} + e^\lambda\left(\cancel{\frac{1}{r^2}} - \frac{e^\lambda}{r^2}\right) - \cancel{\frac{1}{r^2}e^\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{e^\lambda}{r}\right) + \left(\frac{e^\lambda}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r^2} - \cancel{\frac{e^{2\lambda}}{r^2}} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{e^{2\lambda}}{r^2}} - \cancel{\frac{2e^\lambda}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{e^{2\lambda}}{r^2}} - \cancel{\frac{2e^\lambda}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\right) + \cancel{\frac{2e^\lambda}{r^2}} - \frac{2}{r^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^2}\right) \equiv 0 \text{, i.e. identisch erfüllt.}$$

Damit haben wir gezeigt, daß für den Aussenraum (3) direkt aus (2) und (1) folgt und damit das Diffglg-system nicht trivial überbestimmt ist. Wäre hier nicht 0 herausgekommen, dann könnten wir keine Lösung finden und die Einsteingleichungen würden dann keinen Sinn machen.

Anmerkung (für später): Im nicht materiefreien Raum, etwa bei stat., wie auch dynam., aber radialsym. Sternmodelle, sollte es daher auch entsprechende Beziehungen zwischen den $T_{\mu\nu}$ geben, damit das System nicht ohne weiteres überbestimmt ist... Etwa sollte im hydrostat. Gleichgewicht $T_{33} = T_{22} \sin^2\theta$ – in Kugelkoordinaten – gelten und, da auch hier nur nach λ und ν gefragt ist, sollte sich die entsprechende Gleichung (3) mit T_{33} auf der rechten Seite aus den anderen entsprechenden Gleichungen (1) und (2) deduzieren lassen. Aber $\rho(r)$ ist ja erstl. variabel...

Wir können uns somit nun bedenkenlos auf (1) und (2) konzentrieren, da dann (3) automatisch erfüllt ist. Aus (1) und (2) folgt sofort

$$\frac{\lambda' + \nu'}{r} = 0 \Rightarrow \lambda' + \nu' = 0 \Rightarrow \lambda(r) + \nu(r) = const(r)$$

Aufgrund der zu fordernden Asymptotik für $r \to \infty$, i.e. $\lambda(\infty) = \nu(\infty) = 0$ müssen wir die Konstante gleich 0 setzen, i.e.

$$\boxed{\lambda(r) = -\nu(r)}$$

Unabhängig davon folgt direkt aus (1)

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad (-\lambda' r + 1)e^{-\lambda} - 1 = \frac{d}{dr}\left(r e^{-\lambda}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r e^{-\lambda} - r = const = -r_s$$

und damit

$$\boxed{e^{-\lambda(r)} = e^{\nu(r)} = 1 - \frac{r_s}{r}}$$

Das Einführen von ν und λ hat ursprünglich das Rechnen sehr vereinfacht. Weinberg tut alles direkt mit A und B.

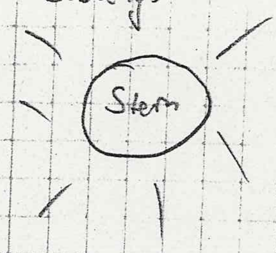
im Prinzip, da ν, λ als reell angenommen, darf r nie kleiner gleich r_s sein! Aber $1-\frac{r_s}{r}$ löst trotzdem die Einsteingleichungen für $r < r_s$. Man hätte dann A(r) und B(r) nicht durch e^{ν}, e^{λ}, sondern direkt ansetzen sollen.

Damit ist (1), (2) und (3) gelöst? – Man mache sich das klar! –
Schließlich

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

erfüllt die asymptotische Bedingung eines flachen Raums für $r \to \infty$.
Die Lösung wird als Schwarzschild-Lösung bezeichnet.

<u>Schwarzschild-Lösung</u>



Sie ist nur im materiefreien Raum außerhalb eines kugelförmigen Sterns gültig; im Innern des Sterns hat die Metrik ganz (ähnlich wie das klassische Newton-Potential) eine andere Form, die von der (radial(sym.)) Materieverteilung abhängt. Wir werden diese später untersuchen.

Wir wollen nun noch zwei Einzelheiten besprechen, und zwar die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten r_s sowie den daraus resultierenden zulässigen Bereich der Radialkoordinate. Zunächst sehen wir unmittelbar ein, daß die metr. Koeffizienten e^{ν} und e^{λ} nur solange positiv sind wie r größer als r_s, mit anderen Worten: Die Schwarzschild-Lösung verliert für $r \leq r_s$ ihre Gültigkeit. Wir helfen uns einfach damit, daß wir fordern, daß der Radius R_{St} des Zentralsterns größer als r_s, der sog. <u>Schwarzschildradius</u> sein muß:

$$R_{St} > r_s.$$

Für $r < R_{St}$ haben die Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ dann ein anderes Aussehen, so daß die Schwierigkeit zunächst beseitigt ist. (<u>Problem</u>: punktartige Teilchen darf es <u>nicht</u> geben, i.e. Selbstwechselwirkung wird unendlich groß ... $\rightarrow$ schwarze Löcher).

Die physikalische Bedeutung der Konstanten r_s ergibt sich durch einen Vergleich für große Radien, wo $|g_{00}(r)-1| \ll 1$ und der Newtonsche Limes gilt: (Bedenken wir, wir haben noch nichts über die Masse des Zentralkörpers gesagt. Diese steckt ja nur "zunächst" in den lokalen Gleichungen für den Innenraum. Erst eine Stetigkeitsforderung bei $r = R_0$ bestimmt dann die Wahl von r_s "mikroskopisch").

$$\Phi_{Grav}(r) = -\frac{GM}{r} \approx \frac{c^2}{2}\left(g_{00}(r)-1\right) \hat{=} \frac{c^2}{2}\left(e^{\nu(r)}-1\right) = -\frac{c^2 r_s}{2r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_s = \frac{2GM}{c^2} = 2m}$$

Durch Vergleich haben wir also die physikalische Bedeutung des Schwarzschildradius deduziert.

Für einen Stern von der Masse der Sonne ($M \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg) beträgt der Schwarzschildradius

$$r_s(\text{Sonne}) \approx 3\,\text{km}$$

und läge damit weit im Innern der Sonne, deren Radius ja etwa $7 \cdot 10^5$ km beträgt. Die Schwarzschildlösung ist also sicherlich für $r > R_{Sonne}$ erfüllt. In der Tat kann die Gravitation der Sonne noch als sehr "schwach" erachtet werden.

Betrachten wir folgende Tabelle:

Objekt	M (kg)	r_s (km)	R_0 (km)
Atomkern	10^{-26}	10^{-56}	10^{-18}
Kilogramm	1	10^{-30}	10^{-4}
Erde	$6 \cdot 10^{24}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{3}$
Sonne	$2 \cdot 10^{30}$	3	$7 \cdot 10^{5}$
weißer Zwerg	10^{30}	1.5	10^{4}
Neutronenstern	$2 \cdot 10^{30}$	3 $\overset{!}{\Longleftrightarrow}$	10
Galaxis	10^{41}	10^{11}	10^{18}

Nur bei den sehr dichten Neutronensternen kommt der wahre Radius "beträchtlich" nahe an den Schwarzschildradius heran.
Dieser muß dann auch allgemeinrelativistisch behandelt werden (Tolman-Oppenheimer-Volkov-Gleichung, Gravitationskollaps etc.).
Alle andere hier aufgeführte Systeme, auch im Besonderen eine <u>Galaxie</u>, können hinreichend gut durch die Newtonsche Physik beschrieben werden!

1.) Man kann nun, ausgehend von der expliziten Schwarzschildlösung, den Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ explizit berechnen, und stellt fest, daß er in der Tat nicht verschwindet, also in der Tat folgt aus $R_{\mu\nu}=0$ im Außenraum nicht notwendigerweise, daß $R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$, i.e. der Raum ist nicht flach.

Man findet (vgl. Sexl / Urbantke – Gravitation und Kosmologie, S. 257, Kap. 8):

$$R_{0101} = \frac{2m}{r^3} = -R_{2323} \;;\quad R_{1212} = \frac{m}{r^3} = -R_{0202} \;;\quad m = \frac{GM}{c^2}$$

(und alle anderen nicht verschwindenden Komponenten durch die entsprechenden Symmetriebeziehungen).

Gemäß unseren Überlegungen zur anschaulichen Interpretation des Krümmungstensors bedeutet der gekrümmte Raum gerade die Existenz von <u>Gezeitenkräften</u> (vgl. geodätische Abweichung):

$$\Delta F^i \equiv m_{P.T.} \frac{d^2}{d\tau^2}(\delta x^i)\Big|_{L.I.S.} \cong m_{P.T.}\, c^2 \sum_{k=1}^{3} R^i{}_{0k0}\, \delta x^k \cong m_{P.T.}\, c^2 R^1{}_{010}\, \delta r$$

$$= \frac{2GM\cdot m_{P.T.}}{r^3}\,\delta r \Rightarrow \left|\frac{\partial F_{Grav}}{\partial r}\right| \delta r \qquad F_{Grav} = \frac{GMm}{r^2}$$

2.) Aber: Man kann zeigen, daß das Auftreten der Gezeitenkräfte erst für Dimensionen $n \geq 4$ auftritt.

(Aber $\underline{R}$, der Krümmungsskalar, also die eigentliche Krümmung ist dann 0 im Aussenraum)

Für $n=3$ – Dimensionen folgt aus $R_{\mu\nu}=0 \overset{n=3}{\Longleftrightarrow} R_{\mu\nu\alpha\beta} = \underline{\underline{0}}$.

(vgl. Adler, Kap. 7.6, p. 229)

$R_{\mu\nu\alpha\beta}$ besitzt $c_3 = 6$ unabhängige Komponenten, genausoviel wie $R_{\mu\nu}$ in 3-Dimensionen, sodaß gemäß $R_{ik} = g^{lm} R_{milk}$ sich diese 6 Komponenten als direkte Lineartransformationen ergeben und daher wenn $R_{ik}=0$, dann bis auch die 6 unabh. Komponenten des R_{milk} alle 0 sein müssen. Wie erwartet funkt. die AR nur in 4, nicht aber in 3 Dimensionen.

3.) Für $r < r_s$ (?) dreht sich die Bedeutung von $t \leftrightarrow r$ um, da g_{rr} negativ und g_{00} auch negativ werden → Kruskal Koordinaten, nichtstat. Innenraumlösung, Gravitationskollaps.

4) Isotrope Koordinaten

isotrope "Räumliche" Koordinaten

Ziel: $$ds^2 \equiv A(\rho)\,dt^2 - B(\rho)\,\underbrace{d\vec{\sigma}^2}_{(d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2))}$$

Dies ist eine andere, für manche Zwecke geeignetere Darstellung des Linienelements, die es alle drei Raumrichtungen gleich behandelt – $B(\rho)$ steht ja vor dem gesamten räumlichen Linienelement.

Also

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)(c^2dt^2) - \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

$$\overset{r(\rho)\ !}{=} \left(1-\frac{2m}{r(\rho)}\right)(c^2dt^2) - \lambda^2(\rho)\, d\vec{\sigma}^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} r^2 &= \lambda^2(\rho)\,\rho^2 \\ \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} &= \lambda^2(\rho)\,d\rho^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pm\frac{dr}{\sqrt{r^2-2mr}} = \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \pm \ln\left[(r^2-2mr)^{\frac{1}{2}} + (r-m)\right] = \ln\rho + \text{const}$$

Für große $r \to \infty$ soll r in ρ übergehen, i.e.

$$\pm\ln(2r) = \ln\rho + \text{const} \Rightarrow \boxed{\ln 2r \overset{!}{=} \ln\rho + \ln 2} \text{ im Asymptotische}$$

Für $r<2m$ ist ρ gar nicht definiert?! – da heißt's beachten, daß man von außen nie unterhalb des Schwarzschildradius gelangen kann?! (siehe Rückseite)

$$\Rightarrow \boxed{2\rho = \sqrt{r^2-2mr} + (r-m)} \text{ ist die gesuchte Koordinaten-Trafo.}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = \rho\left(1+\frac{2m}{\rho}\right)^2} \Rightarrow \lambda = \frac{r}{\rho} = \left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right) = \frac{(1-m/2\rho)^2}{(1+m/2\rho)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = \frac{\left(1-\frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2}c^2dt^2 - \left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^4 d\vec{\sigma}^2}$$

nur für "äußeren" $r > r_S$ – <u>isotrope</u> Form der SSL

für $\rho = \frac{m}{2} = r_S$ wird g_{00} in dieser Darstellung 0. – diese Grenze wird von außen nie erreicht (siehe Rückseite)

<u>Aber</u> (!): Es tritt <u>keine</u> Singularität auf.

Die vorherige Darstellung war also irreführend, da Singularität dort auf spez. Wahl der Koordinaten und nicht auf Geometrie des Raums zurückzuführen ist.

Die Schwarzschildlösung mit kosmologischem Term

Von unserer Intuition sind wir davon ausgegangen, daß nur reale Materie gravitiert und damit, falls keine Materie vorhanden ist, i.e. $T^{\mu\nu}=0$ über den gesamten Raumbereich, soll der Raum flach sein. Man könnte aber die EG-Gleichungen auch verallgemeinern zu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \overset{\swarrow \text{Konstante}}{\Lambda} g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \Leftrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \mp \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$= \frac{8\pi G}{c^2}\left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} g_{\mu\nu}\right),$$

wobei $\Lambda g_{\mu\nu}$ den sog. kosmologischen Term bedeutet.

Dieser ist in der Tat von gewisser Bedeutung in kosmologischen (Welt-)Bildern, insbesondere zur Konstruktion von <u>stationären</u> Lösungen. Er wurde diesbezüglich zuerst von Einstein eingeführt. Seinen mikroskop. Ursprung motiviert man quantenfeldtheoretisch durch konstante Vakuumenergie des uns allumgebenden Vakuums (Bedenke: Energie kann nicht absolut gemessen werden, sondern nur als Differenz zum Vakuumwert)

(Der Term $\Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}_{\text{Vakuum}}$ motiviert sich aus der Invarianz des Vakuums unter Lorentztransformationen; $\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ entspricht der Vakuumenergiedichte).

Wir betrachten ihn an dieser Stelle als einen rein phänomenologischen Term, dessen Ursprung nicht weiter diskutiert werden soll. Wir wollen aber nun im Folgenden die Konsequenzen dieses Terms auf die Schwarzschildlösung im Außenraum eines Sterns diskutieren:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Analog zu Seite (15) erhalten wir erneut die drei Gleichungen

$$G_{00} + \Lambda g_{00} = e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^{\nu}}{r^2} + \Lambda e^{\nu} = 0 \qquad (\bar{1})$$

$$G_{11} + \Lambda g_{11} = -\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{\lambda}}{r^2} - \Lambda e^{\lambda} = 0 \qquad (\bar{2})$$

$$G_{22} + \Lambda g_{22} = -\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}\right) - \Lambda r^2 = 0 \qquad (\bar{3})$$

$$\left. G_{33} + \Lambda g_{33} = (G_{22} + \Lambda g_{22}) \sin^2\theta = 0 \right),$$

die völlig analog zu (1)(2)(3) auf Seite 15 stehen

Betrachtung, daß (3) aus (1) und (2) folgt.

$$-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^\lambda}{r^2} + \Lambda e^\lambda = 0 \qquad (\overline{1}')$$

$$-\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2} - \Lambda e^\lambda = 0 \qquad (\overline{2}')$$

$$\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}\right) + 2\Lambda e^\lambda = 0 \qquad (\overline{3}')$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\cdot(2')\right) = \left(-\nu'' + \frac{1}{r^2} + \lambda'\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r^2}e^\lambda\right) + \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \lambda' e^\lambda\right) = 0 \qquad (\overline{2}')$$

$$\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}\right) + 2\Lambda e^\lambda \overset{(\overline{2}')}{=} (\text{alte Klammer}) + \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \lambda' e^\lambda\right)$$

λ', ν' aus (1; 2)

$$= (\text{alte Klammer}) + \Big(\Lambda e^{2\lambda} + (-2\Lambda)\frac{e^\lambda r}{2}\left(\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{e^\lambda}{r}\right) r\Lambda e^\lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda} + \frac{1}{r}\left(-2\Lambda e^\lambda\right)\Big)$$

$$+ \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \lambda' e^\lambda\right) \qquad + 2\Lambda e^\lambda$$

$$= 0 + \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} - \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} + \cancel{\Lambda e^\lambda} + \Lambda^2 r^2 e^{2\lambda} + \cancel{\Lambda e^\lambda} - \Lambda e^{2\lambda} - \cancel{2\Lambda e^\lambda}$$

$$+ \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \cdot e^\lambda \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{e^\lambda}{r} + \Lambda r e^\lambda\right)\right)$$

$$= \cancel{\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda}} - \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} \underbrace{- \Lambda e^\lambda - \Lambda e^\lambda}_{-2\Lambda e^\lambda \text{ kürzt sich } (3')} + \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} - \cancel{\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda}} \quad + 2\Lambda e^\lambda$$

$$= 0$$

Man kann nun eine analoge Gleichung zu (2') aufstellen:

$$\frac{d}{dr}\left(r\cdot(\bar{2})\right) \overset{(\bar{2})}{\Rightarrow} \quad 0 = \left(-\nu'' + \frac{1}{r^2} + \lambda' \frac{e^{\lambda}}{r} - \frac{1}{r^2} e^{\lambda}\right) + \left(-\Lambda e^{\lambda} - \Lambda r \lambda' e^{\lambda}\right) \quad (\bar{2}')$$

und nach analoger, aber nun etwas längerer Rechnung zeigen, daß aus $(\bar{1})\,(\bar{2})\,(\bar{2}')$ auch die Gültigkeit wieder von $(\bar{3})$ erweist, diese also redundant ist. Wir müssen also nur $(\bar{1})$ und $(\bar{2})$ lösen:

$$\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^{\lambda}}{r^2} + \Lambda e^{\lambda} = 0 \quad (4)$$

$$-\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{\lambda}}{r^2} - \Lambda e^{\lambda} = 0 \quad (5)$$

Addition beider Gleichungen liefert wieder:

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(r) + \lambda(r) = \text{const} \equiv \ln k$$

Die Asymptotik $\nu(\infty) = \lambda(\infty) = 0$ können wir nun aber nicht fordern, da wir nicht erwarten können, daß der Raum auf Grund der allgegenwärtigen Vakuumenergiedichte flach bleibt.

$$\lambda(r) = \ln k - \nu(r) \quad ; \quad e^{\lambda} = k\cdot e^{-\nu}$$

Multiplizieren wir Gleichung (4) nun mit $e^{-\lambda}$, können wir diese sofort integrieren, denn

$$e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r e^{-\lambda}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 0$$

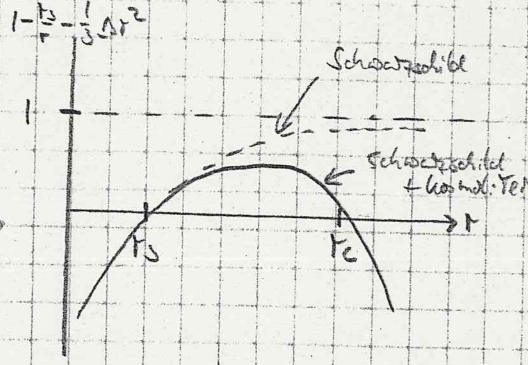
$$\Rightarrow \quad r e^{-\lambda} - r + \frac{1}{3}\Lambda r^3 = \text{const} \equiv -r_S\,,$$

wobei wir erneut die Integrationskonstante in Analogie zu $(r e^{-\lambda} - r) \equiv -r_S$ als Schwarzschild-radius einführen und interpretieren dürfen.

Da die Konstante k nur als Vorfaktor in die metrische Komponente $g_{00} = e^{\nu} = \underline{k}\cdot e^{-\lambda}$ eingeht, können wir sie durch eine elementare Umdefinition der Zeitkoordinate t in $k^{\frac{1}{2}} t = t'$ ohne weiteres zu 1 machen. Das neue Linienelement lautet somit:

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) c^2 dt'^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)}$$

Bis auf den Term $-\frac{1}{3}\Lambda r^2$ ist dies genau die Schwarzschildlösung.
Im Unterschied zu dieser gibt es jedoch neben $r \approx r_s$ (falls Λ klein) eine zweite Koordinatensingularität, und zwar bei



$$r_c \approx \sqrt{\frac{3}{\Lambda}},$$

wenn wir für große r den Term $\frac{r_s}{r}$ vernachlässigen können.
~~Wenn also $\Lambda^{-1/2} \gg r_s$ ist.~~

Aus der Tatsache, daß die Schwarzschildmetrik die Planetenbewegung gut beschreibt, können wir schließen, daß r_c sehr viel größer als die Ausdehnung unseres Sonnensystems sein muß,

$$r_c \gg 10^{10}\,\text{km}.$$

Aus der Beobachtung, daß in der Relativbewegung der Galaxien in Galaxienhaufen **kein** Einfluß des kosmologischen Terms sichtbar ist, erhält man sogar die Abschätzung (Misner, Thorne, Wheeler, Gravitation, S. 411)

$$r_c \gg 10^{23}\,\text{km}.$$

Dies entspricht ungefähr der Ausdehnung des sichtbaren Universums.

Wiederholung (2): Deduktion der Einstein-Gleichungen

Newtonscher Grenzfall: $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\phi(\vec{r})$, $\Gamma^{i}_{00}(\vec{r}) \approx \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$, $g_{00}(\vec{r}) = 1 + h_{00}(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2}{c^2}\phi(\vec{r})$

Massendichte ≅ Energiedichte

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 g_{00}(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}(\vec{r})$$

Forderung:

(1) rechte Seite $\sim \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$, dim $[\text{Länge}]^{(-2)}$

(2) linke Seite muß Tensor 2.-ter Stufe sein, i.e. $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$, keine neue Naturkonstante

(3) Newtonscher Grenzfall soll gültig sein

(4) Komp. materiefreier Raum ⇒ enthält als Lösung freien, i.e. flachen Raum

(5) Die 2-te Ableitung (mehr kann nicht vorkommen aus Dimensionsüberlegung) sollte linear vorkommen, i.e. Feldgleichungen quasi-linear (soll. nicht linear in 1.-te Ableitung)

- Einzig zur Verfügung stehende Tensoren: $R_{\mu\nu}$, R, $g_{\mu\nu}$ ← dimensionslos
- $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ da dies für $T_{\mu\nu}$ gilt
- $T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$, i.e. Erhaltung von Energie/Impuls $\Rightarrow G^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$
- Ansatz: $G_{\mu\nu} = a R_{\mu\nu} + b \cdot R \cdot g_{\mu\nu}$ $\xrightarrow{\text{mit}}$ $G^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$ und Bianchi-Identität

sym. Riccitensor

$$\boxed{G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right) \overset{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Forderung (5) ok, siehe Weinberg-Form von $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ und damit $R_{\mu\nu}$ ✓

Forderung (4) o.k., da falls $T_{\mu\nu} = 0 \;\forall P$ ist $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \;\forall P$ Lösung, i.e. flacher Raum

1-te Lösung, da dann aus $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$ und Gleichung erfüllt

(Schluß gilt aber nicht umgekehrt) ✓

Fortfahren mit Seite (5) ...