Mathematik Qualifikationsphase II **Kurs 94er**
Andreas Zacchi **26. März 2020**

Blatt 1:
Übungsaufgaben und Teilanleitung(en) zur Vektorrechnung

- Ergänzend zu den youtube Videos (link weiter unten) -

Das hier vorliegende Arbeitsblatt ist bedingt durch den Corona Virus in Eigen- oder in Gruppenarbeit ohne mathematisch-fachliche Begleitung[1] zu bearbeiten. Bei manchen Aufgaben finden sich vollständige Lösungswege, bei anderen nur das Endergebnis und bei anderen gar keine Lösung. Bei den Aufgaben, bei denen sich in diesem Dokument keine Lösungen befinden, finden sich diese ausführlich, jedoch handschriftlich, in einer anderen Datei, die sich ebenfalls auf der homepage[2] befindet.
Ergänzend zu den Aufgaben, die auch wiederholenden Charakter haben, kann man sich selbstverständlich auch die dazugehörigen Videos anschauen:
In diesem Video zeige ich euch, wie man nunmehr aus drei Punkten eine Ebene konstruiert[3].

`https://www.youtube.com/channel/UCljrU4f2R1daRR1WlSJFFOQ`

Aufgaben zu den Ebenen befinden sich in Teil 1b dieses Blattes. Da kommt noch mehr die nächsten Tage...

Nun Schluss mit der *lyrischen Prosa* und auf zu den Aufgaben, ...

1. **Längen und Abstände**
Bestimme denjenigen Punkt A auf

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

welcher von P(5/1/0) und Q(6/3/7) die gleiche Entfernung hat.

Lösung:
Der gesuchte Punkt auf der Geraden g soll jeweil von P und Q gleich weit entfernt sein, wobei P und Q **nicht** auf der Geraden g liegen sollen. Daher gilt

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{QA}|.$$

Die Gerade g wird als *allgemeiner Punkt* A(2+2k/1+k/3+2k) geschrieben. Man berechnet dann je die Beträge, sprich: die Längen

$$|\overrightarrow{PA}| = \vec{A} - \vec{P} = \left| \begin{pmatrix} -3+2k \\ k \\ 3+2k \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3+2k)^2 + (k)^2 + (3+2k)^2}$$

und das gleiche für

$$|\overrightarrow{QA}| = \vec{A} - \vec{Q} = \left| \begin{pmatrix} -4+2k \\ k-2 \\ -4+2k \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4+2k)^2 + (k-2)^2 + (-4+2k)^2}$$

[1] Ich hätte auch Mathe-Lehrer sagen können.
[2] `https://itp.uni-frankfurt.de/~zacchi/index_2`
[3] Damit hätten wir weitergemacht, wenn nicht...Corona...

Die beiden Ausdrücke werden gleichgesetzt

$$\sqrt{(-3+2k)^2+(k)^2+(3+2k)^2} = \sqrt{(-4+2k)^2+(k-2)^2+(-4+2k)^2}$$

Die Gleichung wird quadriert, um die Wurzeln zu beseitigen. Nach dem Auflösen der Klammern (Binomische Formeln!!) wird zusammengefasst. Es ist

$$18 = 36k \Longrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$k = \frac{1}{2}$ setzt man in den *allgemeinen Punkt* A(2+2k/1+k/3+2k) ein. Es ergibt sich A(3/1.5/4).

---

2. Verschiedene Aufgaben

1.) Bestimme denjenigen Punkt M auf

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

welcher von A(2/-2/1) und C(-1/4/-1) die gleiche Entfernung hat.

Lösung: $t = \frac{41}{40}$ und $M(\frac{21}{20}/\frac{39}{20}/\frac{81}{40})$.

2.) Bestimme diejenigen Punkte P_1 und P_2 auf

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

die von A(3/1/4) die Entfernung 3 LE haben.

Lösung: $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$ nach dem Lösungsschema der obigen Aufgaben. Damit sind die Punkte $P_1 = (1/0/2)$ und $P_2 = (5/2/6)$.
Der Punkt A liegt allerdings auf der Geraden, somit würde es auch einen leichteren Rechenweg geben: Man kann A als Stützvektor nehmen, dann $\vec{A} \pm \overrightarrow{AP_1}$ und $\vec{A} \pm \overrightarrow{AP_2}$, wobei die Länge von $|\overrightarrow{AP_{1,2}}|$ 3 LE sein muss.

3.) Gegeben sind die Punkte A(4/2/3), B(1/8/5) und C(-2/1/-3).
(a) Bestimme einen Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
(b) Bestimme einen Punkt E so, dass das Viereck ABEC ein Parallelogramm ist.
(c) Bestimme einen Punkt F so, dass das Viereck AFBC ein Parallelogramm ist.
Lösung (a): D(1/-5/-5) (b): E(-5/7/-1) (c): F(7/9/11)

---

3. Arbeit

Robin Wurst, der bekannte Held aus dem Sherwurst Forest, übt eine konstante Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad [\text{N}]$$

aus, um einen Gegenstand von A (5/1/0) nach B (1/5/2) (Angaben in Metern) zu verschieben. Diese Strecke bzw. Verschiebung nennt man $\vec{s}$.

(a) Welche Arbeit wird durch Robin verrichtet? Arbeit ist gleich Kraft mal Weg, also $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$?

(b) Wie groß ist der Winkel zwischen Kraft- und Verschiebungsvektor?

(c) Wie muss die z-Komponente der Kraft

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ F_z \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad [\text{N}]$$

gewählt werden, so dass $\vec{F}$ senkrecht auf dem Verschiebungsvektor von A nach B steht. Welche Arbeit wird dann verrichtet?

---

4. **Skalarprodukt**
Zeige, dass unabhängig von der Wahl von p und q die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$$

zueinander senkrecht, also im rechten Winkel zueinander, stehen[4].

---

5. **Kreuzprodukt**
Berechne das Kreuzprodukt (siehe Formel weiter unten) $\vec{a} \times \vec{b}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Überprüfe, ob die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander senkrecht stehen. Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, schätze diesen zunächst ab[5]?

---

6. **Fläche eines Parallelogrammes**
Wie muss a_z gewählt werden, so dass die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes $\sqrt{465}$ FE ergibt? Hier ist es vorteilhaft zu wissen, dass der Betrag des Vektores $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ der Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes entspricht.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfe, ob die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander senkrecht stehen. Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren?

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Linearkombinationen:

Linear*kombinationen* sind nichts anderes, als dass man einen Punkt, der über einen Vektor $\vec{b}$ erreicht wird, auch über (ggf. auch mehr als zwei) andere Vektoren $\vec{a}_{1,2}$ erreichen

[4] Hinweis: Binomische Formeln...
[5] Dies wird zu gegebener Zeit dann im Unterricht besprochen, oder ersatzweise in einem Video diskutiert.

kann, wenn man diese entsprechend *kombiniert*.

Ein Beispiel:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} 5 = 3k - 2m \\ 9 = k + 3m \end{array} \right| \tag{2}$$

wobei k und m die entsprechenden Parameter (die Größen, die sozusagen die Länge der Vektoren bestimmen.) der Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind. Wenn man das Gleichungssystem (2) löst, so erhält man $k = 3$ und $m = 2$. Das bedeutet, dass man $\vec{b}$ als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen kann. Also

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Allgemein bezeichnet man zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ als **linear abhängig**, wenn man nichtverschwindende Zahlen α und β finden kann, für die gilt:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \tag{4}$$

Kollineare Vektoren (also *Vielfache* voneinander) sind linear abhängig, denn beispielsweise $\alpha = -\beta$. In diesem Fall zeigen die Vektoren in die entgegengesetzte Richtung.

Vektoren heissen **linear unabhängig**, wenn der Nullvektor nur rauskommt für alle Parameter gleich Null. M.a.W.: Lässt sich der Nullvektor als Ergebnis einer Linearkombination nur dann erzeugen, wenn alle Parameter $\mu_i = 0$ oder $\lambda_i = 0$ sind, dann nennt man die an der Linearkombination beteiligten Vektoren linear unabhängig. Ist dies auch durch andere Lösungen (mindestens ein $\lambda_i \neq 0$) möglich, so nennt man die Vektoren linear abhängig.

***7.* Lineare Abhängigkeit**

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Überprüfe die drei Vektoren auf lineare Abhängigkeit.

***8.* Lineare Abhängigkeit II**

Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Überprüfe die drei Vektoren auf lineare Abhängigkeit.

9. **Lineare Abhängigkeit III**
Gegeben sind die drei Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfe die drei Vektoren auf lineare Abhängigkeit. Kann man

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

als Linearkombination der drei Vektoren darstellen?

Blatt 1b:
Übungsaufgaben zu Ebenen

Erinnert man sich, dass man bei Geraden ja nur einen Stützvektor und Richtungsvektor benötigt, kann man Ebenen darstellen über einen Stützvektor sowie zwei Richtungsvektoren. Dies nennt man **Parameterform** der Ebene. Man findet nun einen Normalenvektor, welcher senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren, und somit senkrecht auf der Ebene steht. Diesen Normalenvektor $\vec{n}$ kann man beispielsweise über das Kreuzprodukt berechnen. Man erhält so dann die sog. **Normalenform** der Ebene. Multipliziert man diese aus, erhält man die **Koordinatenform** der Ebene.
Beispiel:
Mit den Punkten

$$A(2/2/1), \quad B(4/1/0) \qquad \text{und} \qquad C(0/4/1)$$

bestimmt man die **Parameterform** der Ebene zu

$$\epsilon : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} + m \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}}$$

Mit dem Kreuzprodukt bestimmt man den Normalenvektor. Dieser steht senkrecht auf der Ebene ϵ, denn $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Die **Normalenform** der Ebene ist

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{s}) = 0 \tag{6}$$

und in unserem Beispiel demnach

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Ausmultiplizieren und sortieren der Terme gibt die Koordinatenform $2x + 2y + 2z = 10$. Siehe youtube link weiter oben im Dokument.

10. **Ebenengleichungen**

Gegeben sind die Punkte

$$A(2/3/2) \quad B(3/1/4) \quad C(0/2/11) \quad D(-1/5/7) \quad E(6/-1/5)$$

Berechne die jeweilie Ebene in Parameter- Normalen- und Koordinatenform. Die Ebene enthält die Punkte
(a) A, B und C (b) A, B und D (c) A, B, und E (d) A, C und B
(e) C, D und E (f) A, C und E (g) Liegt der Punkte E in der Ebene ACD?

Ich komme wieder!