Mathematik Qualifikationsphase II
Andreas Zacchi

Kurs 94er
17. April 2020

Blatt 3.1:
Vektorrechnung: Was sollte man bis jetzt können...

- Ergänzend zu den youtube Videos (link weiter unten) -

Das hier vorliegende Arbeitsblatt ist bedingt durch den Corona Virus in Eigen- oder in Gruppenarbeit ohne mathematisch-fachliche Begleitung[1] zu bearbeiten. In diesem Blatt geht es wiederholend um Punkte, Geraden und Ebenen sowie deren Beziehungen zueinander. Auch werden Abstandsberechnungen Teil der Aufgaben sein.
Vorab habe ich mir erlaubt, dass eine oder andere Wichtige bzw. Informative zu Vektoren auch nochmal schriftlich festzuhalten[2]. Ergänzend, wie schon bei den beiden Blättern davor, zu den Videos:

`https://www.youtube.com/channel/UCljrU4f2R1daRR1WlSJFFOQ`

... sind weiter unten die Aufgaben. Lösungen folgen wie gewohnt handschriftlich.
Was man bis zu diesem Zeitpunkt (nach Ostern) beherrschen sollte ist

1. Geradengleichungen aufstellen (noch aus dem Unterricht)
2. Lagebeziehung von Geraden und Abstände von Geraden (noch aus dem Unterricht, siehe auch die Videos)
3. Ebenengleichung aufstellen (siehe Video und Anleitung weiter unten im Text)
4. Lagebeziehung von Punkt, Gerade und Ebene zu- und untereinander (siehe Videos)
5. Abstandsbestimmungen zwischen Punkt und Ebene sowie Gerade und Ebene (Videos)
6. ...also die Aufgaben der ersten beiden Blätter sollte man sich schon angeschaut und auch gerechnet haben!
7. Abstand windschiefer Geraden ist eher was für den LK, sollte man aber auch als GK'ler mal gesehen haben (Video)
8. Die Bestimmung einer Schnittgeraden zwischen zwei Ebenen ist auch schon etwas fortgeschrittener (Video), aber nicht nur für den LK bestimmt...
9. Wichtiger als Videos o.ä. ist aber wiederholen, wiederholen und wenn man wiederholt hat, nochmal wiederholen. Denn: Es gibt keine Abkürzungen!

---

[1] Ich hätte zum dritten mal Mathe-Lehrer sagen können.
[2] Wer das schon kann oder es nicht von weiterem Interesse ist → Überspringen. Es sind viele zusätzliche, nicht für die Q-Phase zwingend notwendige Informationen dabei. LK-ler sollten es abern zumindest mal durchlesen ;-)

Blatt 3.2:
Vektorrechnung: Informatives zu Vektoren

Vektoren

Physikalische Größen sind durch die Angabe von zwei Größen bestimmt. Zum einen die Maßeinheit (teilweise auch Dimension genannt) und die Maßzahl an sich. Zum Beispiel die Temperatur. Gerade sind es 15°C oder es ist gerade 15:40 Uhr. Solche Größen nennt man **Skalare**.
Allerdings gibt es auch Größen, welche zusaätzlich die Angabe einer Richtung erfordern, z.B. die Geschwindigkeit mit der man sich bewegt. Es macht ja einen Unterschied ob man nach Norden oder Süden fährt. Solche größen nennt man **Vektoren**. Dies ist natürlich verallgemeinerbar: Es gibt Größen, die durch die Angabe von zwei, drei, vier etc. Richtungen definiert sind[3].

Allgemein schreibt sich ein Vektor in drei Dimensionen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Rechnen mit Vektoren

Ein Vektor kann man durch zwei Größen charaktierisieren: Durch seine Richtung sowie durch seinen Betrag. Den Betrag kann man über einen *erweiterten* Satz des Pythagoras bestimmen. Es ist

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{2}$$

Addition und Subtraktion von Vektoren

In der Koordinatenschreibweise werden Vektoren durch Zahlenpaare in der Ebene bzw. durch Zahlentripel räumlich dargestellt, die i.d.R. untereinander (als Spaltenvektoren) geschrieben werden. Man kann Vektoren addieren und subtrahieren, wenn Vektoren die gleich Anzahl an Komponenten x_i haben. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix} \tag{3}$$

Skalarprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi, \tag{4}$$

wobei ϕ der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Das Skalarprodukt ist kommutativ[4]. Die graphische Veranschaulichung besagt, dass das Skalarprodukt das Produkt aus der Länge des zweiten Vektors und der Projektion des ersten Vektors in Richtung des zweiten Vektors ist. Aufgrund der Kommutativität des Skalarprodukts kann man auch umgekehrt den zweiten Vektor auf den ersten projizieren und dann mit der Länge des ersten Vektors multiplizieren.

Beim Skalarprodukt handelt sich um die Multiplikation von Vektoren. Man multipliziert die einzelnen Komponenten der Vektoren miteinander und addiert diese dann.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \cdots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \tag{5}$$

Als Ergebnis erhält man eine reelle Zahl. Das Skalarprodukt kann ebenfalls nur dann berechnet werden, wenn die Vektoren in der Anzahl ihrer Komponenten bereinstimmen.

[3]Dies sind dann Tensoren. Ein Skalar ist ein Tensor nullter Stufe und ein Vektor ist ein Tensor erster Stufe.
[4]Der Winkel ändert sich ja auch nicht.

Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, also $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
Eine Anwendung des Skalarproduktes ist z.B. die Berechnung der (physikalischen) Arbeit:

Arbeit = Kraftkomponente in Wegrichtung mal zurückgelegtem Weg

Kreuzprodukt von Vektoren

Das Kreuz- oder auch Vektorprodukt ordnet zwei Vektoren einen dritten Vektor zu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \tag{6}$$

Der resultierende Vektor $\vec{c}$ hat die Eigenschaft, dass er sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht. Das Kreuzprodukt berehnet sich

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Es gilt, dass

$$\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\phi \tag{7}$$

Der Betrag von $\vec{c}$ entspricht der Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes.
Die Orientierung des Vektors $\vec{c}$ ergibt sich daraus, dass man den ersten Vektor $\vec{a}$ auf kürzestem Weg in-den zweiten Vektor $\vec{b}$ dreht. Die Orientierung von $\vec{c}$ stimmt dabei mit dem Drehsinn einer Rechtsschraube überein. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge also ein rechtshändiges System. Das Kreuzprodukt besitzt allerdings weniger eine Richtung als vielmehr einen Drehsinn. Das Kreuzprodukt ist nicht kommutativ, denn es gilt $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Linearkombinationen

Linearkombinationen sind nichts anderes, als dass man einen Punkt, der über einen Vektor $\vec{b}$ erreicht wird, auch über (ggf. mehr als zwei) andere Vektoren $\vec{a}_i$ erreichen kann, wenn man diese entsprechend *kombiniert*. Ein Beispiel:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} 5 = 3k - 2m \\ 9 = k + 3m \end{array} \right| \tag{9}$$

wobei k und m die entsprechenden Parameter (die Größen, die sozusagen die Länge der Vektoren bestimmen.) der Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind. Wenn man das Gleichungssystem (9) löst, so erhält man $k = 3$ und $m = 2$. Das bedeutet, dass man $\vec{b}$ als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen kann. Also

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Allgemein bezeichnet man zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ als linear abhängig, wenn man nichtverschwindende Zahlen α und β finden kann, für die gilt:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \tag{11}$$

Kollineare Vektoren sind linear abhängig, denn beispielsweise $\alpha = -\beta$.
Vektoren heissen linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur rauskommt für alle Parameter gleich Null. M.a.W.: Lässt sich der Nullvektor als Ergebnis einer Linearkombination nur dann erzeugen, wenn alle Parameter $\mu_i = 0$ oder $\lambda_i = 0$ sind, dann nennt man die an der Linearkombination beteiligten Vektoren linear unabhängig. Ist dies auch durch andere Lsungen (mindestens ein $\lambda_i \neq 0$) mglich, so nennt man die Vektoren

linear abhängig.

Ebenen
Ebenen dienen an dieser Stelle gut als Rechenübungswiederholung des bisher behandelten Stoffes. Erinnert man sich, dass man bei Geraden ja nur einen Stützvektor und Richtungsvektor benötigt, kann man Ebenen darstellen über einen Stützvektor sowie zwei Richtungsvektoren. Dies nennt man **Parameterform** der Ebene. Man findet nun einen Normalenvektor, welcher senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren, und somit senkrecht auf der Ebene steht. Diesen Normalenvektor $\vec{n}$ kann man beispielsweise über das Kreuzprodukt berechnen. Man erhält so dann die sog. **Normalenform** der Ebene, was einem Skalarprodukt entspricht. Multipliziert man diese Normalenform der Ebene aus, erhält man die **Koordinatenform** der Ebene.
Beispiel:
Mit den Punkten

$$A(2/2/1), \quad B(4/1/0) \qquad \text{und} \qquad C(0/4/1)$$

bestimmt man die **Parameterform** der Ebene zu

$$\epsilon : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}} + m \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}}$$

Mit dem Kreuzprodukt bestimmt man den Normalenvektor. Dieser steht senkrecht auf der Ebene ϵ, denn $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Die **Normalenform** der Ebene ist

$$\epsilon : \vec{n}(\vec{x} - \vec{s}) = 0 \tag{12}$$

und in unserem Beispiel demnach

$$\epsilon : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Ausmultiplizieren und sortieren der Terme gibt die Koordinatenform $\epsilon : 2x + 2y + 2z = 10$.

Blatt 3.3: Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

1. **Ebenen**
Bestimme die Gleichung der Ebene (in allen drei Formen), die durch

(a) A(2/2/2), B(4/1/3) und C(8/4/5)
(b) A(1/3/5), B(2/7/3) und C(5/1/3)

verläuft. Sind die Richtungsvektoren Linearkombinationen?

2. **Lage von Ebenen**
Bestimme die Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$ (in allen drei Formen), die durch A$(1/0/\frac{1}{3})$, B$(1/1/\frac{2}{3})$ und C(0/4/1) verläuft. Wie ist die Lagebeziehung von $\mathcal{E}$ zur Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

3. **Ebene, Ebene, Ebene**

(a) Beschreibe die xy-Ebene in allen drei Formen (Also den Boden in unserem Klassenraum sozusagen, wenn in der Ecke hinter dem Waschbecken der Ursprung ist).
(b) Schiebe die xy-Ebene um eine Einheit parallel nach oben $\rightarrow$ alle drei Formen bestimmen.
(c) Bestimme die Gleichung einer Ebene E, die durch A(5/1/0), B(1/5/2) und D(3/-3/4) verläuft. Liegt C(-1/1/6) in der Ebene? Für den Fall, dass C in der Ebene liegt, bestimme die Fläche des Viereckes. Wie sind die Eckwinkel bzw. welche Art Viereck ist ABCD? Skizziere ABCD.
(d) Bestimme eine Parameterform der Ebene E: 2x+y-3z=1
(e) Gegeben ist die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Wie lautet die Koordinatenform der Ebene?

4. **Punkt, Gerade und Ebene**

(a) Gegeben ist die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Koordinatenform der Ebene? Liegt der Punkt P (8/10/13) in der Ebene? Überprüfe dies in allen drei Formen der Ebene. Falls der Punkt nicht in der Ebene liegt, bestimme den Abstand von P zu E.
(b) Bestimme den Abstand, falls es denn einen gibt, vom Punkt P(2/4/-1) zur Ebene E: 2x-y+2z=1.
(c) Bestimme den Abstand, falls es denn einen gibt, vom Punkt P(8/1/1) zur Ebene E: x-4y-4z=0.
(d) Bestimme den Abstand, falls es denn einen gibt, vom Punkt P(9/4/-3) zur Ebene E: x+2y+2z=-3.

(e) Wie ist der Abstand der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zur Ebene E: 3x-18y+15z-24=0? Wenn es keinen gibt, gibt es einen Schnittpunkt?

(f) Wie ist der Abstand der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zur Ebene E: -2x+z=2? Wenn es keinen gibt, gibt es einen Schnittpunkt?

(g) Wie ist der Abstand der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zur Ebene E: 2x+4y+6z=-12? Wenn es keinen gibt, gibt es einen Schnittpunkt?

5. Aufgaben mit Parameter
Bestimme a so, dass

(a)

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

zur Ebene E: x+2y+4z=2 parallel ist.

(b)

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

zur Ebene E: ax+2y-z=7 parallel ist.

6. Schnittgerade
Berechne die Schnittgerade zwischen den Ebenen

(a) $E_1 : x - y + 2z = 7$ und $E_2 : 6x + y - z + 7 = 0$
(b) $E_1 : x + 5z = 8$ und $E_2 : x + y + z = 1$
(c) $E_1 : 4y = 5$ und $E_2 : 6x + 5z = 0$

7. Windschiefe Geraden
Bestimme den Abstand der beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Viel Spaß bei der Bearbeitung!