Lösungen zum Arbeitsblatt

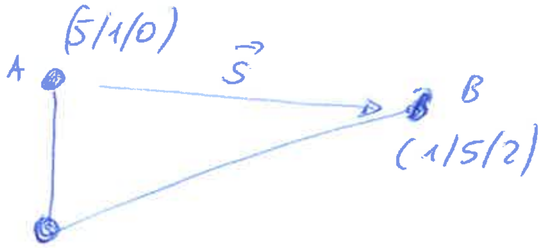
Vektorrechnung

1 siehe Aufgabenblatt

2
- 2.1.
- 2.2.
- 2.3.

siehe Aufgabenblatt

3



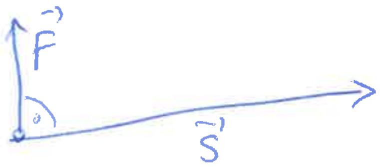
Strecke $\vec{s} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}$

(a) $\vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -20 - 12 + 32 = 0$

Es wird keine Arbeit verrichtet, da die Kraft senkrecht auf der Strecke $\vec{s}$ steht.

(b) Winkel ist demnach 90°



(c) F_2 muß natürlich 16 sein, siehe (a) und (b) ②

$\boxed{4}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix} = 0$$

BINOM!!

$$\underbrace{(p-q)^2 - p^2 + 2pq - q^2}_{} = 0$$

... hier hebt sich alles weg! Ist

$0 = 0$ also unabhängig von p und q.

$\boxed{5}$ ~~$\vec{c} = \vec{a}$~~ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} -30 \\ -24 \\ -6 \end{pmatrix}$$

~~$\vec{a} \cdot \vec{b} \overset{?}{=} 0 \quad \begin{pmatrix} -31 \\ -24 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot ($~~

<u>überprüfen</u>

$$\vec{a} \cdot \vec{c} \overset{?}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -24 \\ -6 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$$-90 + 96 - 6 = 0 \checkmark$$

gleiches für $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ machen

6] $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 - 3a_z \\ -4a_z + 2 \\ -6 + 16 \end{pmatrix} = \vec{c}$ (3)

$|\vec{c}| = \sqrt{465} = \sqrt{(4-3a_z)^2 + (-4a_z+2)^2 + 10^2} \quad |^2$

$465 = 16 - 24a_z + 9a_z^2 + 4 - 16a_z + 16a_z^2 + 100 \quad | -120$

$25a_z^2 - 40a_z = 345 \quad | -345 \; ; \; \cdot \left(\frac{1}{25}\right)$

$a_z^2 - \frac{8}{5}a_z - \frac{69}{5}$ pq-Formel

$\boxed{a_{z_1} = \frac{23}{5}} \quad \boxed{a_{z_2} = -3}$

Lineare Abhängigkeit

7] Kann ich $\vec{c}$ aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ konstruieren

$$\left| \begin{array}{ll} 1 = 4a + 4b & \text{I} \\ 2 = 2a + 5b & \text{II} \\ 3 = -6a + 3b & \text{III} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 4a + 4b = 1 \\ -4a - 10b = -4 \\ -6b = -3 \end{array}$$

(1)

$\boxed{b = \frac{1}{2}}$

$4a = 1 - 2$

$\boxed{a = \frac{-1}{4}}$

$b = \frac{1}{2}$

$a = \frac{-1}{4}$

$3 = +\frac{6}{4} + \frac{3}{2}$ ✓ ⇐ in III einsetzen

III ist erfüllt also Linear abh.

Linear abhängig!

8]

$$1 = 0 + 2\beta \quad \Rightarrow \beta = 1/2$$
$$2 = \alpha + 0 \quad \Rightarrow \alpha = 2$$
$$0 = 4\alpha + 5\beta$$
$$0 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1/2 \quad ↯$$

<u>lin. unabh.</u>

9]

$$2 = a + 0 \leftarrow a = 2$$
$$0 = 2a + 3b \longrightarrow b = -\frac{4}{3}$$
$$1 = 4a + 2b$$

$$1 = 8 - \frac{8}{3} \quad ↯$$ <u>lin. unabh.</u>

10] Blatt 1b Ebenen

A (2/3/2) B (3/1/4) C (0/2/11) (5)

D(-1/5/7) E (6/-1/5)

(a) ABC -Ebene

$$\boxed{E: \vec{x} = \underset{\vec{A}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}} + k\underset{\vec{AB}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}} + m\underset{\vec{AC}}{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}}}$$

Parameterform

$\vec{n}$ über Kreuzprodukt $\vec{n} = \begin{pmatrix} -16 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -16 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{s}) = 0$$

Normalenform

$$-16x + 32 - 13y + 39 - 5z + 10 = 0 \quad |$$

$$\boxed{-16x - 13y - 5z = -81}$$

Koordinatenform

$$16x + 13y + 5z = 81$$

Man muß nicht zwingend A als Stützvektor nehmen, die Parameterform sieht dann etwas anders aus → bei der Koordinatenform muß man allerdings in jedem Fall „landen" (können).

$5\frac{1}{2}$

(b) A B D Ebene

$$E: \vec{x} = \underset{\vec{A}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}} + k \underset{\vec{AB}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}} + m \underset{\vec{AD}}{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Kreuzprodukt für den Normalenvektor $\vec{n}$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \vec{n} = \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

~~Ansatz~~ $\begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

$$-14x - 11y - 4z + 28 + 33 + 8 = 0 \quad | -69$$

$$-14x - 11y - 4z = -69 \quad | \cdot (-1)$$

$$\boxed{14x + 11y + 4z = 69}$$

ABE-Ebene

c)

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}}_{\vec{A}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{AB}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}}_{\vec{AE}}$$

$$\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}\right] = 0 \rightarrow 2x - 4 + 5y - 15 - 4z + 8 = 0$$

$$\boxed{2x + 5y - 4z = 11}$$

(d) ACB-Ebene

ist dieselbe wie bei (a), ggf. sind die ~~Stützvekt~~ Richtungsvektoren „vertauscht"

→ Koordinatenform muß aber $-16x - 13y - 5z = -81$

bzw.

$16x + 13y + 5z = 81$

sein!

(e) (d) CDE-Ebene

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\11\end{pmatrix}}_{\vec{C}} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}}_{\vec{CD}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix}6\\-3\\-6\end{pmatrix}}_{\vec{CE}}$$

$$\begin{pmatrix}-30\\-30\\-15\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\11\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$-30x - 0 - 30y + 60 - 15z + 165 = 0$$

$$-30x - 30y - 15z = -225 \Rightarrow :(-15)$$

$$\boxed{2x + 2y + z = 15}$$

Man kann den Normalenvektor $\begin{pmatrix}-30\\-30\\-15\end{pmatrix}$ auch verkürzen (um sich die Rechnung zu vereinfachen)

$$\begin{pmatrix}-30\\-30\\-15\end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)} \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Die Richtung ist hier wichtig!}}$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\11\end{pmatrix}\right]=0 \Rightarrow 2x+2y+z=15$$

(f) ACE-Ebene

$$\boxed{E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\11\end{pmatrix}}_{\vec{C}} + p\underbrace{\begin{pmatrix}6\\-3\\-6\end{pmatrix}}_{\vec{CE}} + q\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-9\end{pmatrix}}_{\vec{CA}}}$$

mal $\vec{C}$ als Stützvektor genommen... (kann man, muß man nicht, machen...)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}33\\48\\12\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}11\\16\\4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}11\\16\\4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\11\end{pmatrix}\right]=0}$$

$$\boxed{11x+16y+4z=76}$$

(g) Liegt E in ACD (8)

$$\boxed{E: \vec{x} = \underset{\vec{D}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}} + r \underset{\vec{DA}}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}} + s \underset{\vec{DC}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$ $\rightarrow$ PForm

$$\begin{pmatrix} -23 \\ -17 \\ -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right] = 0}$$ $\rightarrow$ NForm

$$\boxed{23x + 17y + 7z = 111}$$ $\rightarrow$ KForm

$E(6/-1/5)$ kann man in ~~d~~ jede der drei Formen der Ebene einsetzen, um die Punktprobe zu machen. Mit der Parameterform

$\rightarrow$ PF

$$\left|\begin{array}{l} 6 = -1 + 3r + s \\ -1 = 5 - 2r - 3s \\ 5 = 7 - 5r + 4s \end{array}\right| \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left|\begin{array}{l} 5 = 3r + s \\ -6 = -2r - 3s \end{array}\right| \cdot 3$$

$$+\left|\begin{array}{l} 15 = 9r + 3s \\ -6 = -2r - 3s \end{array}\right|$$

$$9 = 7r \qquad \boxed{r = 9/7}$$

$$-6 = -\frac{18}{7} - 3s$$

$$-\frac{24}{7} = -3s \Rightarrow \boxed{s = \frac{8}{7}}$$

$r = \frac{9}{7}$

$s = \frac{8}{7}$ in III einsetzen

$$5 = 7 - \frac{45}{7} + \frac{32}{7}$$

$$5 = \frac{49 - 45 + 32}{7} = \frac{36}{7} \quad ↯$$

liegt nicht in der Ebene.

Mit der Normalenform

$$\begin{pmatrix}23\\17\\7\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\5\\7\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\begin{pmatrix}23\\17\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-6\\-2\end{pmatrix}\overset{?}{=}0 \qquad 184-102-14\overset{?}{=}0 \ ↯$$

liegt nicht drauf

Mit der Koordinatenform

$$23\cdot 6+17\cdot(-1)+7\cdot 5\overset{?}{=}111$$

$$138\cancel{4}-17+35\overset{?}{=}111 \ ↯$$

auch nicht!!