① Bestimme die Glg. der Ebene, die durch ①

① A(2/2/2) B(4/1/3), C(8/4/5) verläuft an

② A(1/3/5) B(2/7/3) C(5/1/3) –"–

13/05/13

ⓐ $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 2 & -1 & 1\\ 6 & 2 & 3\end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-5\\0\\10\end{pmatrix} = \vec{n}$ $\quad \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right] = 0$

$-x + 2 + 2z - 4 = 0$

$\boxed{x - 2z = -2}$ Koo. form

ⓑ $\cancel{\boxed{2x + y + 3z = 20}}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 4 & -2\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-8-4\\-8+2\\-2-16\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-12\\-6\\-18\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\right) = \boxed{2x + y + 3z = 20}$ Koo. form

Die $\vec{RV}$ sind ~~fr~~ Linearkombinationen!

S.212

2 A (1/0/1/3)
B (1/1/ 2/3)
C (0/4/1)

~~zu~~

„alternative" Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 12 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{matrix} 6-12 \\ -3 \\ 9 \end{matrix}$ $\quad \hat{n} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$\vec{n} \cdot [\vec{x} - \vec{s}] \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right] = 0$

$-6x - 3y + 9z - (-6 + 9/3) = 0$

$E \quad \boxed{2x + y - 3z = 1}$ SAME!

E und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

sind identisch!!

Gleichsetzen

Vektorielle Darstellung ~~für~~ von Ebenen

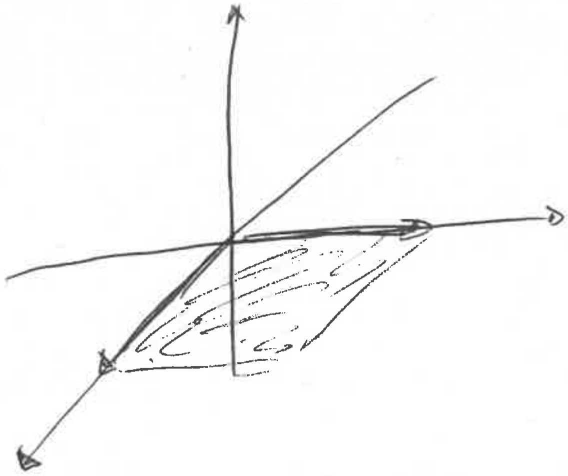
②

③

06/05/13

③

(a) Beschreibe x-y-Ebene

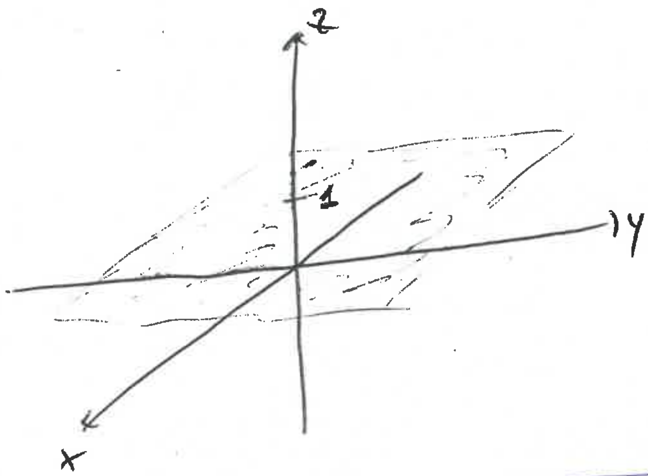


$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parameterform

Koo.form $z=0$

(b) schiebe Ebene um eine Einheit nach oben

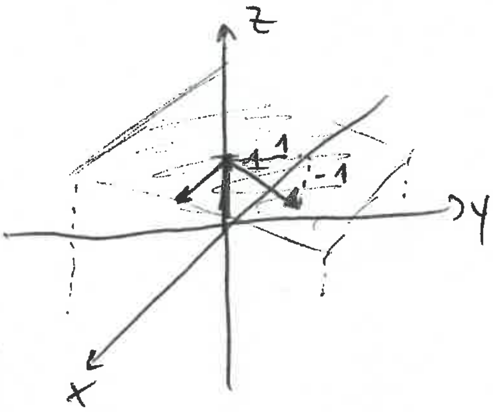


$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koo.form $z=1$

OPTIONAL

neige Ebene Richtung ~~z~~ pos y-Achse



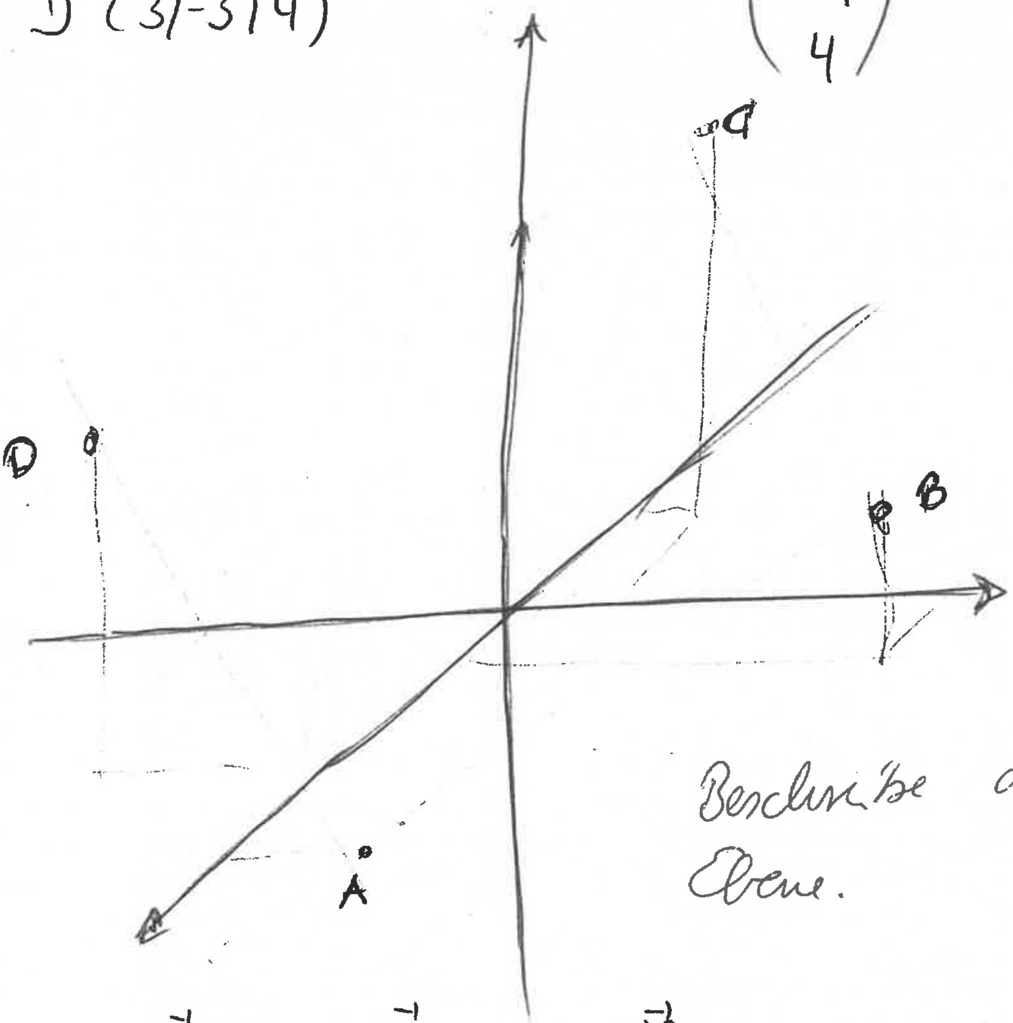
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nicht a.d. Blatt!!

3c) A(5|1|0)
B (1|5|2)
C (-1|1|6)
D (3|-3|4)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Beschreibe diese Ebene.

$$\vec{X}_E = \overset{\vec{a}}{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + k \overset{\vec{AB}}{\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}} + m \overset{\vec{AD}}{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Parameterform

liegt C in Ebene!

$$-1 = 5 - 4k - 2m \rightarrow \quad -6 = -4k - 2m \qquad m = 1$$
$$1 = 1 + 4k - 4m \qquad\quad 0 = 4k - 4m \qquad k = 1$$
$$6 = 0 + 2k + 4m \leftarrow \text{hier ebenfalls erfüllt}$$

(~~aus Klausur~~) 5

3c A $(5/1/0)$

B $(1/5/2)$

C $(-1/1/6)$

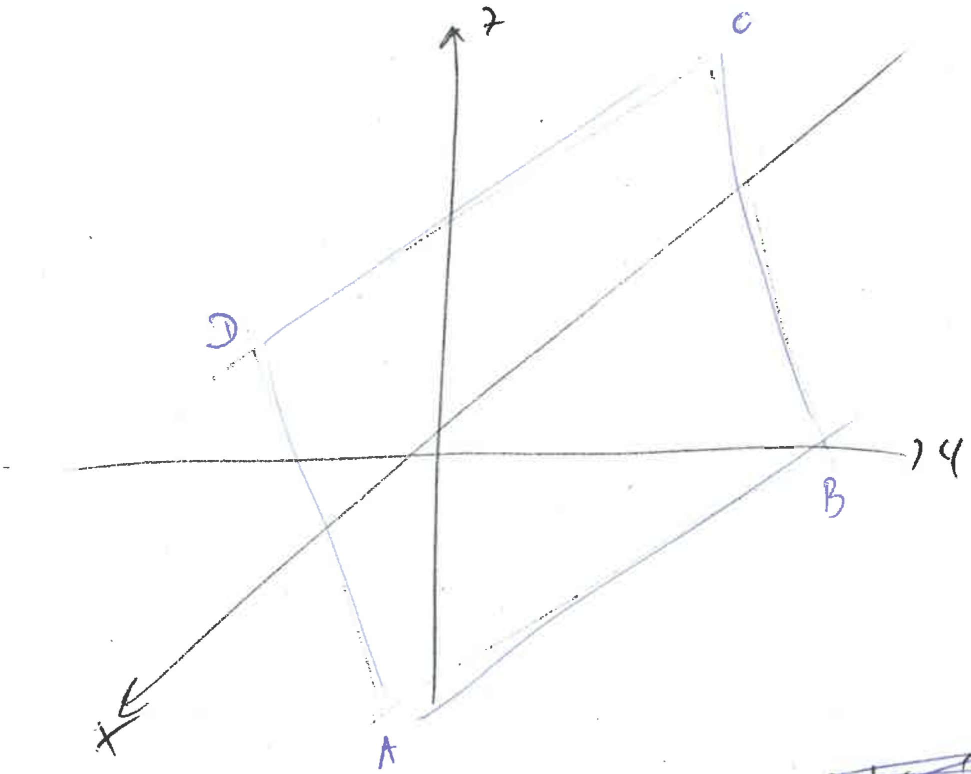
D $(3/-3/4)$

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ ⊾

$\vec{AB} \times \vec{BC} =$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \vec{c} = \begin{matrix} 16+8 \\ -4+16 \\ 16+8 \end{matrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Betrag von $\vec{c} = \sqrt{1296} = \underline{\underline{36 \text{ FE}}}$



Quadrat!

~~Oder RS~~

3d) Hier gibt es sehr viele Lösungen!

Man bestimmt sich drei Punkte, die die Ebenengleichung erfüllen

$$2x + y - 3z = 1$$

z. B. $x = 1$

$y = 2$

$z =$ ausrechnen $\quad 2 \cdot 1 + 2 - 3z = 1$

$-3z = -3$

$z = 1$

$z = 1$

$A\,(1/2/1)$

Dann noch zwei andere Punkte, daraus dann die Parameterform

Welche Punkte = euch überlassen!

3e) $4x + y + z = 3$

Lagebeziehungen & Abstandsbestg.

1 (7)

(4a)

1) Ebene ↔ Punkt

Pt. liegt in Ebene wenn Gleichg. der Ebene f. den Punkt erfüllt ist.

$$\boxed{E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = \boxed{5x - 4y = 0}$$

Der Punkt (8/10/13) ?

Parameterform

$8 = 4\alpha$

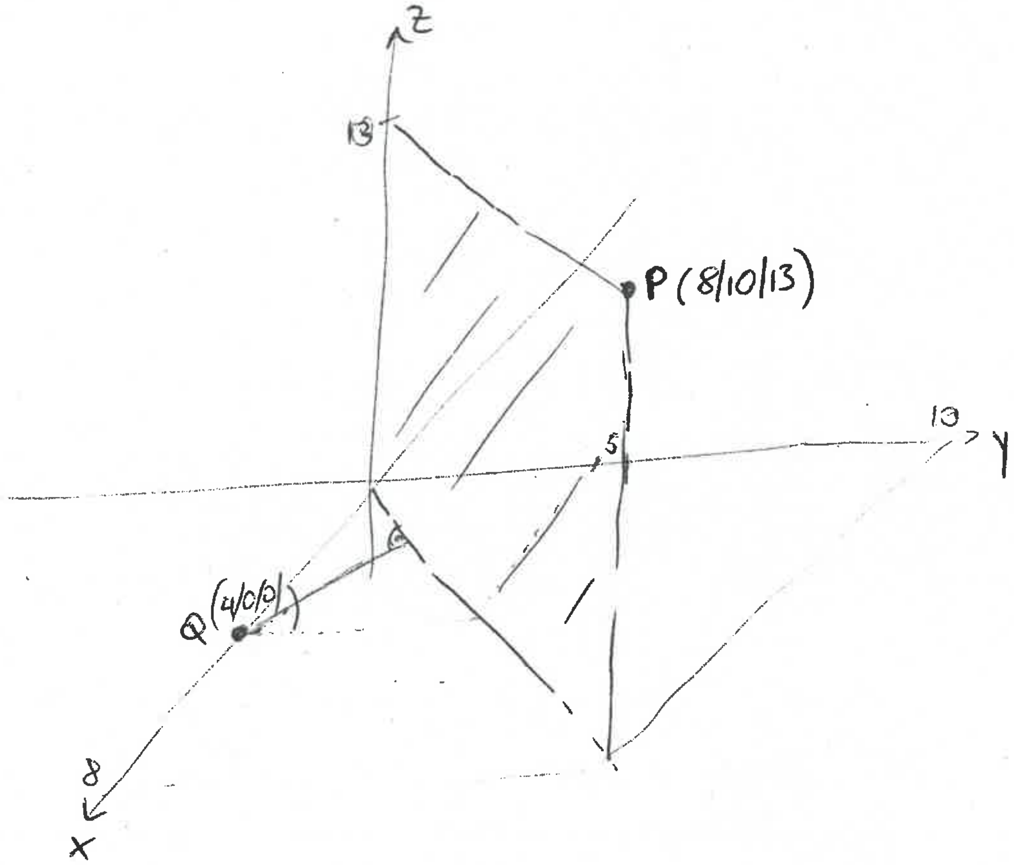
$10 = 5\alpha$ geht auf

$13 = \beta$

hier auch

$5 \cdot (8) - 4 \cdot (10) \overset{?}{=} 0$

jap !



if P ∈ Ebene :

Dann braucht man auch keinen Abstand bestimmen

Aufg: Abst. Ebene ↦ Punkt

S. 61 (8)

(46) $P(2|4|-1)$ und $2x - y + 2z = 1$

2 | 3

① Grade $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ konstruieren ⊥ auf Ebene, soll durch P gehen

② Schnittpkt mit Ebene $2(2+2\tau) - (4-\tau) + 2(-1+2\tau) = 1$

in Ebenengl. rein

$$4 + 4\tau - 4 + \tau - 2 + 4\tau - 1 = 0$$

$$9\tau = 3$$

$$\boxed{\tau = 1/3}$$

③ Schnittpkt. $\begin{pmatrix} 2 + 2/3 \\ 4 - 1/3 \\ -1 + 2/3 \end{pmatrix}$ $(8/3 \,|\, 11/3 \,|\, -1/3)$ mit Ebene

④ Differenzvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/3 \\ 11/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ und dann sein Betrag

⑤ Betrag $|\vec{d}| = 1$ Abstand also 1 LE!

more: 17.1

(4c) Gleiche Vorgehensweise wie (4b)

$\Rightarrow$ 0 LE WARUM?

Pkt. in Ebene!!

(4d) $\frac{14}{3}$ LE Abstand Pkt. → Ebene

(4e) Gerade liegt in der Ebene!

(4f) Abstand $\frac{\sqrt{180}}{5}$ LE ≈ 2,7 LE $\left(t = \frac{6}{5}\right)$

(4g) Schnittpunkt bei (2/2/-4)

5. (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ $2 + 2 + 4a = 0$

$\boxed{a = -1}$

$\vec{RV}$ der Geraden!

Normalenvektor der Ebene

Nur noch schauen, ob nicht auch g in der Ebene liegt!

5b)

$$\begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\2\\-1\end{pmatrix} = a+2a-2=0$$

$$\boxed{a=\frac{2}{3}}$$

Auch hier noch zeigen, dass parallel & nicht identisch!

6) (a) Siehe <u>Video</u> zu Schnittgerade für Vorgehensweise

z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-7\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-13\\-7\end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\-7\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}$

z.B.

(c) z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5/4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-6/5\end{pmatrix}$

7) Siehe Video

$\Rightarrow$ Abstand $= 3$ LE