Quadratische Gleichungen - Lösungen

Kurs 96n Vorkurs

Setzt man $f_i = 0$ und löst nach der Unbekannten **x** auf, entspricht das den **Nullstellen** eines Funktionsgraphen.
Der Vollständigkeit halber bestimmt man auch gleich den y-Achsenabschnitt (dort wo der Graph die y-Achse schneidet), sowie den Scheitelpunkt (der höchste bzw. niedrigste Punkt des Graphen).

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{16}{6} && (1) \\ f_1(x) &= 0 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{16}{6} &= 0 \quad | \cdot 3 \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-8)} &= \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

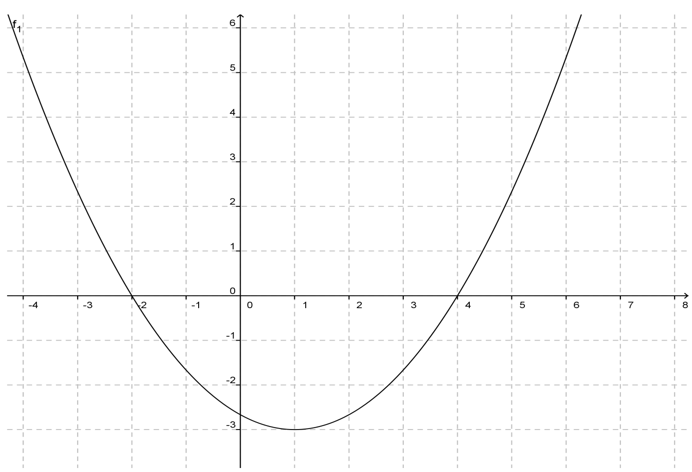

Abbildung 1: *Geometrische Interpretation der Funktion f_1*

Nullstellen: $(4/0)$ $(-2/0)$
y-Achsenabschnitt: $\left(0/-\frac{8}{3}\right)$
Scheitelpunkt: $(1/-3)$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 7,5 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= 0 \\
f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 7,5 &= 0 \quad | \cdot 2 \\
x^2 - 16x + 15 &= 0 \\
x_{1/2} &= 8 \pm \sqrt{8^2 - 15} \\
x_{1/2} &= 8 \pm \sqrt{49} = 8 \pm 7 \\
x_1 &= 15 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

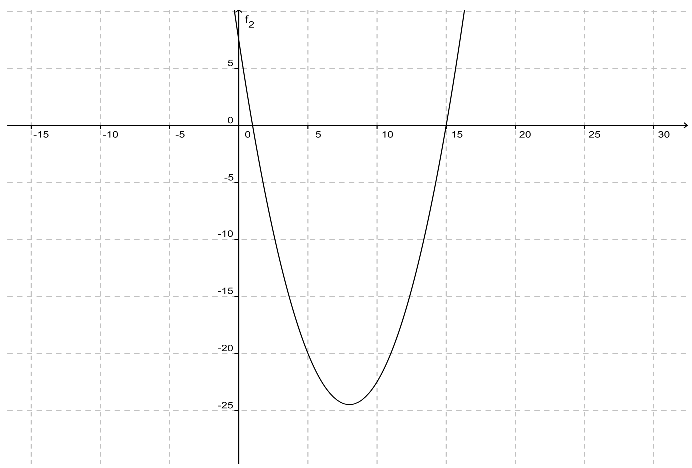

Abbildung 2: *Geometrische Interpretation der Funktion f_2*

Nullstellen: (1/0) (15/0)
y-Achsenabschnitt: $\left(0/\frac{15}{2}\right)$
Scheitelpunkt: $\left(8/-\frac{49}{2}\right)$

$$f_3(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= 0 \\
-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x &= 0 \quad | \cdot -8
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - \frac{3\cdot\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}} &= 0 \\
x_1(x_2 - 6) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 - 6 &= 0 \qquad |+6 \\
x_2 &= 6
\end{aligned}
$$

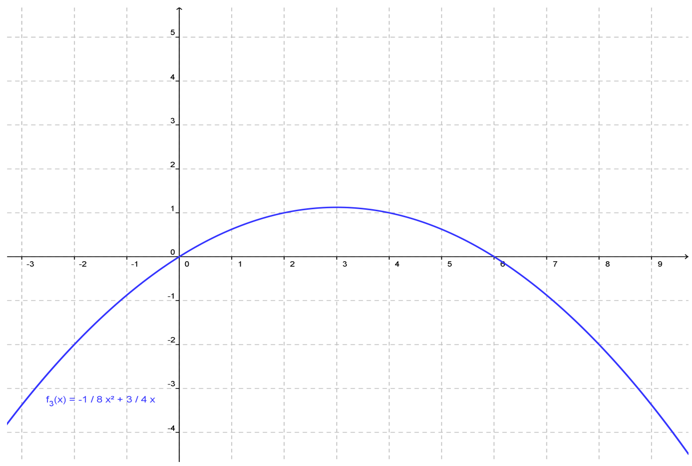

Abbildung 3: *Geometrische Interpretation der Funktion* f_3

Nullstellen: (0/0) (6/0)
y-Achsenabschnitt: (0/0)
Scheitelpunkt: $\left(3/\frac{9}{8}\right)$

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= 3x^2 + 9x + 18 \\
f_4(x) &= 0 \\
3x^2 + 9x + 18 &= 0 \qquad |\cdot\frac{1}{3} \\
x^2 + 3x + 6 &= 0 \\
x_{1/2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{24}{4}} = \dagger
\end{aligned} \tag{4}
$$

Diese Gleichung ist **nicht** lösbar, da aus negativen Zahlen keine reelle Wurzel gezogen werden kann. Folglich existieren auch keine Nullstellen.

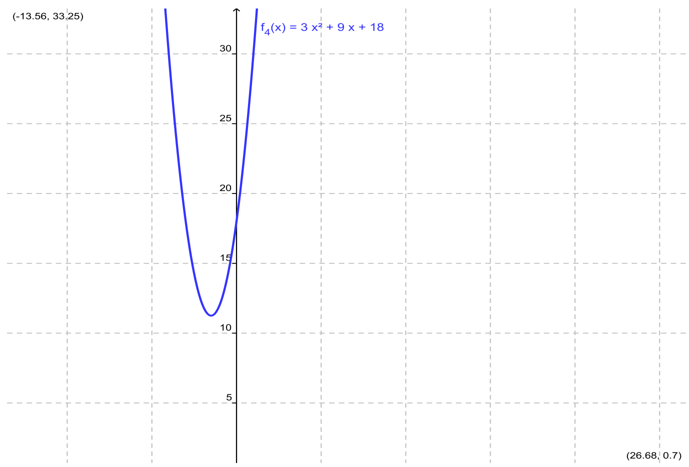

Abbildung 4: *Geometrische Interpretation der Funktion* f_4

Nullstellen: keine
y-Achsenabschnitt: (0/18)
Scheitelpunkt: $\left(-\frac{3}{2}/\frac{45}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= -(x-3)^2+2 && (5)\\
f_5(x) &= 0 \\
-(x^2-6x+9^{+}2 &= 0 \\
-x^2+6x-9+2 &= 0 \quad |\cdot -1 \\
x^2-6x+7 &= 0 \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2-7} \\
x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{2} \\
x_1 &= 3+\sqrt{2} \\
x_2 &= 3-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Da $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, ist es mathematisch korrekter, wenn man das Ergebnis so stehen läßt. Natürlich kann man approximativ sagen, dass $\sqrt{2} \approx 1,4142$ ist.

Abbildung 5: *Geometrische Interpretation der Funktion* f_5

Nullstellen: $(3+\sqrt{2}/0)$ $(3-\sqrt{2}/0)$
y-Achsenabschnitt: $(0/-7)$
Scheitelpunkt: $(3/2)$

$$f_6(x) = -\frac{2}{8}x^2 + 2x + 4 \tag{6}$$

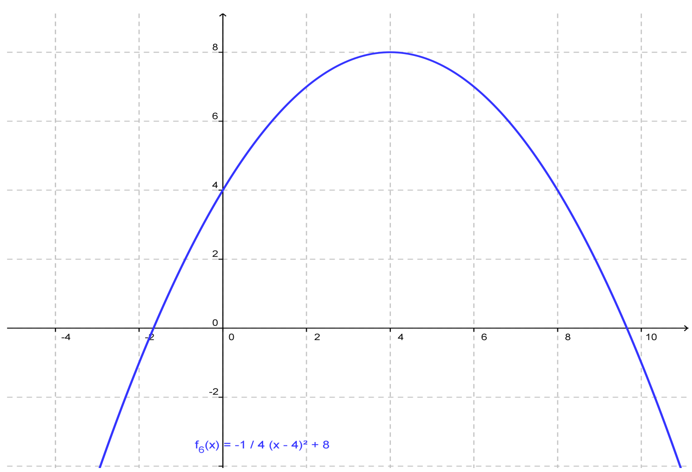

Abbildung 6: *Der Graph der Funktion* f_6

Nullstellen: $(4+\sqrt{32}/0)$ $(4-\sqrt{32}/0)$
y-Achsenabschnitt: $(0/4)$

Scheitelpunkt: (4/8)

$$f_7(x) = -5(x-2)(x+5) \tag{7}$$

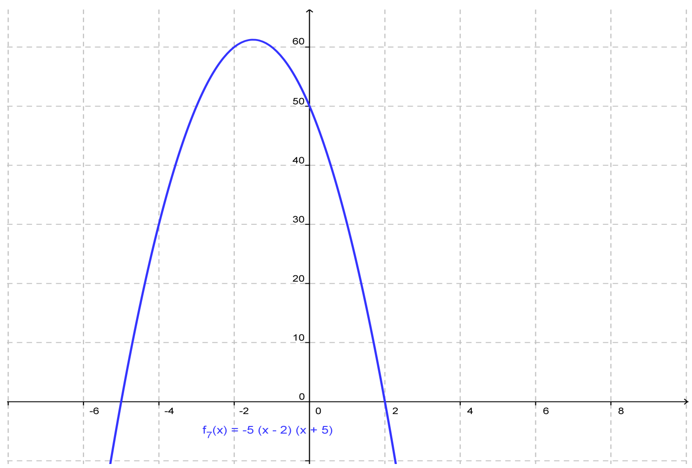

Abbildung 7: *Der Graph der Funktion f_7*

Nullstellen: (2/0) $(-5/0)$
y-Achsenabschnitt: (0/50)
Scheitelpunkt: $(-\frac{3}{2}/\frac{245}{4})$

$$f_8(x) = -4x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{6} \tag{8}$$

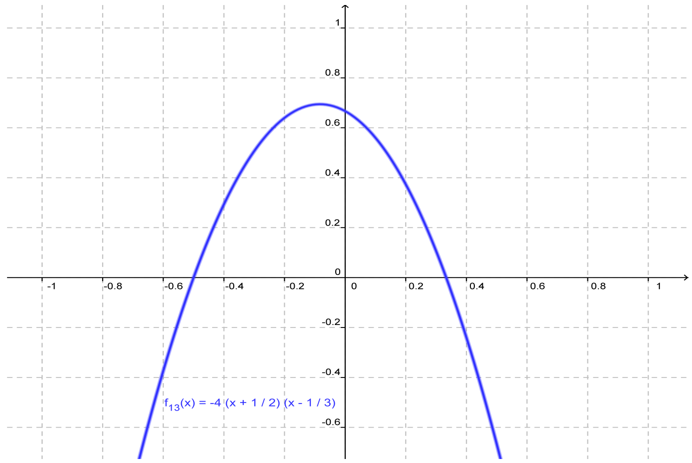

Abbildung 8: *Der Graph der Funktion* f_8

Nullstellen: $\left(-\frac{1}{2}/0\right)$ $\left(\frac{1}{3}/0\right)$
y-Achsenabschnitt: $\left(0/\frac{2}{3}\right)$
Scheitelpunkt: $\left(-\frac{1}{12}/\frac{25}{36}\right)$